



Kharazmi
University

Mathematical Research
Year 2026, Volume 11, Issue 4, pp. 137–155

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
DOI: xxxx

A Novel Method to Decompose the Weights in the Weighted Sum Method of a Multi-Objective Linear Programming Problem

J. Vakili⁽¹⁾ ¹ and S. Shahsavanpour Ahl⁽²⁾

^{(1),(2)} Department of Mathematics, Statistics and Computer Science, University of Tabriz, Tabriz, Iran

Received: 23 August 2024 Accepted: 26 December 2025 Published online: 25 February 2026

Abstract: In the present study, a new and applicable method is presented to analyze and decompose the weights set in the weighted sum method. To do this, at first a linear programming (LP) problem is designed for each extreme point of the expanded outcome space. Then, it is shown that the extreme optimal solutions of the presented LPs are the gradient vectors of the defining (weak) non-dominated hyperplanes of the expanded outcome space. Then, the set of eligible weights in the weighted sum method is comprehensively studied. In fact, the polyhedral and structural analysis of the weight set, i.e., the geometric arrangement of facets, edges, and vertices of the set of all weights can be meticulously checked and as a consequence, some structural insights related to the properties of the set of (weak) non-dominated solutions are surveyed. Finally, the advantage and validity of the method is discussed by a numerical example.

Keywords: Multiobjective Linear Program (MOLP), Weighted-Sum, Weights, Decomposition.



©2026 Kharazmi University, Tehran, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

¹Corresponding author

E-mail addresses: (Javad Vakili) j.vakili@tabrizu.ac.ir, (Sahar Shahsavanpour Ahl) shahsavan.sahar1372@gmail.com



یک روش جدید برای تجزیه وزن‌ها در روش مجموع وزن‌دار یک مسأله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه

جواد وکیلی^(۱) و سحر شاهسون‌پور اهل^(۲)

(۱)،(۲) گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۶/۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۰/۵ تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۱۲/۷

چکیده: در مطالعه حاضر، یک روش جدید و کاربردی برای تجزیه و تحلیل مجموعه وزن‌ها در روش مجموع وزن‌دار ارائه می‌شود. روش ارائه شده برخلاف اکثر روش‌های دیگر از مشکل تباهیدگی رنج نمی‌برد. برای انجام این، ابتدا یک مسأله برنامه‌ریزی خطی (LP) برای هر نقطه رأسی فضای نتیجه توسعه‌یافته طراحی می‌شود. سپس نشان داده می‌شود که جواب‌های بهینه رأسی LP‌های ارائه شده، بردارهای گرادیان ابرصفحه‌های نامغلوب (ضعیف) تعریف‌کننده فضای نتیجه توسعه‌یافته می‌باشند. در ادامه، مجموعه وزن‌های واجدالشرايط در روش مجموع وزن‌دار به صورت جامع مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در حقیقت ساختار چندوجهی، یعنی، ترتیب هندسی رویه‌ها، یال‌ها و رئوس مجموعه همه وزن‌ها به صورت دقیق بررسی می‌شود و به عنوان یک نتیجه، تعدادی دیدگاه ساختاری مربوط به خواص مجموعه جواب‌های نامغلوب (ضعیف) مورد بررسی قرار می‌گیرد. سرانجام، با ارائه یک مثال عددی، اعتبار و مزایای روش مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (MOLP)، روش مجموع وزن‌دار، وزن‌ها، تجزیه.

۱ مقدمه

برنامه‌ریزی چندهدفه^۲ (MOP) توجه بسیاری از پژوهشگران را به خود جلب کرده است. دلیل این امر وجود چندین تابع هدف می‌باشد که باعث می‌شود این مبحث کاربرد زیادی در جهان واقعی داشته باشد، به عنوان ارائه چند مثال مهم برای کاربرد بهینه‌سازی چندهدفه می‌توان به کاربرد این مبحث در درمان سرطان [۱۰، ۲۱]، حمل و نقل [۱۹، ۲۰]، طراحی مهندسی [۱۸]، مدیریت انرژی [۲۳] و پایداری زیست محیطی [۶، ۲۶] به منظور ذخیره پول و زمان نام برد. از نقطه نظر تئوری، نه تنها بهینه‌سازی چندهدفه زمینه مطالعاتی بسیار جالبی می‌باشد، بلکه

^۱ نویسنده مسئول مقاله

(Javad Vakili) j.vakili@tabrizu.ac.ir, (Sahar Shahsavanpour Ahl) shahsavan.sahar1372@gmail.com

^۲Multi Objective Programming

به دلیل ارتباط آن با اقتصاد، بهینه‌سازی تصادفی و بهینه‌سازی استوار، ارزش آن دوچندان می‌شود [۷، ۱۰، ۱۱]. برای مروری بر کاربرد بهینه‌سازی چندهدفه در زمینه‌های مختلف می‌توان به [۹] رجوع کرد. در واقع در مسائل بهینه‌سازی تک‌هدفه منظور از حل مسأله عبارت است از پیدا کردن نقطه‌ای که بتواند تابع هدف را در بهترین کیفیت قرار دهد، ولی در بهینه‌سازی چندهدفه برخلاف تک‌هدفه به دلیل وجود چندین تابع که همواره در نزاع می‌باشند، نمی‌توان نقطه‌ای را پیدا کرد که همه توابع هدف‌ها را همزمان بهینه کند، لذا در این مسائل بحث نقاط کارا (یا نامغلوب^۱) پیش می‌آید. بزرگ‌ترین مشکل در بهینه‌سازی چندهدفه منحصر بفرود نبودن نقاط کارا یا نامغلوب و غیرمقایسه‌پذیر بودن آنها می‌باشد که سبب می‌شود به دنبال پیدا کردن همه جواب‌های کارا یعنی مجموعه جواب‌های کارا باشیم.

یک جواب کارا یک نقطه شدنی برای مسأله بهینه‌سازی چندهدفه است به طوری که اگر بخواهیم عملکرد یکی از توابع هدف را در این نوع نقاط بهبود ببخشیم، باعث می‌شود عملکرد حداقل یکی دیگر از توابع هدف‌ها بدتر شود. تصویر یک نقطه کارا (تحت نگاهت توابع هدف)، یک نقطه نامغلوب نامیده می‌شود که به فضای هدف تعلق دارد (برای جزئیات بیشتر [۱۴] را ببینید). در واقع جهت واضح‌تر بیان کردن منظور، باید ذکر شود با فرض اینکه $f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)$ توابع هدف یک مسأله بهینه‌سازی چندهدفه باشند و $\hat{x} \in \mathcal{X}$ یک نقطه کارا باشد، در این صورت تصویر این نقطه تحت نگاهت تابع هدف، یعنی $f(\hat{x}) = (f_1(\hat{x}), f_2(\hat{x}), \dots, f_p(\hat{x}))$ یک نقطه نامغلوب نامیده می‌شود که در بهینه‌سازی چندهدفه خطی، این تصویر همان $\hat{y} = C\hat{x}$ می‌باشد که در آن $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ماتریس تابع هدف می‌باشد، p تعداد تابع هدف و n تعداد متغیرها بوده و $r = 1, 2, \dots, p, c^r$ سطرهای ماتریس C می‌باشند.

در واقع، توابع هدف در بهینه‌سازی چندهدفه خطی، در حالت کلی به صورت $Cx = (c^1x, c^2x, \dots, c^px)$ نمایش داده می‌شوند. روش‌های زیادی برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه وجود دارد که یکی از مهم‌ترین آنها تبدیل این نوع مسائل به مسائل بهینه‌سازی تک‌هدفه و سپس حل این مسائل می‌باشد که این روش‌ها به اسکالرزاسی^۲ معروف هستند. یکی از مهم‌ترین و شاید مهم‌ترین روش اسکالرزاسی، روش مجموع وزن‌دار^۳ می‌باشد که در این روش هر تابع هدف را در یک وزن نامنفی λ_i ضرب و سپس آنها را باهم جمع می‌کنند که منجر به یک مسأله تک‌هدفه یا اسکالرزاسی پارامتری $\min_{x \in \mathcal{X}} \{\lambda^T Cx\}$ می‌شود. برای حل مسأله مجموعه وزن‌دار و پیدا کردن همه جواب‌های کارا، باید همه وزن‌ها (یا پارامترها) مشخص شوند [۲۵]. ایده تغییر وزن‌ها و تجزیه آنها کاملاً آغازین است و تعدادی روش برای پیدا کردن و تعیین این وزن‌ها در روش مجموع وزن‌دار ارائه شده است که هرکدام دارای مزایا و معایبی می‌باشند [۱، ۸، ۱۵، ۲۲]. برای بررسی این مقالات در جزئیات بیشتر، آلوز و کاستا در [۱] روشی را برای محاسبه زیر مجموعه‌ای از فضای وزن‌ها در روش اسکالرزاسی مجموع وزن‌دار برای مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه صحیح و مختلط - صحیح ارائه می‌دهد که امکان تحلیل حساسیت را نیز به کاربران می‌دهد. روشی که این مقاله برای بررسی فضای وزن‌ها ارائه می‌دهد، به تصمیم‌گیرندگان کمک می‌کند تاثیر تغییر وزن‌ها روی نتایج را بهتر درک کنند. از مزایای این روش ارائه شده می‌توان به رویکرد تصویری نوآورانه آن با تمرکز روی مسائل بهینه‌سازی چندهدفه پیچیده اشاره کرد که کمتر در روش‌های دیگر مورد توجه قرار گرفته است. با این حال، این مقاله علاوه بر محدود بودن به فقط سه تابع هدف، دارای پیچیدگی بالایی می‌باشد که مهم‌ترین دلیل پیچیدگی آن به سروکار داشتن آن با مسائل بهینه‌سازی چندهدفه صحیح و مختلط - صحیح بر می‌گردد. در ضمن نیاز به تخصص در تفسیر نتایج از دیگر معایب این مرجع است که در آن استفاده از روش هندسی، نیازمند آشنایی کافی با مفاهیم بهینه‌سازی چندهدفه است و ممکن است برای کاربران غیرمتخصص دشوار باشد و سرانجام، مهم‌ترین عیب آن به عدم پوشش کامل فضای وزن‌ها مربوط می‌شود. در ضمن استفاده از آن برای مسائل بهینه‌سازی چندهدفه خطی از نظر محاسباتی به صرفه نیست. در [۸]، نویسندگان به بررسی روش‌های تجزیه دقیق میانگین حسابی وزنی می‌پردازند. در این مقاله، نویسندگان به دنبال ارائه یک رویکرد دقیق و قابل تفسیر برای تجزیه و تحلیل میانگین‌های وزنی هستند، به گونه‌ای که بتوان تأثیر هر یک از اجزای مختلف بر میانگین نهایی را به وضوح مشاهده کرد. خلاصه محتوا و هدف مقاله، معرفی یک روش تحلیلی برای تجزیه میانگین حسابی وزنی به صورت جمعی از اجزا و تضمین دقت در این تجزیه

