Kharazmi University

Mathematical Research

Year 2026, Volume 11, Issue 4, pp. 156–167

Print ISSN: 2588-2546

Online ISSN: 2588-2554

DOI: xxxx

ON THE LOCAL-GLOBAL PRINCIPLE FOR THE GENERALIZED LOCAL HOMOLOGY MODULES

Marziyeh Hatamkhani

[1] Department of Mathematics ,Faculty of Science, Arak University , Arak, Iran

Received: 19 August 2025 Accepted: 1 January 2026 Published online:25 February 2026

Abstract: Let R be a commutative noetherian ring and I be an ideal of R. The aim of this paper is to establish the local-global principle for the artinianness dimension $a_I(M,N)$, where $a_I(M,N)$ is the smallest integer such that the generalized local homology module $H_i^I(M,N)$، is not artinian. For a finitely generated R-module M and a linearly compact R-module N with the set $\mathrm{Coass}_R(H^I_{a_I(M,N)}(M,N))$ finite, we show that

$$a_I(M,N) = \inf\{a_{IR_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p},_\mathfrak{p} N) | \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\}.$$

Keywords: artinianness dimension, generalized local homology modules, linearly compact modules.

[1] Corresponding author

E-mail addresses: (Marziyeh Hatamkhani) m-hatamkhani@araku.ac.ir

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۲۸۸
DOI: xxxx

پژوهش‌های ریاضی

سال ۱۴۰۴، دوره ۱۱، شماره ۴، ص ۱۵۶—۱۶۷

دانشگاه خوارزمی

اصل موضعی سراسری برای مدول‌های همولوژی موضعی تعمیم‌یافته

مرضیه حاتم خانی [۱]

گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه اراک، اراک، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۵/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۰/۱۱ تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۱۲/۷

چکیده: فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و جابجایی و I ایده‌الی از آن باشد. هدف از این مقاله، بیان و اثبات اصل موضعی–سراسری برای بعد آرتینی $a_I(M,N)$ است که $a_I(M,N)$، کوچکترین عدد صحیح i است که مدول همولوژی موضعی تعمیم‌یافته $H_i^I(M,N)$، آرتینی نیست. نشان می‌دهیم، برای R- مدول متناهی‌مولد M و R- مدول فشرده خطی نیمه‌گسسته N، به‌طوری‌که $N/\bigcap_{t>0} I^tN$ آرتینی باشد، هرگاه مجموعه‌ی $\operatorname{Coass}_R(H^I_{a_I(M,N)}(M,N))$ متناهی باشد، آنگاه

$$a_I(M,N)=\inf\{a_{IR_{\mathfrak p}}(M_{\mathfrak p},{}_{\mathfrak p}N)|\mathfrak p\in\operatorname{Spec}(R)\}.$$

.

واژه‌هاي کليدي: بعد آرتینی، مدول‌های همولوژی موضعی تعمیم‌یافته، مدول‌های فشرده خطی.

۱ مقدمه

در سراسر این مقاله، R حلقه‌ای نوتری جابجایی و I ایده‌الی از آن است. $\operatorname{Spec}(R)$، مجموعه ایده‌ال‌های اول R، و $\mathrm{V}(I)=\{\mathfrak p\in\operatorname{Spec}(R)|I\subseteq\mathfrak p\}$ هستند. برای Rـ مدول M، iـ امین مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت به I بصورت

$$H_I^i(M)=\varinjlim_t \operatorname{Ext}_R^i(\frac{R}{I^t},M)$$

[۱] نویسنده مسئول مقاله (Marziyeh Hatamkhani) m-hatamkhani@araku.ac.ir

تعریف می شود. اگر $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی و M یک Rـ مدول متناهی‌مولد ناصفر از بعد d باشد، آنگاه $H^{\circ}_{\mathfrak{m}}(M)$ متناهی‌مولد است، در حالی که $H^{d}_{\mathfrak{m}}(M)$ متناهی‌مولد نیست و برای $i>d$، $H^{i}_{\mathfrak{m}}(M)=\circ$. (مرجع [۱] راببینید.)

این نتایج، انگیزه بررسی کوچکترین عدد صحیحی که $H^{i}_{\mathfrak{m}}(M)$ متناهی‌مولد نیست را ایجاب می‌کند. این عدد صحیح، بعد متناهی M نسبت به $\mathfrak{m}$، نامیده می‌شود. به‌طور کلی بعد متناهی M نسبت به I، به‌صورت

$$f_I(M)=\inf\{i\geq\circ|\text{متناهی‌مولد نیست } H^{i}_{I}(M)\}$$

تعریف می‌شود.

یکی از قضایای مهم در کوهمولوژی موضعی، اصل موضعی‌ـ سراسری فالتینگ برای مدول‌های کوهمولوژی موضعی با بعد متناهی است که برای اولین بار در سال ۱۹۸۱ میلادی توسط فالتینگ در [۵]، مطرح شد. این اصل بیان می‌کند که برای هر عدد صحیح مثبت r، Rـ مدول $H^{i}_{I}(M)$ به ازای هر $i\leq r$ متناهی‌مولد است اگر و تنها اگر به ازای هر $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(R)$، $R_{\mathfrak{p}}$ـ مدول $H^{i}_{IR_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ به ازای هر $i\leq r$ متناهی‌مولد باشد. به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیه فالتینگ داریم

$$f_I(M)=\inf\{f^{i}_{IR_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})|\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(R)\}$$

که اصل موضعی‌ـ سراسری برای بعد متناهی نامیده می‌شود.