¹Non-dominated

²Scalarization

³Weighted sum method

می‌باشد به طوری که جمع اجزاء برابر با میانگین کلی باشد. همچنین مقاله چارچوبی ارائه می‌دهد که در آن بتوان اثرات تغییر وزن‌ها و مقادیر هر بخش را جداگانه تحلیل کرد. از مزایای روش می‌توان به دقت بالای آن، تفسیرپذیری آن، کاربرد آن در تحلیل حساسیت و پشتیبانی‌اش از تصمیم‌گیری اشاره کرد و از معایب و محدودیت آن نیز می‌توان پیچیدگی محاسباتی، محدودیت‌های نظری، کاهش کاربرد در موارد غیرخطی و نیاز به داده‌های دقیق را نام برد. [۲۲] به بررسی روش‌های دقیق برای پیدا کردن نقاط نامغلوب در برنامه‌ریزی‌های چندهدفه مختلط می‌پردازد. این روش همه این نوع نقاط را با تجزیه کردن وزن‌ها در روش مجموع وزن‌دار پیدا می‌کند و علی‌رغم ارائه یک روش دقیق برای تجزیه وزن‌ها و سپس تعیین مجموعه نقاط نامغلوب، مهم‌ترین عیب آن این است که روش ارائه‌شده در تجزیه وزن‌ها برای روش مجموع وزن‌دار در مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه از نظر محاسباتی مقرون به صرفه نیست. بنابراین با بررسی مراجع بالا می‌توان اظهار داشت که در واقع در مراجع بالا روش موثری برای تجزیه وزن‌ها در روش مجموع وزن‌دار در مسائل بهینه‌سازی خطی چندهدفه وجود ندارد و فقدان روشی مؤثر جهت رسیدن به نتایج و مباحث نظری و عملی مفید احساس می‌شود.

در رابطه با ارتباط بین وزن‌ها و نقاط نامغلوب باید گفته شود که هر تصویر نامغلوب مجموعه وزن متناظر خودش (یعنی، مجموعه همه بردارهای وزنی که روش اسکالرسازی مجموع وزن‌دار همان تصویر نامغلوب را نتیجه می‌دهد) را دارد. تجزیه مجموعه وزن‌ها معمولاً طوری گرفته می‌شوند که گردایه می‌نیمالی از مولفه‌های مجموعه وزنی باشند که مجموعه وزن‌ها را می‌پوشانند. روش‌های تجزیه وزن برای اسکالرسازی مجموع وزن‌دار به کار یو و زلی [۲۴] بر می‌گردد که برای این منظور یک روش سیمپلکس تعمیم‌یافته معرفی می‌کنند و جواب‌های پایه‌ای را به مجموعه وزن‌ها در مخروط چندوجهی تعریف شده به وسیله ماتریس پایه متناظر مرتبط می‌کند. برای مساله دوهدفه روش جستجوی دوبخشی معروف در حقیقت همه نقاط نامغلوب حمایت‌شده رأسی^۱ را محاسبه می‌کنند [۲، ۱۲]. بنسون و سان [۴، ۵] این ایده را توسعه می‌دهند و یک ارتباطی را بین نقاط نامغلوب رأسی و حمایت‌شده رأسی یک مساله بهینه‌سازی خطی چندهدفه به وجود می‌آورند و بنابراین افزایی برای مجموعه وزن‌ها ارائه می‌دهند. شایان ذکر است، بیشتر روش‌های محاسبه وزن‌ها در روش اسکالرسازی مجموع وزن‌دار در مورد مسایل با ناحیه شدنی و تصویر ناحیه شدنی گسسته کار می‌کنند.

در این مقاله، روشی جدید برای تجزیه مجموعه وزن‌ها در روش مجموع وزن‌دار یک مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه^۲ (MOLP) در فضای پیوسته ارائه می‌شود، به طوری که در این روش ابتدا برای هر نقطه رأسی فضای نتیجه یا تصویر مجموعه شدنی گسترش یافته، یک مساله بهینه‌سازی خطی ارائه می‌شود و سپس با حل آنها، همه جواب‌های بهینه رأسی این مسائل را به دست می‌آوریم. در ادامه ثابت می‌شود که نقاط رأسی بهینه این مسائل همان گرادیان ابرصفحه‌های تکیه‌کننده فضای نتیجه می‌باشند که می‌توانند در تجزیه وزن‌های روش مجموع وزن‌دار بسیار تعیین‌کننده باشند و نقش مرزها را در این تجزیه بازی کنند. در واقع، این مقاله نه تنها روشی را برای محاسبه وجوه (یا ابرصفحه‌های) کارا یا نامغلوب تعریف‌کننده ارائه می‌دهد، بلکه با استفاده از این ابرصفحه‌ها یا وجوه، مولفه‌های مجموعه وزن‌ها را در روش مجموع وزن‌دار شده به دست آورده و این مجموعه را در فضای وزن‌ها تجزیه می‌کند. سرانجام با یک مثال عددی اعتبار و درستی روش ارائه شده و همچنین چگونگی مورد استفاده قرار گرفتن آن بحث می‌شود. درست است روش ارائه شده در این مقاله جهت تجزیه مجموعه وزن‌ها در روش مجموع وزن‌دار یک مساله MOLP و همچنین محاسبه همه نقاط کارا یا نامغلوب (ضعیف) NP-سخت می‌باشد، با این حال نتایج و مباحثی در این مقاله ارائه می‌شود که می‌توانند در تجزیه و تحلیل مسائل بهینه‌سازی خطی چندهدفه بسیار مفید واقع شوند و راه را می‌تواند هموار کند تا در آینده بحث‌های مفیدتری صورت گیرد. همچنین، اکثر روش‌ها برای به دست آوردن همه ابرصفحه‌های تعریف‌کننده کارا یا نامغلوب معمولاً علاوه بر اینکه از پیچیدگی محاسباتی نمایی برخوردارند، همچنین به دلیل استفاده از مدل‌هایی با قیده‌های مشابه با قیده‌های مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه اولیه دارای تباهیدگی بسیار بالا یا شدید می‌باشند که این عامل باعث ایجاد مشکلات محاسباتی و مفهومی در حل مسائل می‌شود. اما روش ارائه‌شده در این مقاله، اگرچه دارای پیچیدگی محاسباتی نمایی می‌باشد، ولی ضمن آسان بودن پیاده‌سازی آن، برخلاف روش‌های دیگر مشکل تباهیدگی در حل مسائل را ندارد. لذا با توجه به این مزیت روش ارائه شده نسبت به روش‌های دیگر می‌تواند راهکار خوبی برای به دست آوردن همه ابرصفحه‌های نامغلوب یک مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه و همچنین تجزیه وزن‌ها در روش مجموع وزن‌دار این مسائل باشد.

¹Extreme supported non-dominated point

²Multi Objective Linear Programming

این مقاله به صورت زیر سازمان‌دهی می‌شود. بخش اول شامل مقدمه می‌باشد و بخش دوم ضمن مرور مفاهیم مقدماتی، شامل روش اصلی ارائه شده در این مقاله است و در این بخش روشی برای محاسبه ابرصفحه‌های کارای تعریف‌کننده ناحیه شدنی ارائه می‌شود و سپس از روی آنها چگونگی تجزیه وزن‌ها در روش مجموع وزن‌دار ارائه می‌شود. همچنین در بخش سوم جهت بررسی مباحث، یک مثال عددی ارائه می‌شود و در نهایت بخش چهارم شامل نتیجه‌گیری و جمع‌بندی مقاله است.

۲ روش پیشنهادی برای تجزیه فضای وزن‌ها

در این بخش، ابتدا به ارائه برخی از اطلاعات و تعاریف اساسی مورد نیاز از مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (MOLP) که در ارائه نتایج اصلی مورد نیاز هستند، می‌پردازیم و سپس روش پیشنهادی را توضیح می‌دهیم. برای ارائه این مباحث، مسأله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه یا MOLP زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{aligned} \text{(MOLP)} : \quad & \text{Min } Cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

که در آن $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ و $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ماتریس‌هایی از مرتبه‌های مشخص شده می‌باشند و $b \in \mathbb{R}^m$ یک بردار می‌باشد و $c^r, r = 1, 2, \dots, p$ سطرهاى ماتریس C می‌باشند. ناحیه شدنی در فضای تصمیم \mathbb{R}^n با \mathcal{X} نشان داده شده و به صورت

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

تعریف می‌شود. در اینجا فرض می‌شود \mathcal{X} یک مجموعه کران‌دار می‌باشد. همچنین،

$$\mathcal{Y} = C(\mathcal{X}) = \{Cx | x \in \mathcal{X}\}$$

تصویر \mathcal{X} تحت نگاشت تابع هدف در فضای هدف \mathbb{R}^p می‌باشد. به صورت واضح‌تر، فضایی که \mathcal{X} و \mathcal{Y} زیر مجموعه آنها می‌باشد، به ترتیب فضای تصمیم و هدف نامیده می‌شوند. توجه کنید که چون \mathcal{X} یک مجموعه محدب می‌باشد، لذا \mathcal{Y} نیز یک مجموعه محدب است، زیرا،

$$\forall y^1, y^2 \in \mathcal{Y}, \lambda \in (0, 1) \implies \exists x^1, x^2 \in \mathcal{X} \text{ s.t. } y^1 = Cx^1, y^2 = Cx^2.$$

در این صورت داریم،

$$\lambda y^1 + (1 - \lambda)y^2 = \lambda Cx^1 + (1 - \lambda)Cx^2 = C(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2),$$

که در آن، چون \mathcal{X} یک مجموعه محدب می‌باشد، پس $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in \mathcal{X}$. در نتیجه،

$$\lambda y^1 + (1 - \lambda)y^2 \in \mathcal{Y}.$$

در بهینه‌سازی چندهدفه برخلاف مسائل بهینه‌سازی تک‌هدفه به دلیل وجود چندین تابع که همواره در نزاع می‌باشند، نمی‌توان نقطه‌ای را پیدا کرد که همه توابع هدف‌ها را همزمان بهینه کند، لذا در این مسائل بحث نقاط کارا (یا نامغلوب) پیش می‌آید، که دو نوع از این نقاط دارای تعریف زیر می‌باشند.

تعریف ۱.۲. $\hat{x} \in \mathcal{X}$ یک نقطه کارای ضعیف^۲ مسأله (۱.۲) نامیده می‌شود اگر هیچ نقطه‌ای مانند $x \in \mathcal{X}$ وجود نداشته باشد به طوری که $Cx < C\hat{x}$. اگر $\hat{x} \in \mathcal{X}$ نقطه کارای ضعیف باشد، در این صورت $\hat{y} = C\hat{x}$ را نقطه نامغلوب ضعیف می‌نامند.

¹Decision Space

²Weak

تعریف ۲.۲. $\hat{x} \in \mathcal{X}$ یک نقطه کارا نامیده می‌شود اگر هیچ نقطه‌ای مانند $x \in \mathcal{X}$ وجود نداشته باشد به طوری که $Cx \leq C\hat{x}$ با $Cx \neq C\hat{x}$. اگر $\hat{x} \in \mathcal{X}$ نقطه کارا باشد، در این صورت $\hat{y} = C\hat{x}$ را نقطه نامغلوب می‌نامند.

مجموعه نقاط کارا، کارای ضعیف، نامغلوب و نامغلوب ضعیف را به ترتیب با $\mathcal{X}_E, \mathcal{X}_{WE}, \mathcal{Y}_N$ و \mathcal{Y}_{WN} نشان می‌دهند. توجه کنید که

$$\mathcal{X}_E \subseteq \mathcal{X}_{WE}, \quad \mathcal{Y}_N \subseteq \mathcal{Y}_{WN}.$$

در واقع برای هر مجموعه $A \subseteq \mathbb{R}^p$ ، $\hat{y} \in A$ یک نقطه نامغلوب (یا نامغلوب ضعیف) A می‌باشد اگر هیچ نقطه $y \in A$ وجود نداشته باشد به طوری که $y \leq \hat{y}$ با $y \neq \hat{y}$. در این صورت نیز، با فرض اینکه A_N و A_{WN} به ترتیب مجموعه نقاط نامغلوب و نامغلوب ضعیف مجموعه A را نشان دهد، داریم $A_N \subseteq A_{WN}$. در این مقاله فرض بر این است که \mathcal{X} یک مجموعه کراندار^۱ می‌باشد. لذا مجموعه \mathcal{X} هیچ جهت دورشونده^۲ رأسی ندارد و بدون آنکه به کلیت برهان خللی وارد شود می‌توان فرض کرد که x^1, x^2, \dots, x^k همه نقاط رأسی مجموعه \mathcal{X} می‌باشند. در این صورت طبق قضیه نمایش^۳ در برنامه‌ریزی خطی داریم،

$$x \in \mathcal{X} \iff x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x^j, \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

همچنین به راحتی می‌توان بررسی کرد که

$$y \in \mathcal{Y} \iff y = \sum_{j=1}^k \lambda_j y^j, \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

که در آن $y^j = Cx^j$ ، $j = 1, 2, \dots, k$. برای اثبات اینکه قضیه نمایش را می‌توانیم برای مجموعه \mathcal{Y} به کار ببریم، فرض کنید $y \in \mathcal{Y}$ باشد، داریم

$$\exists x \in \mathcal{X} \text{ s.t. } y = Cx.$$

در این صورت، $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ با $\lambda_j \geq 0$ ، $j = 1, 2, \dots, k$ طوری وجود دارند که

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x^j,$$

که در آن x^1, x^2, \dots, x^k همه نقاط رأسی مجموعه \mathcal{X} می‌باشند. لذا واضح است که

$$y = Cx = C \sum_{j=1}^k \lambda_j x^j = \sum_{j=1}^k \lambda_j Cx^j = \sum_{j=1}^k \lambda_j y^j,$$

که در آن $y^j = Cx^j$ ، $j = 1, 2, \dots, k$. اثبات بالا برگشت پذیر است و در نتیجه به راحتی می‌توان مثل بحث بالا قضیه نمایش را برای \mathcal{Y} به کار برد. در ضمن برای مطالعه بیشتر می‌توان به منبع [۱۷] و به ویژه فصل ۹ آن مراجعه کرد.

با در نظر گرفتن $\mathcal{P} = \mathcal{Y} + \mathbb{R}_{\geq}^p$ به عنوان فضای هدف توسعه یافته، به وضوح می‌توان ثابت کرد که

$$\mathcal{P} = \{y \in \mathbb{R}^p \mid y \geq \sum_{j=1}^k \lambda_j y^j, \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, k\}.$$

¹Bounded

²Recession direction

³Representation theorem

توجه کنید $\mathcal{Y}_N = \mathcal{P}_N$. از طرف دیگر، می‌دانیم که، نقطه ایده‌آل^۱ مسأله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (۱.۲) عبارت است از $\mathbf{y}^I = (y_1^I, y_2^I, \dots, y_p^I)^T$ ، که در آن

$$\mathbf{y}_k^I = \min \{y_k | \mathbf{y} \in \mathcal{Y}_N\} = \min \{y_k | \mathbf{y} \in \mathcal{Y}\}.$$

یعنی با توجه به تعریف نقطه ایده‌آل، با حل p مسأله بهینه‌سازی به‌راحتی می‌توان نقطه ایده‌آل را به‌دست آورد.

نکته ۳.۲. توجه کنید در این مقاله فرض بر این است که $\mathbf{y}^I \notin \mathcal{Y}$ ، زیرا در غیر این صورت \mathbf{y}^I تنها نقطه نامغلوب \mathcal{Y} خواهد بود و در نتیجه جایی برای بحث در مورد پیدا کردن ابرصفحه‌های نامغلوب یا کارای تعریف کننده \mathcal{Y} یا \mathcal{X} باقی نمی‌ماند و در این حالت که حالت بدیهی نامیده می‌شود، تجزیه وزن‌ها در روش مجموع وزن‌دار بی‌معنی است.

حال به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که

$$\mathbb{V} := \mathcal{P} - \{\mathbf{y}^I\} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^p \mid \mathbf{v} \geq \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{v}^j, \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, k \right\} \subseteq \mathbb{R}_{\geq}^p.$$

جایی که $\mathbf{v}^j = \mathbf{y}^j - \mathbf{y}^I$ ، $j = 1, 2, \dots, k$.