همولوژی موضعی، به‌عنوان دوگانی از کوهمولوژی موضعی توسط ماتلیس [۱۰] در سال ۱۹۷۴ معرفی شد. تابعگون Iـ ادیک کامل‌سازی مدول M، به‌صورت $\Lambda^{I}(M)=\varprojlim_t\frac{M}{I^tM}$ تعریف می‌شود و iـ امین مدول همولوژی موضعی M به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H^{I}_{i}(M)=\varprojlim_t\operatorname{Tor}_i(R/I^t,M).$$

کونگ و نم در [۳] ثابت کردند که همولوژی موضعی تعریف شده با این روش، ویژگی‌های مشابهی با کوهمولوژی موضعی، در رسته‌ی Rـ مدول‌های فشرده خطی به‌ویژه در رسته‌ی Rـ مدول‌های آرتینی دارد. برای مثال هرگاه M، Rـ مدولی آرتینی باشد، آنگاه $H^{I}_{\circ}(M)$ نیز آرتینی است و برای هر $i>\operatorname{mag}_R(M)$، $H^{I}_{i}(M)=\circ$. (مرجع [۷] راببینید.)

در مرجع [۱۲]، iـ امین مدول همولوژی موضعی تعمیم‌یافته $H^{I}_{i}(M,N)$ برای دو Rـ مدول M,N نسبت به ایده‌ال I، به‌صورت

$$H^{I}_{i}(M,N)=\varprojlim_t\operatorname{Tor}_i(M/I^tM,N)$$

تعریف شده است. در حالت خاص $M=R$، $H^{I}_{i}(R,N)=H^{I}_{i}(N)$، iـ امین همولوژی موضعی N نسبت به I است.

برای Rـ مدول متناهی‌مولد M و Rـ مدول فشرده خطی N، بعد آرتینی $a_I(M,N)$ از M,N نسبت به I به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a_I(M,N):=\inf\{i\in\mathbb{N}_\circ|\text{آرتینی نیست } H^{I}_{i}(M,N)\}.$$

در این مقاله هدف، بیان و اثبات اصل موضعی‌ـ سراسری برای بعد آرتینی تعمیم‌یافته است. به‌طور دقیقتر، قضیه‌ی زیر را ثابت می‌کنیم:

قضیه ۱.۱. *فرض کنید M یک Rـ مدول متناهی‌مولد و N یک Rـ مدول فشرده خطی نیمه‌گسسته باشد به‌طوری‌که $N/\bigcap_{t>0} I^tN$ آرتینی باشد و مجموعه‌ی $\mathrm{Coass}_R(H^I_{a_I(M,N)}(M,N))$ متناهی باشد، در این‌صورت*

$$a_I(M,N)=\inf\{a_{IR_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p},{}_\mathfrak{p}N)|\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(R)\}.$$

برای Rـ مدول متناهی‌مولد M و Rـ مدول فشرده خطی نیمه‌گسسته N و ایده‌ال‌های $J\subseteq I$ از R، Jـ بعد هم‌ـ آرتینی M,N نسبت به I، به‌صورت $c^J_I(M,N):=\inf\{i\geq 0|$هم آرتینی نباشد $- J, H^I_i(M,N)\}$، تعریف می‌شود. در بخش سوم، ثابت می‌شود که اگر $a_I(M,N)\neq c^J_I(M,N)$، آنگاه اصل موضعی سراسری برقرار می‌باشد، بعبارت دقیقتر

$$a^J_I(M,N)=\inf\{a^{JR_\mathfrak{p}}_{IR_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p},{}_\mathfrak{p}N)|\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(R)\}.$$

در ادامه مفهوم دنباله‌های هم‌ـ منظم و نماد $\mathrm{cograde}_N(M)$ معرفی شده و در قضیه‌ی ۱۱.۳، ارتباط بین این کمیت با بعد آرتینی تعمیم‌یافته بیان و اثبات می‌شود.

در انتها، رده‌ی مدول‌های $FM_{\leq n}$ معرفی شده و نشان داده می‌شود که

$$g^I_n(M,N)=\inf\{i\in\mathbb{N}_0|\text{نمایش‌پذیر نیست }{}_\mathfrak{p}(H^I_i(M,N));\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(R),\dim\frac{R}{\mathfrak{p}}\geq n\}$$

که در آن

$$g^I_n(M,N)=\inf\{i\in\mathbb{N}_0|H^I_i(M,N)\notin FM_{\leq n}\}.$$

۲ مفاهیم اولیه

در این بخش برخی تعاریف و لم‌های مورد استفاده در بخش بعد را یادآوری می‌کنیم.

با توجه به [۸]، یک Rـ مدول توپولوژیک M، توپولوژیک خطی نامیده می‌شود هرگاه پایه‌ای از همسایگی‌های عضو صفر M شامل زیرمدول‌ها داشته باشد. یک Rـ مدول توپولوژیک خطی M را فشرده خطی می‌نامیم هرگاه برای یک خانواده از همدسته‌های زیر مدول‌های بسته‌ی F در M که خاصیت اشتراک متناهی دارد، آنگاه اشتراک همدسته‌های در F ناتهی باشد. Rـ مدول M هاسدورف نامیده می‌شود هرگاه اشتراک تمام همسایگی‌های عضو صفر، صفر باشد. یک Rـ مدول توپولوژیک خطی‌هاسدورف M نیمه‌گسسته نامیده می‌شود اگر هر زیر مدول M بسته باشد. لذا هر مدول گسسته، نیمه‌گسسته است. بنابراین R- مدول‌های آرتینی با توپولوژی گسسته فشرده خطی هستند. همچنین روی یک حلقه موضعی کامل، مدول‌های متناهی‌مولد نیز گسسته و فشرده خطی هستند.

لم زیر یکی از خواص اساسی مدول‌های همولوژی موضعی تعمیم‌یافته را که در اثبات برخی از قضایای بخش بعد به‌کار می‌رود را بیان می‌کند.

لم ۱.۲. ([۱۸]) *اگر M یک Rـ مدول متناهی‌مولد و N یک Rـ مدول فشرده خطی باشد، آنگاه برای هر $i\geq 0$، $H^I_i(M,N)$ مدولی فشرده خطی است.*

برای یک Rـ مدول M مجموعه‌ی $\mathrm{Cosupp}_R(M)$، مجموعه‌ی تمام ایده‌ال‌های اول $\mathfrak{p}$ است به‌طوری‌که یک خارج قسمت هم‌ـ دوری L از M وجود داشته باشد که $\mathrm{Ann}_R(L)\subseteq\mathfrak{p}$ ([۱۷]). یادآوری می‌کنیم که یک مدول هم‌ـ دوری است هرگاه برای ایده‌ال ماکسیمال $\mathfrak{m}\in\mathrm{Max}\,R$، زیر مدولی از $E(R/\mathfrak{m})$ باشد.

ایده‌ال اول $\mathfrak{p}$، ایده‌ال هم‌ـ وابسته Rـ مدول M نامیده می‌شود هرگاه یک خارج قسمت هم‌ـ دوری L از M وجود داشته باشد که $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R L$ ([۱۷]). مجموعه‌ی ایده‌ال‌های هم‌ـ وابسته‌ی M را با $\mathrm{Coass}_R(M)$ نشان می‌دهیم و داریم $\mathrm{Coass}_R(M) \subseteq \mathrm{Cosupp}_R(M)$.

لم ۲.۲. ([۱۴، ۱۳.۳] و [۱۳، ۸.۳]). *فرض کنید M یک Rـ مدول متناهی‌مولد و N یک Rـ مدول فشرده خطی باشد. دراین‌صورت برای هر $i \geq 0$،*

$$\mathrm{Cosupp}_R(H_i^I(M,N)) \subseteq \mathrm{Supp}_R(M) \cap \mathrm{Cosupp}_R(N) \cap \mathrm{V}(I).$$

بزرگی M به‌صورت

$$\mathrm{mag}_R(M) = \sup\{\dim \frac{R}{\mathfrak{p}} | \mathfrak{p} \in \mathrm{Coass}_R(M)\}$$

تعریف می‌شود. اگر $M = 0$، قرار می‌دهیم $\mathrm{mag}_R(M) = -\infty$. ([۱۷])

لم زیر که به‌آسانی قابل اثبات است، در اثبات یکی از قضایای بخش بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد.

لم ۳.۲. *فرض کنید J ایده‌الی از R، $L \longrightarrow M \longrightarrow N$، دنباله‌ی دقیقی از Rـ مدول‌ها و Rـ همریختی‌ها و n, s, t اعداد صحیح نامنفی باشند به‌طوری‌که $\mathrm{mag}(J^tL) < n$ و $\mathrm{mag}(J^sN) < n$. در اینصورت عدد صحیح نامنفی l وجود دارد به‌طوری‌که*

$$\mathrm{mag}(J^lM) < n.$$

اثبات. با استفاده از تعریف بزرگی یک مدول به‌راحتی قابل اثبات است. □

Rـ مدول ناصفر M ثانویه نامیده می‌شود اگر درون‌ریختی ضرب با هر عضو x از R روی M، یا پوشا و یا پوچتوان باشد و در این‌صورت ایده‌ال پوچ M یک ایده‌ال اول $\mathfrak{p}$ است و M، $\mathfrak{p}$- ثانویه نامیده می‌شود. یک نمایش ثانویه برای یک Rـ مدول M، نمایشی از M به‌صورت جمع متناهی از مدول‌های ثانویه است . اگر چنین نمایشی وجود داشته باشد گوییم M نمایش‌پذیر است ([۹]).

فرض کنید S یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد. با توجه به [۱۱]، هم‌ـ موضعی سازی یک R- مدول M نسبت به S، مدول $_SM = \mathrm{Hom}(R_S, M)$ تعریف می‌شود. اگر M یک Rـ مدول آرتینی باشد، $_SM$ لزوما آرتینی نیست ([۱۱])، اگرچه، $_SM$ یک R- مدول فشرده خطی است. ([۳، ۵.۲]). فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده‌ال اولی از R و $S = R - \mathfrak{p}$، در این‌صورت به‌جای $_SM$ نماد $_{\mathfrak{p}}M$ استفاده می‌شود.

لم ۴.۲. ([۱۴، ۱۳.۳]). *فرض کنید S یک زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی و I ایده‌الی از R باشد. فرض کنید M یک Rـ مدول متناهی‌مولد و N یک Rـ مدول فشرده خطی باشد. در این‌صورت برای هر $i \geq 0$، داریم*

$$_S(H_i^I(M,N)) \cong H_i^{IR_S}(M_S, {}_SN)$$

۳ نتایج

لم زیر محکی برای آرتینی بودن مدول‌های همولوژی موضعی تعمیم‌یافته ارایه می‌دهد.

لم ۱.۳. *فرض کنید M یک Rـ مدول متناهی‌مولد باشد و N یک Rـ مدول فشرده خطی نیمه‌گسسته باشد به‌طوری‌که $N/\bigcap_{t>0} I^tN$ آرتینی باشد. فرض کنید $s \in \mathbb{N}$. دراین‌صورت شرایط زیر معادلند:*

۱. برای هر $i < s$، $I \subseteq \sqrt{(\circ : H_i^I(M,N))}$.