\mathbb{V} کاملاً شبیه \mathcal{P} بوده و در واقع \mathbb{V} انتقال یافته مجموعه \mathcal{P} به اندازه نقطه $-\mathbf{y}^I$ می‌باشد که این کار نیز به‌منظور نامنفی کردن همه اعضای \mathcal{P} صورت گرفته تا نتایج لازم در مورد \mathcal{P} حاصل گردد، به‌عنوان مثال واضح است که $\mathcal{P}_N = \mathbb{V}_N$. با در نظر گرفتن فرم ریاضی \mathbb{V} ، واضح است این مجموعه همان مجموعه امکان تولید^۲ (PPS) T_v در حالت بازده به مقیاس متغیر^۳ (VRS) در تحلیل پوششی داده‌ها^۴ (DEA) است که در آن \mathbf{v}^j ، $j = 1, 2, \dots, k$ ، نقش واحدهای تصمیم‌گیری^۵ (DMUهای) مشاهده شده را دارند به‌طوری‌که هر کدام از این DMUها دارای p ورودی^۶ می‌باشند به‌طوری‌که هیچ خروجی^۷ ندارند (برای مطالعه در مورد DEA و بررسی مطالبی که در ادامه گفته خواهد شد، به مرجع [۱۳] رجوع شود). حال برای شروع بحث، $\mathbf{v}^q \in \mathbb{V}$ را در نظر بگیرید و مسأله اولیه^۸ (۲.۲) و دوگان^۹ متناظر با \mathbf{v}^q ، یعنی مسأله (۳.۲) را به‌صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \theta^q = \min \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{v}^j \leq \theta \mathbf{v}^q, \\ & \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, \end{aligned} \tag{۲.۲}$$

$$\begin{aligned} \theta^q = \max \quad & u_q \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{u}^T \mathbf{v}^j - u_q \geq 0, j = 1, 2, \dots, k, \\ & \mathbf{u}^T \mathbf{v}^q = 1, \\ & \mathbf{u} \geq 0, \quad u_q \text{ آزاد در علامت}. \end{aligned} \tag{۳.۲}$$

¹Ideal

²Production possibility set

³Variable returns to scale

⁴Data envelopment analysis

⁵Decision making unit

⁶Input

⁷Output

⁸Primal

⁹Dual

در مدل (۳.۲) اندیس بالا "T" ترانهاده را نشان می‌دهد. توجه کنید دو مسأله (۲.۲) و (۳.۲) به ترتیب مشابه مدل‌های پوششی و مضربی^۱ BCC در ماهیت ورودی^۲ با بازده به مقیاس متغیر در DEA می‌باشند [۱۳]. قضیه مهم زیر را در مورد مسائل بالا داریم.

قضیه ۴.۲. با فرض اینکه $v^q \in \{v^1, v^2, \dots, v^k\}$ (که در آن $q \in \{1, 2, \dots, k\}$)، آنگاه $0 \leq \theta^q \leq 1$.

اثبات. اولاً واضح است که

$$\lambda_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, j \neq q, \quad \lambda_q = 1, \quad \theta = 1$$

یک جواب شدنی مسأله (۲.۲) می‌باشد، در نتیجه چون مسأله از نوع می‌نیم‌سازی است، پس مقدار بهینه آن کوچکتر یا مساوی یک خواهد بود، یعنی $\theta^q \leq 1$. حال کفایت ثابت کنیم $0 \leq \theta^q$. برای این منظور، به برهان خلف فرض کنید که در نقطه شدنی (λ, θ) ، $\theta < 0$. اولاً چون $y^I \notin \mathcal{L}$ ، لذا $v^j \geq 0$ و $v^j \neq 0$ برای هر $j = 1, 2, \dots, k$. در این صورت با توجه به اینکه $v^q \geq 0$ و $v^q \neq 0$ و $\theta < 0$ ، در نتیجه، $\sum_{j=1}^k \lambda_j v^j \leq 0$ ولی چون $v^j \geq 0$ و $v^j \neq 0$ برای هر $j = 1, 2, \dots, k$ ، پس باید $\lambda_j = 0, j = 1, 2, \dots, k$ که متناقض با $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ می‌باشد. □

نکته ۵.۲. به راحتی می‌توان ثابت کرد که اگر $v^q \in \mathbb{V}$ ، باز هم قضیه بالا برقرار می‌باشد. می‌توان نشان داد که اگر $\theta^q = 1$ ، در این صورت v^q یک نقطه نامغلوب ضعیف \mathbb{V} می‌باشد و اگر علاوه بر اینکه $\theta^q = 1$ ، در هر جواب بهینه مسأله (۲.۲) قیدهای $\sum_{j=1}^k \lambda_j v^j \leq \theta v^q$ به صورت تساوی باشند، یا به عبارت دیگر، اگر مقدار بهینه مسأله زیر صفر باشد، در این صورت v^q یک نقطه نامغلوب \mathbb{V} خواهد بود.

$$\begin{aligned} \beta_q = \max \quad & e^T s \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^k \lambda_j v^j + s = v^q, \\ & \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (4.2)$$

در مسأله (۴.۲)، برداری در \mathbb{R}^p با همه مولفه‌های یک می‌باشد. توجه کنید مدل (۴.۲) حکم مدل جمعی^۳ را در DEA در حالت VRS دارد و اگر مقدار بهینه مسأله (۴.۲) برای $v^q \in \mathbb{V}$ ، یعنی β_q صفر باشد، در این صورت $v^q \in \mathbb{V}_N$ ، در غیر این صورت $v^q \notin \mathbb{V}_N$. همچنین توجه کنید که اگر در مسأله (۳.۲)، علاوه بر اینکه مقدار بهینه برابر یک باشد، یک جواب بهینه (u^*, u_q^*) داشته باشیم که در آن $u^* > 0$ ، لذا $v^q \in \mathbb{V}_N$. از طرف دیگر، واضح است که در هر جواب بهینه مسأله (۳.۲)، حداقل یکی از قیدهای $u^T v^j + u_q \geq 0, j = 1, 2, \dots, k$ ، در بهینگی فعال^۴ (به صورت تساوی) می‌باشد، زیرا که در هر جواب بهینه مسأله (۲.۲)، به دلیل وجود قید $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ ، حداقل یکی از λ_j ها مثبت می‌باشد، پس طبق قضیه مکمل زائد^۵ در برنامه‌ریزی خطی، نتیجه می‌گیریم که قید متناظر آن در مسأله دوگان، یعنی مسأله (۳.۲)، در بهینگی به صورت تساوی یعنی فعال می‌باشد. این

¹Multiplier

²Input-oriented

³Additive model

⁴Active

⁵Complementary slackness theorem

بدان معنی است که برای جواب بهینه (\mathbf{u}^*, u_q^*) ، ابرصفحه $H(\mathbf{u}^*, u_q^*) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^p \mid \mathbf{u}^{*\top} \mathbf{v} - u_q^* = 0\}$ حداقل از یکی از نقاط $\mathbf{v}^j, j = 1, 2, \dots, k$ می‌گذرد و همچنین چون،

$$\mathbf{u}^{*\top} \mathbf{v}^j - u_q^* \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

لذا واضح است که برای هر $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ ،

$$\mathbf{u}^{*\top} \mathbf{v} - u_q^* \geq \sum_{j=1}^k \lambda_j (\mathbf{u}^{*\top} \mathbf{v}^j - u_q^*) \geq 0.$$

این نتیجه می‌دهد \mathbb{V} در یک طرف ابرصفحه $H(\mathbf{u}^*, u_q^*)$ واقع می‌شود و چون این ابرصفحه حداقل از یکی از نقاط \mathbb{V} نیز می‌گذرد، پس $H(\mathbf{u}^*, u_q^*)$ یک ابرصفحه تکیه‌کننده^۱ بر \mathbb{V} می‌باشد. همچنین به راحتی می‌توان ثابت کرد، با فرض اینکه (\mathbf{u}^*, u_q^*) یک جواب بهینه مسأله (۳.۲) باشد، در این صورت ابرصفحه $H(\mathbf{u}^*, u_q^*)$ یک ابرصفحه تکیه‌کننده بر \mathbb{V} فعال در $\theta^q \mathbf{v}^q$ خواهد بود. می‌توان بررسی کرد که در صورت وجود جواب‌های بهینه دگرین^۲ برای مسأله (۳.۲)، می‌توان تعداد نامتناهی ابرصفحه‌های تکیه‌کننده بر \mathbb{V} پیدا کرد که از بین آنها فقط تعداد متناهی ابرصفحه به عنوان ابرصفحه‌های تعریف‌کننده \mathbb{V} می‌باشد.

نکته ۶.۲. دقت کنید اگر $\theta^q = 1$ ، در این صورت $H(\mathbf{u}^*, u_q^*)$ در \mathbf{v}^q فعال می‌باشد، در غیر این صورت در نقطه $\theta^q \mathbf{v}^q$ از \mathbb{V} و همچنین حداقل در یکی از نقاط $\mathbf{v}^j, j = 1, 2, \dots, k$ فعال خواهد بود.