۲. برای هر $i < s$، $H_i^I(M,N)$ آرتینی است.

اثبات. برای اثبات (۲ $\Rightarrow$ ۱) به قضیه‌ی ۱.۳ از مرجع [۶] مراجعه کنید.

(۱ $\Rightarrow$ ۲): فرض کنید برای هر $i < s$، $H_i^I(M,N)$ آرتینی است. در این‌صورت برای هر $i < s$، $\mathrm{Cosupp}_R(H_i^I(M,N)) \subseteq \mathrm{V}((\circ : H_i^I(M,N))) \subseteq \mathrm{V}(I)$. بنابراین برای هر $i < s$،

$$I \subseteq \sqrt{I} \subseteq \sqrt{(\circ : H_i^I(M,N))}.$$

□

با توجه به لم ۱.۳، بعد آرتینی تعمیم‌یافته به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۲.۳. *فرض کنید M یک Rـ مدول متناهی‌مولد باشد و N یک Rـ مدول فشرده خطی نیمه‌گسسته باشد به‌طوری‌که $N/\bigcap_{t>\circ} I^t N$ آرتینی باشد. فرض کنید $s \in \mathbb{N}$. دراین‌صورت بعد آرتینی M, N نسبت به I، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$\begin{aligned} a_I(M,N) &:= \inf\{i \in \mathbb{N}_\circ | H_i^I(M,N) \text{ آرتینی نیست}\} \\ &= \inf\{i \in \mathbb{N}_\circ | I \nsubseteq \sqrt{(\circ : H_i^I(M,N))}\}. \end{aligned}$$

به‌عنوان تعمیمی از مفهوم فوق، تعریف زیر را داریم:

تعریف ۳.۳. *فرض کنید I, J دو ایده‌ال R به‌طوری‌که $J \subseteq I$، M یک Rـ مدول متناهی‌مولد و N یک Rـ مدول نیمه‌گسسته باشد به‌طوری‌که $N/\bigcap_{t>\circ} I^t N$ آرتینی باشد. Jـ بعد آرتینی M, N نسبت به I، $a_I^J(M,N)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\begin{aligned} a_I^J(M,N) &:= \inf\{i \in \mathbb{N}_\circ | J \nsubseteq \sqrt{(\circ : H_i^I(M,N))}\} \\ &= \inf\{i \in \mathbb{N}_\circ | \operatorname{mag}_R J^t H_i^I(M,N)) \geq \circ \qquad ; \forall t \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

که تساوی دوم از رابطه‌ی $\operatorname{mag} \circ = -۱$ به‌دست می‌آید.

ملاحظه ۴.۳. *با توجه به تعریف فوق داریم:*

۱. $a_I^J(M,N)$ *همواره عددی صحیح مثبت و یا بینهایت است زیرا،* $J \subseteq I \subseteq \sqrt{(\circ : H_\circ^I(M,N))}$.

۲. *روشن است که* $a_I^I(M,N) = a_I(M,N)$.

تعریف ۵.۳. *فرض کنید I, J دو ایده‌ال R به‌طوری‌که $J \subseteq I$، M یک Rـ مدول متناهی‌مولد و N یک Rـ مدول نیمه‌گسسته باشد به‌طوری‌که $N/\bigcap_{t>\circ} I^t N$ آرتینی باشد. برای هر عدد طبیعی n، قرار می‌دهیم:*

$$a_I^J(M,N)_n := \inf\{i \in \mathbb{N}_\circ | \operatorname{mag}_R(J^t H_i^I(M,N)) \geq n \qquad ; \forall t \in \mathbb{N}\}$$

و

$$a_I^J(M,N)^n := \inf\{a_{IR_{\mathfrak{p}}}^{JR_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}},{}_{\mathfrak{p}}N) | \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R), \dim \frac{R}{\mathfrak{p}} \geq n\}.$$

در ادامه رابطه‌ی بین $a_I^J(M,N)_n$ و $a_I^J(M,N)^n$ را بررسی می‌کنیم.

لم ۶.۳. *فرض کنید $I \subseteq J$ دو ایده‌ال R، M یک Rـ مدول متناهی‌مولد و N یک Rـ مدول فشرده خطی نیمه‌گسسته باشد به‌طوری‌که $N/\bigcap_{t>0} I^tN$ آرتینی باشد. در این‌صورت برای هر عدد طبیعی n،*

$$a_I^J(M,N)_n \leq a_I^J(M,N)^n.$$

اثبات. قرار دهید $s = a_I^J(M,N)^n$ و فرض کنید $s < a_I^J(M,N)_n$. لذا عدد صحیح t وجود دارد به‌طوری‌که $\operatorname{mag}(J^tH_s^I(M,N)) < n$. طبق نتیجه‌ی ۱۶.۲ از مرجع [۱۷]، برای هر ایده‌ال اول $\mathfrak{p}$ که $\dim R/\mathfrak{p} \geq n$، داریم

$${}_{\mathfrak{p}}(J^tH_s^I(M,N)) = 0.$$

چون $H_s^I(M,N)$ مدولی فشرده خطی است، لذا طبق قضیه‌ی ۶.۳ از مرجع [۲]، $(JR_{\mathfrak{p}})^tH_s^{IR_{\mathfrak{p}}}({}_{\mathfrak{p}}M,N_{\mathfrak{p}}) = 0$. بنابراین $a_I^J(M,N)^n > s$ که تناقض است. □

فرض کنید T یک زیرمجموعه از $\operatorname{Spec}(R)$ باشد و $n \in \mathbb{N}_0$. قرار می‌دهیم

$$(T)_{\geq n} = \{\mathfrak{p} \in T | \dim \frac{R}{\mathfrak{p}} \geq n\}.$$

لم ۷.۳. *فرض کنید $I \subseteq J$ دو ایده‌ال R، M یک Rـ مدول متناهی‌مولد و N یک Rـ مدول فشرده خطی نیمه‌گسسته باشد به‌طوری‌که $N/\bigcap_{t>0} I^tN$ آرتینی باشد. اگر برای عدد طبیعی n، مجموعه‌ی*

$$(\operatorname{Coass}_R(H^I_{a_I^J(M,N)_n}(M,N)))_{\geq n}$$

متناهی باشد، در این‌صورت

$$a_I^J(M,N)_n = a_I^J(M,N)^n.$$

اثبات. فرض کنید $s = a_I^J(M,N)_n$ و

$$(\operatorname{Coass}_R(H_s^I(M,N)))_{\geq n} = \{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_k\}.$$

با توجه به لم ۶.۳، کافیست ثابت کنیم $s \geq a_I^J(M,N)^n$. فرض کنید $s < a_I^J(M,N)^n$. بنابراین برای هر $1 \leq i \leq k$، $s < a_{IR_{\mathfrak{p}_i}}^{JR_{\mathfrak{p}_i}}(M_{\mathfrak{p}_i},{}_{\mathfrak{p}_i}N)$. لذا l_i وجود دارد به‌طوری‌که

$$(JR_{\mathfrak{p}_i})^{l_i}H_s^{IR_{\mathfrak{p}_i}}({}_{\mathfrak{p}_i}M,N_{\mathfrak{p}_i}) = 0.$$

قرار دهید $l = \max\{l_1, \cdots, l_k\}$. در این‌صورت برای هر $1 \leq i \leq k$،

$$(JR_{\mathfrak{p}_i})^{l}H_s^{IR_{\mathfrak{p}_i}}({}_{\mathfrak{p}_i}M,N_{\mathfrak{p}_i}) = 0.$$

حال چون $H_s^I(M,N)$ مدولی فشرده خطی است، لذا $\circ = (J^l H_s^I(M,N))_{\mathfrak{p}_i}$. بنابراین با استفاده از قضیه‌ی ۸.۳ از مرجع [۱۳]، $\operatorname{mag} J^l H_s^I(M,N)) < n$ و این یعنی $s < a_I^J(M,N)_n$، که تناقض است. $\square$

با قرار دادن $n = \circ$ در لم ۷.۳ و با توجه به اینکه $a_I^J(M,N) = a_I^J(M,N)_\circ$، اصل موضعی‌ـ سراسری برای بعد آرتینی تعمیم‌یافته، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

قضیه ۸.۳. *فرض کنید $J \subseteq I$ دو ایده‌ال R، M یک Rـ مدول متناهی‌مولد و N یک Rـ مدول فشرده خطی نیمه‌گسسته باشد به‌طوری‌که $N/\bigcap_{t>\circ} I^t N$ آرتینی باشد و مجموعه‌ی $\operatorname{Coass}_R(H^I_{a_I^J(M,N)}(M,N))$ متناهی باشد، در این‌صورت*

$$a_I^J(M,N) = \inf\{a_{IR_\mathfrak{p}}^{JR_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, {}_\mathfrak{p}N) | \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)\}.$$

به‌ویژه اگر $J = I$، در این‌صورت

$$a_I(M,N) = \inf\{a_{IR_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, {}_\mathfrak{p}N) | \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)\}.$$

نم در منبع [۱۳]، Rـ مدول M را Iـ هم‌آرتینی تعریف نمود هرگاه $\operatorname{Cosupp}_R(M) \subseteq \operatorname{V}(I)$ و $\operatorname{Tor}_i^R(\frac{R}{I}, M)$، برای هر $i \geq \circ$ آرتینی باشد. تعریف می‌کنیم

$$c_I^J(M,N) := \inf\{i \geq \circ | \text{هم‌آرتینی نباشد} - J, H_i^I(M,N)\}.$$

با توجه به قضیه‌ی ۸.۳، نتیجه‌ی بعد شرط دیگری را برای اینکه اصل موضعی‌ـ سراسری برای بعد آرتینی تعمیم‌یافته برقرار باشد، ارائه می‌دهد.

نتیجه ۹.۳. *فرض کنید $J \subseteq I$ دو ایده‌ال R، M یک Rـ مدول متناهی‌مولد و N یک Rـ مدول فشرده خطی نیمه‌گسسته باشد به‌طوری‌که $N/\bigcap_{t>\circ} I^t N$ آرتینی باشد. اگر $a_I(M,N) \neq c_I^J(M,N)$، در این‌صورت*

$$a_I^J(M,N) = \inf\{a_{IR_\mathfrak{p}}^{JR_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, {}_\mathfrak{p}N) | \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)\}.$$

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم

$$a_I(M,N) = \min\{a_I^J(M,N), c_I^J(M,N)\}.$$

قرار دهید $s = a_I(M,N)$. برای هر $i < s$ داریم $J \subseteq I \subseteq \sqrt{(\circ : H_i^I(M,N))}$ و $a_I(M,N) \leq a_I^J(M,N)$. حال اگر $t = c_I^J(M,N) < a_I(M,N)$، در این‌صورت $H_t^I(M,N)$، مدولی آرتینی است. ازآنجا که $\operatorname{Cosupp}_R(H_t^I(M,N)) \subseteq \operatorname{V}(I) \subseteq \operatorname{V}(J)$، لذا $H_t^I(M,N)$، Rـ مدولی J- هم‌آرتینی است که تناقض است. بنابراین $a_I(M,N) \leq c_I^J(M,N)$ و لذا

$$s \leq \min\{a_I^J(M,N), c_I^J(M,N)\}.$$

حال اگر $s < min\{a_I^J(M,N), c_I^J(M,N)\}$ در این‌صورت عدد صحیح n وجود دارد به‌طوری‌که $J^n H_s^I(M,N) = \circ$، بنابراین $H_s^I(M,N) \cong \dfrac{H_s^I(M,N)}{J^n H_s^I(M,N)}$. چون $s < c_I^J(M,N)$، پس $H_s^I(M,N)$،