به علاوه، اگر (\mathbf{u}^*, u_q^*) یک جواب بهینه مسأله (۳.۲) باشد، در این صورت ابرصفحه $H(\mathbf{u}^*, u_q^*)$ یک ابرصفحه تعریف‌کننده نامغلوب \mathbb{V} گذرا از $\theta^q \mathbf{v}^q$ خواهد بود اگر و تنها اگر $\mathbf{u}^* > 0$ و (\mathbf{u}^*, u_q^*) یک نقطه رأسی ناحیه شدنی مسأله (۳.۲)، یعنی، $Q_q = \{(\mathbf{u}, u_q) \in \mathbb{R}_{\geq}^p \times \mathbb{R} \mid \mathbf{u}^\top \mathbf{v}^j - u_q \geq 0, j = 1, 2, \dots, k, \mathbf{u}^\top \mathbf{v}^q = 1\}$ باشد. در واقع قضیه زیر را بدون اثبات در حالت کلی بیان می‌کنیم که برای به دست آوردن جزئیات بیشتر در مورد این قضیه و مباحث بالا، [۱۷] را ببینید.

قضیه ۷.۲. فرض کنید (\mathbf{u}^*, u_q^*) یک جواب بهینه مسأله (۳.۲) باشد. در این صورت $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^p \mid \mathbf{u}^{*\top} \mathbf{v} - u_q^* = 0\}$ یک ابرصفحه تعریف‌کننده نامغلوب \mathbb{V} می‌باشد اگر و تنها اگر $\mathbf{u}^* > 0$ و (\mathbf{u}^*, u_q^*) یک نقطه رأسی ناحیه شدنی Q_q باشد.

با مراجعه به [۱۶]، می‌دانیم که برای پیدا کردن همه ابرصفحه‌های تعریف‌کننده نامغلوب \mathbb{V} ، مسأله (۳.۲) را برای \mathbf{v}^q به طوری که $q \in \{1, 2, \dots, k\}$ در نظر گرفته و همه نقاط رأسی بهینه آن با $\mathbf{u}^* > 0$ را برای این مسأله به دست آورده و ضبط می‌کنیم. با فرض اینکه

$$(\mathbf{u}_j, u_q^j), \quad j = 1, 2, \dots, s$$

همه نقاط رأسی بهینه مسأله (۳.۲) با $\mathbf{u}^* > 0$ برای همه $q \in \{1, 2, \dots, k\}$ باشد، در این صورت

$$\{\mathbf{u}_j^\top \mathbf{v} - u_q^j = 0 \mid j = 1, 2, \dots, s\}$$

مجموعه همه ابرصفحه‌های تعریف‌کننده نامغلوب \mathbb{V} می‌باشد. به عبارت دیگر،

$$\mathbb{V} \subseteq \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^p \mid \mathbf{u}_j^\top \mathbf{v} - u_q^j \geq 0, j = 1, 2, \dots, s\}.$$

در واقع با روش بالا می‌توان همه ابرصفحه‌های تعریف‌کننده نامغلوب \mathbb{V} را به دست آورد که همراه با ابرصفحه‌های تعریف‌کننده نامغلوب ضعیف \mathbb{V} (ابرفصحه‌هایی که موازی محورهای مختصات می‌باشند)، یعنی ابرصفحه‌هایی با معادلات

$$\mathbf{u}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

¹Supporting

²Alternative

کلیه ابرصفحه‌های تعریف‌کننده \mathbb{V} را تشکیل می‌دهند که بدون آنکه به کلیت خللی وارد شود می‌توان فرض کرد که $\{u_j^T v - u_q^j = 0 \mid j = 1, 2, \dots, l\}$ مجموعه همه ابرصفحه‌های تعریف‌کننده \mathbb{V} باشد که در آن $l > s$ ، به عبارت دیگر

$$\mathbb{V} = \{v \in \mathbb{R}^p \mid u_j^T v - u_q^j \geq 0, j = 1, 2, \dots, l\}.$$

حال با توجه به اینکه معادله همه ابرصفحه‌های تعریف‌کننده \mathbb{V} را داریم، بنابراین، در ادامه با استفاده از بردار گرادیان یا نرمال این ابرصفحه‌ها روشی را برای تجزیه وزن‌ها در روش مجموع وزن‌دار ارائه می‌دهیم. برای توضیح بیشتر در جزئیات و ارائه روش، ابتدا مسأله مجموع وزن‌دار زیر را برای مسأله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (۱.۲) در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{LP}(w) : \quad & \min \quad w^T Cx \\ & \text{s.t.} \quad Ax = b \\ & \quad \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \text{LP}_1(w) : \quad & \min \quad w^T y \\ & \text{s.t.} \quad y \in \mathcal{Y} \end{aligned}$$

با توجه به [۱۴]، $\hat{y} \in \mathcal{Y} / \hat{x} \in \mathcal{X}$ یک نقطه کارا/نامغلوب (ضعیف) مسأله (۱.۲) است اگر و تنها اگر $w \in \Lambda = \{w \in \mathbb{R}^p \mid 1^T w = 1\}$ طوری وجود داشته باشد که برای $w > 0$ ($w \geq 0$)، \hat{y} / \hat{x} یک جواب بهینه مسأله $\text{LP}_1(w) / \text{LP}(w)$ باشد. همچنین واضح است که $\hat{v} = \hat{y} - y^l \in \mathbb{V}$ یک نقطه نامغلوب (ضعیف) \mathbb{V} است اگر و تنها اگر $w \in \Lambda$ وجود داشته باشد به طوری که برای $w > 0$ ($w \geq 0$)، \hat{v} جواب بهینه مسأله (۵.۲) باشد،

$$\begin{aligned} \min \quad & w^T v \\ \text{s.t.} \quad & v \in \mathbb{V} \end{aligned} \quad (5.2)$$

در حقیقت، بحث بالا بدین معنی است که برای به دست آوردن همه نقاط نامغلوب ضعیف، باید همه وزن‌های در $\{w \in \mathbb{R}_{\geq}^p \mid 1^T w = 1\}$ را در نظر گرفته و مسأله (۵.۲) را به‌ازای همه این پارامترها حل کرده و بدین صورت همه نقاط نامغلوب ضعیف و وزن‌های متناظرشان به دست می‌آید. لذا تجزیه وزن‌ها در فضای مورد ذکر می‌تواند مهم‌ترین بحث در حل مسأله بهینه‌سازی چندهدفه با روش مجموع وزن‌دار باشد. حال برای ارائه روشی در این مورد، ابتدا قضیه زیر از برنامه‌ریزی خطی که اساس روش ما برای تجزیه وزن‌ها می‌باشد، را بدون اثبات بیان می‌کنیم که در واقع نتیجه‌ای از شرایط KKT^۱ در برنامه‌ریزی خطی است، بدین صورت که یک نقطه بهینه است اگر و تنها اگر در آن نقطه بردار گرادیان تابع هدف در مخروط تولید شده توسط بردارهای گرادیان ابرصفحه‌های فعال در آن نقطه قرار گیرد [۳].

قضیه ۸.۲. فرض کنید وزن w داده شده باشد و $F_w^* \subseteq \mathbb{V}$ رویه بهینه مسأله (۵.۲) برای وزن داده شده باشد که در آن $J_{F_w^*} = \{j \mid u_j^T v - u_q^j = 0, \forall v \in F_w^*\}$. در این صورت، رویه F_w^* بهینه می‌باشد اگر و تنها اگر

$$w \in \text{pos}\{(u_j) \mid j \in J_{F_w^*}\}$$

(توجه کنید که $\text{pos}\{(u_j) \mid j \in J_{F_w^*}\}$ پوسته نامنفی یا شامل همه ترکیبات نامنفی بردارهای گرادیان ابرصفحه‌های فعال در همه نقاط F_w^* می‌باشد).

نکته ۹.۲. توجه کنید برای $F^* \subseteq \mathbb{V}$ داده شده، J_{F^*} مجموعه اندیس ابرصفحه‌های تعریف‌کننده فعال در همه نقاط F^* را نشان می‌دهد.

همان‌طور که اشاره شد، قضیه بالا بیان می‌کند در همه نقاط بهینه، بردار گرادیان تابع هدف همواره بین بردارهای گرادیان ابرصفحه‌های تعریف‌کننده فعال در آن نقاط قرار می‌گیرد که این اساس روش ما را برای تجزیه وزن‌ها در روش مجموع وزن‌دار تشکیل می‌دهد. در واقع برای تجزیه کردن فضای وزن‌ها در روش مجموع وزن‌دار، کافیست

^۱Karush-Kuhn-Tucker

برای هر نقطه $v^q \in \{v^1, v^2, \dots, v^k\}$ ، مسأله (۳.۲) را حل کنیم و سپس نقاط بهینه رأسی با $u^* > 0$ را برای هر کدام از این مسائل به دست آوریم و بدین صورت ابرصفحه‌های تعریف کننده نامغلوب \mathbb{V} به دست می‌آیند. سپس در ادامه، ابرصفحه‌های تعریف کننده نامغلوب ضعیف $u_i = 0, i = 1, 2, \dots, p$ را نیز به ابرصفحه‌های تعریف کننده نامغلوب اضافه می‌کنیم، بدین صورت همه ابرصفحه‌های تعریف کننده \mathbb{V} و بردارهای گرادیان آنها را داریم. بعد از مشخص کردن بردارهای گرادیان همه ابرصفحه‌های تعریف کننده \mathbb{V} ، وزن‌های موردنظر روش مجموع وزن‌دار را در پوسته نامنفی بردار گرادیان ابرصفحه‌های تعریف کننده \mathbb{V} قرار می‌دهیم و بدین صورت فضای وزن‌ها تجزیه می‌شود.