Rـ مدولی J- هم‌آرتینی است و لذا $\frac{H^I_s(M,N)}{J^nH^I_s(M,N)}$ آرتینی است. پس یکریختی بالا نتیجه می‌دهد که $H^I_s(M,N)$ آرتینی است که تناقض است. از این‌رو

$$a_I(M,N) \geq \min\{a^J_I(M,N), c^J_I(M,N)\}.$$

از طرفی با توجه به فرض، $a_I(M,N) \neq c^J_I(M,N)$، که نتیجه می‌دهد $a_I(M,N) < c^J_I(M,N)$ و $a_I(M,N) = a^J_I(M,N)$. حال حکم از قضیه‌ی ۸.۳ و قضیه‌ی ۵.۴ از مرجع [۲] به‌دست می‌آید. $\square$

تعریف ۱۰.۳. ۱. عضو $a \in R$، Mـ هم‌منظم نامیده می‌شود هرگاه $aM = M$.

۲. دنباله $a_1, a_2, ..., a_n$ از اعضای R یک دنباله‌ی Mـ هم‌منظم نامیده می‌شود هرگاه

(آ) $\mathrm{Ann}_M(a_1, a_2, ..., a_n) \neq 0$؛

(ب) برای هر $1 \leq i \leq n$، a_i یک عضو $\mathrm{Ann}_M(a_1, a_2, ..., a_{i-1})$ـ هم‌منظم است.

۳. فرض کنید M یک Rـ مدول متناهی‌مولد و N یک Rـ مدول آرتینی باشد. طول هر دنباله Nـ هم‌منظم ماکسیمال مشمول در $\mathrm{Ann}_R(M)$ را با $\mathrm{cograde}_N(M)$ نشان می‌دهیم. توجه کنید این مفهوم با توجه به قضیه ۱۰.۳ از مرجع [۱۵]، خوش‌تعریف است.

قضیه ۱۱.۳. *فرض کنید $J \subseteq I$ دو ایده‌ال R، M یک Rـ مدول متناهی‌مولد و N یک Rـ مدول فشرده خطی نیمه‌گسسته باشد به‌طوری‌که $N/\bigcap_{t>0} I^tN$ آرتینی باشد. در این‌صورت برای هر عدد صحیح نامنفی n داریم:*

۱. *اگر $\mathrm{cograde}_N(\frac{M}{JM}) \geq a^J_I(M,N)_n$، آن‌گاه $\mathrm{cograde}_N(\frac{M}{JM}) \geq a^J(M,N)^n$.*

۲. *بعلاوه اگر داشته باشیم $a^J_I(M,N)_n = a^J_I(M,N)^n$، آن‌گاه عکس (۱) نیز برقرار است.*

اثبات. فرض کنید $\mathrm{cograde}_N(\frac{M}{JM}) = s$ و $s \geq a^J_I(M,N)_n$، نشان می‌دهیم $s \geq a^J(M,N)^n$. حکم را به استقرا روی s ثابت می‌کنیم. برای $s = 0$ حکم واضح است. فرض کنیم $s > 0$ و نتیجه برای $s - 1$ برقرار باشد. از آنجا که $\mathrm{cograde}_N(\frac{M}{JM}) > 0$، لذا J شامل یک عضو هم‌منظم x روی N است. بعلاوه چون $s \geq a^J_I(M,N)_n$، پس عدد صحیحی مانند t وجود دارد که برای هر $i < s$، $\mathrm{mag}(J^tH^I_i(M,N)) < n$. بنابراین از دنباله‌ی دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow (0 :_N x^t) \longrightarrow N \xrightarrow{.x^t} N \longrightarrow 0,$$

و با استفاده از لم ۳.۲، عدد صحیح l وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $i < s - 1$، $\mathrm{mag}(J^lH^I_i(M,(0 :_N x^t))) < n$ و لذا $a^J_I(M,(0 :_N x^t))_n \geq s - 1$. بنابراین فرض استقرا نتیجه می‌دهد که $a^J(M,(0 :_N x^t))^n \geq s - 1$. حال فرض کنیم $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$، $\dim \frac{R}{\mathfrak{p}} \geq n$ و $i < s$. در این‌صورت طبق تعریف، $_{\mathfrak{p}}(H^I_i(M,(0 :_N x^t)))$ آرتینی است و نیز $_{\mathfrak{p}}(J^tH^I_i(M,N)) = 0$ و لذا $x^t{}_{\mathfrak{p}}(H^I_i(M,N)) = 0$. پس داریم $_{\mathfrak{p}}(H^I_i(M,N)) = (0 :_{_{\mathfrak{p}}(H^I_i(M,N))} x^t)$. حال با توجه به لم ۲.۳ از مرجع [۱۳]، رشته دقیق زیر را داریم:

$$_{\mathfrak{p}}(H^I_i(M,N)) \xrightarrow{f}{}_{\mathfrak{p}}(H^I_i(M,N)) \xrightarrow{g}{}_{\mathfrak{p}}(H^I_{i-1}(M,(0 :_N x^t)))$$

که در آن $f = x^t id_{\mathfrak{p}(H_i^I(M,N))}$ است و لذا $\ker g = \operatorname{im} f = 0$. بنابراین رشته‌ی دقیق زیر به‌دست می‌آید:

$$0 \longrightarrow_{\mathfrak{p}} (H_i^I(M,N)) \xrightarrow{g}_{\mathfrak{p}} (H_{i-1}^I(M,(0:_N x^t)))$$

با توجه به اینکه برای هر $i < s$، $_{\mathfrak{p}}(H_{i-1}^I(M,(0:_N x^t)))$ آرتینی است، لذا برای هر $i < s$، $_{\mathfrak{p}}(H_i^I(M,N))$ نیز آرتینی است. در نتیجه $_{\mathfrak{p}}(a^J(M,N)) \geq s$ و لذا طبق تعریف، $a^J(M,N)^n \geq s$. □

نتیجه ۱۲.۳. *فرض کنید $J \subseteq I$ دو ایده‌ال R، M یک Rـ مدول متناهی‌مولد و N یک Rـ مدول فشرده خطی نیمه‌گسسته باشد به‌طوری‌که $N/\bigcap_{t>0} I^t N$ آرتینی باشد و فرض کنید n یک عدد صحیح نامنفی باشد به‌طوری‌که $a_I^J(M,N)_n \geq \operatorname{cograde}_N(\frac{M}{JM})$ و مجموعه‌ی $\operatorname{Coass}_R(H^I_{a_I^J(M,N)}(M,N))$ متناهی باشد، در این‌صورت*

$$\operatorname{cograde}_N(\frac{M}{JM}) \leq \min\{a_I^J(M,N)^n, a^J(M,N)^n\}.$$

اثبات. حکم از قضیه‌ی ۱۱.۳ و لم ۷.۳ به‌دست می‌آید.

□

تعریف ۱۳.۳. *فرض کنید n عدد صحیحی باشد.*

۱. *در مرجع [۱۶]، رده‌ی $FM_{\leq n}$ از Rـ مدول‌ها به‌صورت زیر تعریف شده است: یک Rـ مدول M به رده‌ی $FM_{\leq n}$ تعلق دارد، هرگاه زیرمدولی مانند N از M وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\operatorname{mag}_R N \leq n$ و $\frac{M}{N}$ آرتینی باشد.*

۲. *فرض کنید M, N دو R- مدول باشند. قرار می‌دهیم:*

$$g_n^I(M,N) = \inf\{i \in \mathbb{N}_0 | H_i^I(M,N) \notin FM_{\leq n}\}.$$

لم ۱۴.۳. *برای هر عدد صحیح n، رده‌ی $FM_{\leq n}$ یک زیر رسته‌ی سر از رسته‌ی Rـ مدول‌ها است.*

اثبات. به مرجع [۱۶]، لم ۴.۳ مراجعه کنید. □

لم ۱۵.۳. *فرض کنید L یک R- مدول فشرده خطی باشد و $L \in FM_{\leq n}$. در این‌صورت برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ که $\dim \frac{R}{\mathfrak{p}} > n$، $_{\mathfrak{p}}L$ مدولی نمایش‌پذیر است.*

اثبات. طبق تعریف، زیر مدول N از L وجود دارد به‌طوری‌که $\operatorname{mag}_R N \leq n$ و $\frac{L}{N}$ آرتینی است. فرض کنید $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ که $\dim \frac{R}{\mathfrak{p}} > n$. با توجه به قضیه‌ی ۲.۳ از مرجع [۱۱]، $_{\mathfrak{p}}(\frac{L}{N})$، $R_{\mathfrak{p}}$- مدولی نمایش‌پذیر است. از طرفی با توجه به لم ۲.۳ از مرجع [۱۳]، رشته‌ی دقیق زیر را داریم

$$0 \longrightarrow_{\mathfrak{p}} N \longrightarrow_{\mathfrak{p}} L \longrightarrow_{\mathfrak{p}} (\frac{L}{N}) \longrightarrow 0.$$

با توجه به فرض، $_{\mathfrak{p}}N = 0$ و لذا با توجه به رشته‌ی دقیق بالا، $_{\mathfrak{p}}L \cong_{\mathfrak{p}} (\frac{L}{N})$، که ثابت می‌کند $_{\mathfrak{p}}L$، مدولی نمایش‌پذیر است. □

در ادامه یکی از مهمترین قضایای این بخش را بیان و اثبات می‌کنیم، که اصل موضعي‌ـ‌سراسري را برای مدول‌های همولوژی موضعی تعمیم‌یافته متعلق به رده‌ی $FM_{\leq n}$ بیان می‌کند.

قضیه ۱۶.۳. *فرض کنید R حلقه‌ای نیمه موضعی و I ایده‌الی از R، M یک Rـ مدول متناهی‌مولد و N یک Rـ مدول فشرده خطی نیمه‌گسسته باشد به‌طوری‌که $N/\bigcap_{t>0} I^tN$ آرتینی باشد و فرض کنید n, s اعداد صحیحی باشند. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *برای هر $i < s$، $H_i^I(M,N) \in FM_{\leq n}$.*

۲. *برای هر $i < s$ و برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ که $\dim \frac{R}{\mathfrak{p}} > n$، $(H_i^I(M,N))_{\mathfrak{p}}$ مدولی نمایش‌پذیر است.*

اثبات. (۲ $\Rightarrow$ ۱): با توجه به لم ۱.۲، برای هر i، $H_i^I(M,N)$ مدولی فشرده خطی است و لذا حکم از لم ۱۵.۳ به‌دست می‌آید.