نکته ۱۰.۲. توجه کنید می‌توان به راحتی بررسی کرد که ابتدا با مدل (۴.۲) نامغلوب بودن یا نبودن v^q را می‌توان تشخیص داد و در صورت نامغلوب بودن آن به دنبال پیدا کردن جواب‌های بهینه رأسی مسأله (۳.۲) متناظر با v^q گشت و در صورت نامغلوب نبودن v^q ، حل مسأله (۳.۲) و پیدا کردن جواب‌های بهینه رأسی آن کار اضافی می‌باشد که موجب تحمیل هزینه محاسباتی زیاد به الگوریتم خواهد بود. شایان ذکر است برای پیدا کردن ابرصفحه‌های نامغلوب \mathbb{V} ، می‌توانیم مسأله (۳.۲) را فقط برای نقاط نامغلوب رأسی v^q برای \mathbb{V} در نظر گرفته و حل کنیم.

حال الگوریتم را برای پیدا کردن ابرصفحه‌های تعریف کننده \mathbb{V} و سپس تجزیه وزن‌ها بیان می‌کنیم (الگوریتم ۱).

۳ مثال عددی

در این بخش یک مثال بهینه‌سازی دوهدفه ساده را جهت توضیح دادن الگوریتم ارائه شده در این مقاله به صورت هندسی مورد بحث قرار می‌دهیم.

مثال ۱.۳. مسأله دوهدفه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + x_2 \\ \min \quad & -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_2 \leq 3, \\ & 3x_1 - x_2 \leq 6, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{۱.۳}$$

شکل‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ به ترتیب مجموعه‌های \mathcal{X} ، \mathcal{V} ، $P = \mathcal{V} + \mathbb{R}_{\geq}^2$ و نقاط رأسی آنها را نشان می‌دهد.

الگوریتم ۱ تجزیه فضای وزن‌ها در روش مجموع وزن‌دار

۱. یک مسأله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه، با ماتریس هدف C ، ماتریس قید A و بردار سمت راست b را در نظر بگیرید و قرار دهید $H = \emptyset$. به مرحله ۲ بروید.
۲. نقاط رأسی مجموعه شدنی \mathcal{X} ، یعنی، x^1, x^2, \dots, x^k را به دست آورید. سپس به مرحله ۳ بروید.
۳. نقطه ایده‌آل y^T را برای مسأله (۱.۲) و سپس $v^j = Cx^j - y^T, j = 1, 2, \dots, k$ ، برای \mathcal{X} محاسبه نمایید و به مرحله ۴ بروید.
۴. مسأله (۴.۲) را برای v^1, v^2, \dots, v^k حل کنید و از بین آنها نقاط نامغلوب را مشخص کنید و آنها را در مجموعه E ذخیره کنید و همچنین قرار دهید $F := E$ و به مرحله ۵ بروید.
۵. $v^q \in F$ را در نظر بگیرید و مسأله (۳.۲) متناظر آن را حل کنید و جواب‌های بهینه رأسی (u^*, u_q^*) با $u^* > 0$ را محاسبه کنید و این بردارها را همراه با بردار گرادیان ابرصفحه‌های تعریف‌کننده نامغلوب ضعیف فعال در v^q در G_q قرار دهید (شایان ذکر است که طرز پیدا کردن همه جواب‌های بهینه رأسی از روی جدول بهینه از طریق انجام حداکثر r گام روش سیمپلکس قابل حصول است که در آن r در بدترین حالت برابر با تعداد محدودیت‌های مسأله است). سپس با استفاده از اعضای G_q و ابرصفحه‌های نامغلوب ضعیف به دست آمده، فرض کنید H_q مجموعه ابرصفحه‌های تعریف‌کننده فعال در v^q باشد. یعنی فرض کنید،

$$H_q := \{u^{*T}v - u_q^* = 0 \mid (u^*, u_q^*) \in G_q\}.$$

- همچنین قرار دهید $H := H \cup H_q, F := F \setminus \{v^q\}$ و به مرحله ۶ بروید.
۶. اگر $F = \emptyset$ ، به مرحله ۷ بروید، در غیر این صورت مرحله ۵ را تکرار کنید.
۷. اگر $E = \emptyset$ ، به مرحله ۸ بروید، در غیر این صورت $v^q \in E$ را انتخاب کنید و w متناظر آن را در مخروط تولید شده توسط بردارهای گرادیان ابرصفحه‌های تعریف‌کننده فعال در v^q ، یعنی G_q ، قرار دهید. یعنی با فرض اینکه G_q به صورت

$$G_q = \left\{ (u_1^*, u_{q1}^*), (u_2^*, u_{q2}^*), \dots, (u_{t_q}^*, u_{qt_q}^*) \right\} = \bigcup_{j=1}^{t_q} \{(u_j^*, u_{qj}^*)\}$$

باشد، قرار دهید

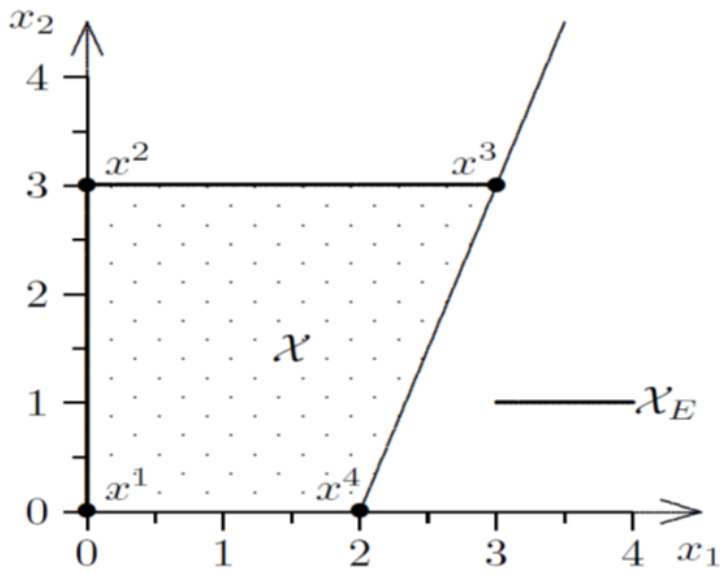
$$w = \sum_{j=1}^{t_q} \alpha_j u_j^*,$$

$$\sum_{j=1}^{t_q} \alpha_j = 1,$$

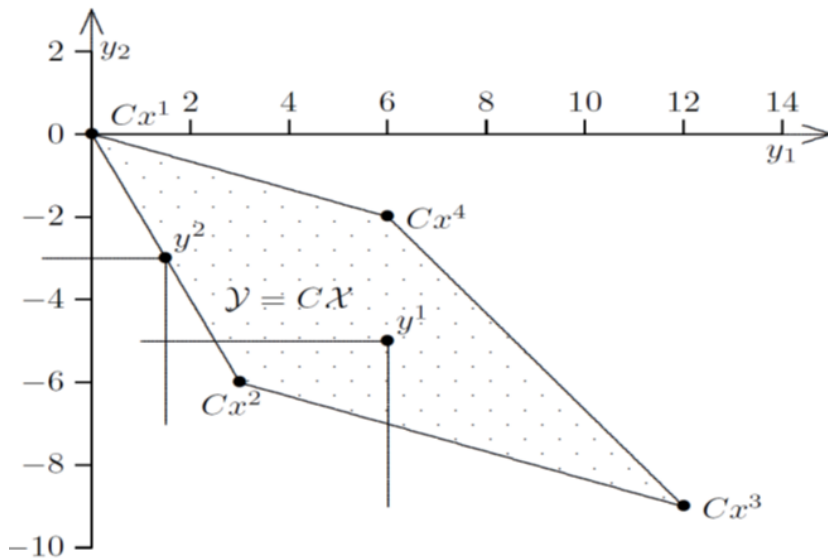
$$\alpha_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, t_q$$

و مقدار w را مشخص کنید و در فضای وزن‌ها رسم نمایید. سپس قرار دهید $E := E \setminus \{v^q\}$ و مرحله ۷ را تکرار نمایید.

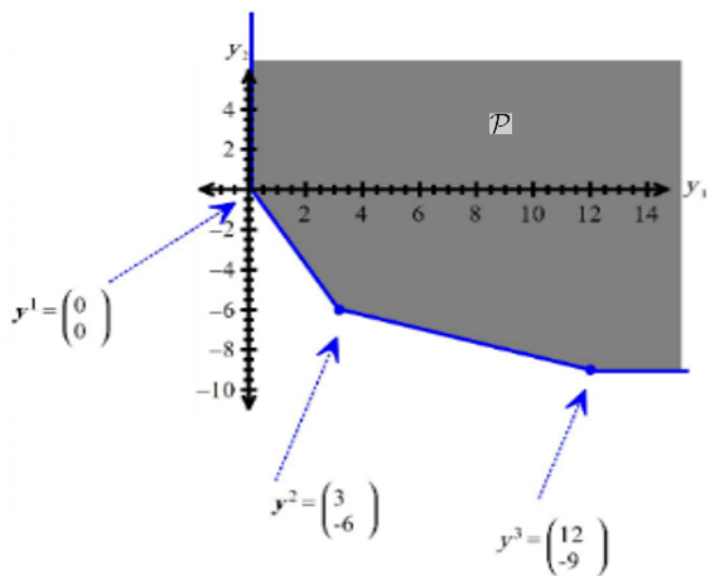
۸. با مقادیر مشخصی که در مرحله ۷ برای وزن‌ها به دست آمده، به راحتی تجزیه وزن‌ها در فضای وزن‌ها مشخص می‌شود و بدین صورت به راحتی می‌توان وزن‌ها و نقاط یا رویه‌های بهینه متناظرشان را در این الگوریتم مشخص کرد.



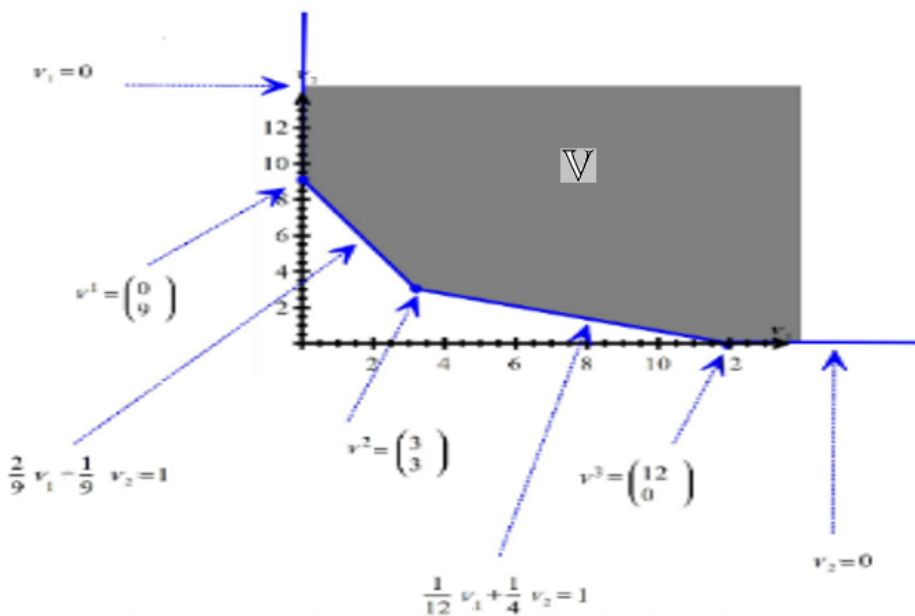
شکل ۱: مجموعه \mathcal{X}



شکل ۲: مجموعه \mathcal{Y}



شکل ۳: ناحیه P



شکل ۴: ناحیه V

اجرای الگوریتم:

مرحله ۱. مسأله بهینه‌سازی دوهدفه (۱.۳) را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم، $H = \emptyset$.
مرحله ۲. نقاط رأسی \mathcal{X} عبارت است از:

$$\mathcal{X}_P = \{\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} \cdot \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 2 \\ \cdot \end{pmatrix}\}.$$

مرحله ۳. نقطه ایده‌آل عبارت است از $\mathbf{y}^I = \begin{pmatrix} \cdot \\ -9 \end{pmatrix}$. مجموعه نقاط رأسی \mathcal{Y} به صورت \mathcal{Y}_P زیر است که نقاط متناظر آنها نیز در \mathbb{V}_P نشان داده شده است.

$$\mathcal{Y}_P = \{\mathbf{y}^j = \mathbf{C}\mathbf{x}^j | j = 1, 2, 3, 4\} = \{\mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, \mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^3 = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^4 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}\}$$

و

$$\mathbb{V}_P = \{\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} \cdot \\ 9 \end{pmatrix}, \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} 12 \\ \cdot \end{pmatrix}, \mathbf{v}^4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}\}$$

که در آن

$$\mathbf{v}^j = \mathbf{C}\mathbf{x}^j - \mathbf{y}^I = \mathbf{y}^j - \mathbf{y}^I, j = 1, 2, 3, 4.$$

مرحله ۴. با حل مسأله (۴.۲) برای $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3$ و \mathbf{v}^4 ، به ترتیب مقادیر بهینه زیر را داریم:

$$\beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0, \beta_4 > 0,$$

که نشان می‌دهد $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3 \in \mathbb{V}_N$ و در نتیجه $E = \{\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} \cdot \\ 9 \end{pmatrix}, \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} 12 \\ \cdot \end{pmatrix}\}$ و $F := E$.

تکرار ۱:

مرحله ۵. حال $\mathbf{v}^1 \in F$ را انتخاب می‌کنیم و با حل مسأله (۳.۲) متناظر با این نقطه، یعنی،

$$\begin{aligned} \theta^1 &= \max u_q \\ \text{s.t.} \quad & 9u_2 - u_q \geq 0, \\ & 3u_1 + 3u_2 - u_q \geq 0, \\ & 12u_1 - u_q \geq 0, \\ & 9u_2 = 1 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

مقدار بهینه $\theta^1 = 1$ و جواب بهینه رأسی $(u_1^*, u_2^*, u_q^*) = (\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, 1)$ به دست می‌آید که بردار گرادیان

$$(u_1^*, u_2^*) = \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{9}\right)$$

را نتیجه می‌دهد که همراه با بردار گرادیان $(1, 0)$ ، مجموعه بردارهای گرادیان ابرصفحه‌های فعال و مجموعه ابرصفحه‌های تعریف‌کننده فعال در \mathbf{v}^1 را به صورت زیر تشکیل می‌دهند، لذا،

$$G_1 = \left\{ \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{9}\right), (1, 0) \right\}, H_1 = \left\{ \frac{2}{9}v_1 + \frac{1}{9}v_2 - 1 = 0, v_1 = 0 \right\}.$$

حال قرار می‌دهیم،

$$H := H \cup H_1 = \left\{ \frac{2}{9}v_1 + \frac{1}{9}v_2 - 1 = 0, u_1 = 0 \right\}$$

و

$$F := F \setminus \{\mathbf{v}^1\} = \left\{ \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} 12 \\ \cdot \end{pmatrix} \right\}.$$

مرحله ۶. چون $F \neq \emptyset$ ، به مرحله ۵ می‌رویم.

تکرار ۲:

مرحله ۵. حال $v^2 \in F$ را انتخاب می‌کنیم و با حل مسأله (۳.۲) متناظر با این نقطه، یعنی،

$$\begin{aligned} \theta^2 = \max \quad & u_q \\ \text{s.t.} \quad & 9u_2 - u_q \geq 0, \\ & 3u_1 + 3u_2 - u_q \geq 0, \\ & 12u_1 - u_q \geq 0, \\ & 3u_1 + 3u_2 = 1, \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

مقدار بهینه $\theta^2 = 1$ و جواب‌های بهینه رأسی $(\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, 1)$ و $(\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, 1)$ به دست می‌آیند که این نتیجه می‌دهد

$$G_2 = \left\{ \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{9} \right), \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{4} \right) \right\}, H_2 = \left\{ \frac{2}{9}v_1 + \frac{1}{9}v_2 - 1 = 0, \frac{1}{12}v_1 + \frac{1}{4}v_2 - 1 = 0 \right\}.$$

مجدداً قرار می‌دهیم،

$$H := H \cup H_2 = \left\{ \frac{2}{9}v_1 + \frac{1}{9}v_2 - 1 = 0, v_1 = 0, \frac{1}{12}v_1 + \frac{1}{4}v_2 - 1 = 0 \right\}$$

و

$$F := F \setminus \{v^2\} = \{v^3\}.$$

تکرار ۳:

مرحله ۵. دوباره $v^3 \in F$ را انتخاب می‌کنیم و با حل مسأله (۳.۲) متناظر با این نقطه، یعنی،

$$\begin{aligned} \theta^3 = \max \quad & u_q \\ \text{s.t.} \quad & 9u_2 - u_q \geq 0, \\ & 3u_1 + 3u_2 - u_q \geq 0, \\ & 12u_1 - u_q \geq 0, \\ & 12u_1 = 1, \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

مقدار بهینه $\theta^3 = 1$ و جواب بهینه رأسی $(\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, 1)$ به دست می‌آید که همراه با ابرصفحه تعریف‌کننده نامغلوب ضعیف $w_2 = 0$ ، مجموعه ابرصفحه‌های تعریف‌کننده به همراه مجموعه بردارهای گرادیان‌های آنها به صورت زیر برای v^3 مشخص می‌گردند.

$$G_3 = \left\{ \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{4} \right), (0, 1) \right\}, H_3 = \left\{ \frac{1}{12}v_1 + \frac{1}{4}v_2 - 1 = 0, v_2 = 0 \right\}.$$

مجدداً قرار می‌دهیم،

$$H := H \cup H_3 = \left\{ \frac{2}{9}v_1 + \frac{1}{9}v_2 - 1 = 0, v_1 = 0, \frac{1}{12}v_1 + \frac{1}{4}v_2 - 1 = 0, v_2 = 0 \right\}$$

و

$$F := F \setminus \{v^3\} = \emptyset.$$

مرحله ۶. چون $F = \emptyset$ ، به مرحله ۷ می‌رویم.