(۱ $\Rightarrow$ ۲): حکم را به استقرا روی s ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $s = ۱$. با توجه به قضیه‌ی ۱.۷ از مرجع [۴]، دنباله‌ی دقیق زیر را داریم:

$$0 \longrightarrow \bigcap_{t>0} I^tN \longrightarrow N \longrightarrow \Lambda_I(N) \longrightarrow 0.$$

قرار می‌دهیم $K := \bigcap_{t>0} I^tN$، در این‌صورت $\Lambda_I(N) \cong N/K$ که Rـ مدولی آرتینی است. حال طبق لم ۷.۲ از مرجع [۳] داریم

$$H_0^I(M,N) = \varprojlim_t (R/I^t \otimes_R M \otimes_R N) \cong \varprojlim_t (M \otimes_R N/I^tN) \cong M \otimes_R \Lambda_I(N).$$

بنابراین $H_0^I(M,N)$ آرتینی است و لذا $H_0^I(M,N) \in FM_{\leq n}$. فرض کنیم $s > ۱$. از فرض استقرا نتیجه می‌شود برای هر $i < s - ۱$، $H_i^I(M,N) \in FM_{\leq n}$. از اینرو کافیست ثابت کنیم، $H_{s-1}^I(M,N) \in FM_{\leq n}$. قرار می‌دهیم $a := \bigcap \operatorname{Coass}_R(H_{s-1}^I(M,N))$. در این‌صورت با استفاده از قضیه‌ی ۲.۱ از مرجع [۱۹]، عدد صحیح $e \geq ۱$ وجود دارد به‌طوری‌که $a^e H_{s-1}^I(M,N)$ متناهی‌مولد است. حال طبق لم ۲.۲، $\operatorname{Coass}_R(H_{s-1}^I(M,N)) \subseteq V(I)$ و لذا $I^e H_{s-1}^I(M,N)$ متناهی‌مولد است. از طرفی طبق قضیه‌ی ۲.۳ از مرجع [۶]، $H_{s-1}^I(M,N))/I^e H_{s-1}^I(M,N) \in FM_{\leq n}$. بنابراین $H_{s-1}^I(M,N) \in FM_{\leq n}$ و حکم ثابت می‌شود. □

نتیجه ۱۷.۳. *فرض کنید R حلقه‌ای نیمه‌موضعی و I ایده‌الی از R، M یک Rـ مدول متناهی‌مولد و N یک Rـ مدول فشرده خطی نیمه‌گسسته باشد به‌طوری‌که $N/\bigcap_{t>0} I^tN$ آرتینی باشد. در این‌صورت*

$$g_n^I(M,N) = \inf\{i \in \mathbb{N}_0 | \text{نمایش‌پذیر نیست } (H_i^I(M,N))_{\mathfrak{p}}; \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R), \dim \frac{R}{\mathfrak{p}} \geq n\}.$$

مراجع

[1] M.P. Brodmann and R.Y. Sharp, *Local cohomology; An algebraic introduction with geometric applications*, Cambridge: Cambridge University Press.

[2] N.T. Cuong and T.T. Nam , *On the co-localization, co-support and co-associated primes of local homology modules*, Vietnam J. Math, 29, (2001), no. 4, 359–368.

[3] N.T. Cuong and T.T. Nam, *A local homology theory for linearly compact modules*, J. Algebra, 319, (2008), no. 11, 4712–4737.

[4] C.U. Jensen, *Les Foncteurs Dérivés de $\varprojlim$ et leurs Applications en Théorie des Modules*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1972.

[5] G. Faltings, *Der endlichkeitssatz in der lokalen kohomologie*, Math. Ann. , 255, (1981), 45–56.

[6] M. Hatamkhani, *Serre subcategory, generalized local homology and generalized local cohomology modules*, IEJA., 38, (2025), 228–242.

[7] M. Hatamkhani and K. Divaani-Aazar, *On the vanishing of local homology modules*, Glasgow Math., 55, (2013), 457–464.

[8] I.G. MacDonald, *Duality over complete local rings*, Topology, 1, (1962), 213–235.

[9] I.G. MacDonald, *Secondary representation of modules over a commutative ring*, Symposia Mathematica, Vol. XI (Convegno di Algebra Commutativa, INDAM, Rome, 1971), pp. 23–43. Academic Press, London, 1973.

[10] E. Matlis, *The Koszul complex and duality*, Comm. Algebra, 1, (1974), no. 2, 87–144.

[11] L. Melkersson and P. Schenzel, *The co-localization of an Artinian module*, Proc. Edinburgh Math. Soc, (2) 38, (1995), no. 1, 121–131.

[12] T. T. Nam, *A finiteness result for co-associated and associated primes of generalized local homology and cohomology modules*, Comm. Algebra 37, (2009), no. 5, 1748–1757.

[13] T. T. Nam, *Co-support and coartinian modules*, Algebra Colloq, 15, (2008), no. 1, 83–96.

[14] T. T. Nam, *Left-derived functors of the generalized I-adic completion and generalized local homology*, Comm. Algebra, 38, (2010), no. 2, 440–453.

[15] A. Ooishi, *Matlis duality and width of a module*, Hiroshima Math. J., 6 (1976), 573-587.

[16] J. Shen, X. Yang, *The local-global principle for the artinianness dimensions*, Comm. Algebra, 52, (2024), no. 12, 5396–5404.

[17] S. Yassemi, *Coassociated primes*, Comm. Algebra, 23, (1995), 1473–1498.

[18] D. N. Yen and T. T. Nam, *Generalized local homology and duality*, Internat. J. Algebra Comput, 29, (2019), no. 3, 581–601.

[19] D. N. Yen and T. T. Nam, *Uber koassoziierte primideale*, Math. Scand., 63, (1988), no. 2, 196–211.