مرحله ۷. واضح است که مسأله مجموع وزن‌دار برای مسأله بهینه‌سازی ارائه شده در این مثال، عبارت است از:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & w_1v_1 + w_2v_2 \\ \text{s.t.} \quad & (v_1, v_2)^t \in \mathbb{V}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

حال باید وزن‌های $w_1, w_2 \geq 0$ با $w_1 + w_2 = 1$ را برای به‌دست آوردن همه نقاط بهینه مسأله (۲.۳) و بنابراین برای به‌دست آوردن همه نقاط کارا یا نامغلوب مورد بحث قرار می‌دهیم. واضح است اگر

$$(w_1, w_2)^T \in \text{pos} \left\{ (1, 0)^T, \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{9} \right)^T \right\},$$

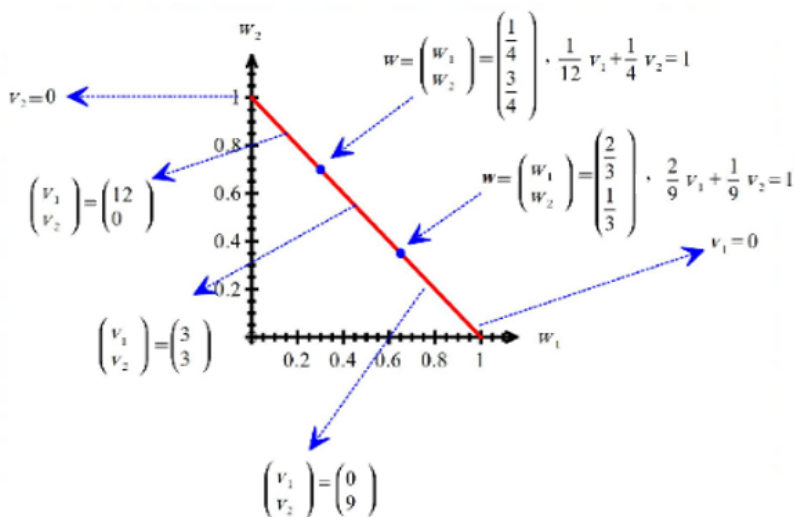
آنگاه نقطه رأسی $(0, 9)^T$ ، جواب بهینه مسأله (۲.۳) خواهد بود، که از آن $(w_1, w_2)^T = \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{9} \right)^T$ به‌دست می‌آید، که در شکل ۵ در فضای وزن $\Lambda = \{(w_1, w_2)^T \mid w_1 + w_2 = 1, w_1, w_2 \geq 0\}$ رسم شده است. همچنین، اگر

$$(w_1, w_2)^T \in \text{pos} \left\{ \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{9} \right)^T, \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{4} \right)^T \right\},$$

آنگاه نقطه رأسی $(3, 3)^T$ و اگر

$$(w_1, w_2)^T \in \text{pos} \left\{ \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{4} \right)^T, (0, 1)^T \right\},$$

آنگاه نقطه رأسی $(12, 0)^t$ جواب بهینه مسأله (۲.۳) خواهد بود، که مقادیر وزن‌های متناظر آنها نیز در شکل ۵ نشان داده شده است. در واقع شکل ۵ فضای وزن‌ها و رویه‌های کارای بهینه متناظر آنها را برای مسأله (۲.۳) نشان می‌دهد.



شکل ۵: تجزیه فضای وزن‌های مسأله (۲.۳)

۴ نتیجه و جمع‌بندی

روش مجموع وزن‌دار یکی از روش‌های اسکالرسازی و شاید مهم‌ترین آنها برای حل یک مسأله بهینه‌سازی چندهدفه می‌باشد. این روش یکی از ساده‌ترین روش‌ها برای حل یک مسأله بهینه‌سازی چندهدفه است. در این مقاله ضمن اینکه روشی برای پیدا کردن همه ابرصفحه‌های کارا (ی ضعیف) ارائه می‌شود، روشی برای تجزیه فضای وزن‌ها ارائه می‌شود که می‌تواند در مباحث چندهدفه کاربرد بسیاری داشته باشد. علاوه بر ارائه یک روش هر چند NP - سخت برای تجزیه وزن‌ها در روش مجموع وزن‌دار، یکی دیگر از مزایای این مقاله بیان یک ارتباط بین مسائل بهینه‌سازی خطی چندهدفه و تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد که می‌تواند منجر به بحث‌های جالب‌تری در مورد این دو زمینه گردد. در ضمن، به‌عنوان کارهای آتی، می‌توان روش موردنظر در این مقاله را در حضور قیدهای غیرخطی توسعه داد.

مراجع

- [1] M. J. Alves and J. P. Costa, Graphical exploration of the weight space in three-objective mixed integer linear programs, *Eur. J. Oper. Res.*, 248(2016), 72-83.
- [2] Y. Aneja and P. K. Nair, Bicriteria transportation problem, *Manage. Scienc.*, 25(1979), 73-78.
- [3] M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis and H. D. Sherali, *Linear programming and network flows*, John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey (2010).
- [4] H. P. Benson and E. Sun, A weight set decomposition algorithm for finding all efficient extreme points in the outcome set of a multiple objective linear program, *Eur. J. Oper. Res.*, 139(2002), 26-41.
- [5] H. P. Benson and E. Sun, Outcome space partition of the weight set in multiobjective linear programming, *J. Optim. Theory Appl.*, 105(2000), 17-36.
- [6] N. Bianco, S. Busiello, M. Iasiello and G. M. Mauro, Finned heat sinks with phase change materials and metal foams: Pareto optimization to address cost and operation time, *Appl. Therm. Eng.*, 197(2021), 117436.
- [7] M. Botte and S. Schabel, Dominance for multi-objective robust optimization concepts, *Eur. J. Oper. Res.*, 273(2019), 430-440.
- [8] T. V. Brasch, K. H. Grini, M. B. Johnsen and T. C. Vigtel, An exact additive decomposition of the weighted arithmetic mean, *Econ. Stor.*, 994(2021), 1-21.
- [9] S. C. Cerda-Flores, A. A. Rojas-Punzo and F. Napoles-Rivera, Applications of Multi-Objective Optimization to Industrial Processes: A Literature Review, *Processes*, 10(2022), 133.
- [10] T. C. Y. Chan, T. Craig, T. Lee and M. B. Sharpe, Generalized inverse multiobjective optimization with application to cancer therapy, *Oper. Res.*, 62(2014), 680-695.
- [11] H. Charkhgard, M. Savelsbergh and M. Talebian, Nondominated nash points: application of biobjective mixed integer programming, *Quart. J. Oper. Res.*, 16(2018), 151-171.
- [12] J. L. Cohon, *Multiobjective programming and planning*, Dover Books on Computer Science. Dover, Mineola (2004).
- [13] W. W. Cooper, L. M. Seiford and K. Tone, *Introduction to data envelopment analysis and its uses: with DEA-solver software and references*, Springer Science & Business Media, 2006.

- [14] M. Ehrgott, *Multicriteria optimization*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2005).
- [15] P. Halffmann, T. Dietz, A. Przybylski and S. Ruzika, An inner approximation method to compute the weight set decomposition of a triobjective mixed-integer problem, *J. Global Optim.*, 77(2020), 715-742.
- [16] G. R. Jahanshahloo, A. Shirzadi and S. M. Mirdehghan, Finding strong defining hyperplanes of PPS using multiplier form, *Eur. J. Oper. Res.*, 194(2009), 933-938.
- [17] D. T. Luc, *Multiobjective linear programming: an introduction*. Springer International Publishing (2016).
- [18] R. T. Marler and J. S. Arora, Survey of multi-objective optimization methods for engineering, *Struct. Multidiscip. Optim.*, 26(2004), 369-395.
- [19] J. Men, G. Chen, L. Zhou and P. Chen, A pareto-based multi-objective network design approach for mitigating the risk of hazardous materials transportation, *Process Saf. Environ. Protect.*, 161(2022), 860-875.
- [20] N. R. Mohamad, M. H. F. M. Fauadi, F. A. Jafar, A. Z. M. Noor and M. H. Nordin, Simulation based multi-objective optimization for distributed material transportation system, *Int. J. En. and Tech.*, 7(2018), 92-94.
- [21] K. Nozad, S. M. Varedi-Koulaei and M. Nazari, The MOEO algorithm for multi-objective optimization of the cancer immuno-chemotherapy, *Comp. in Biol. Med.*, 182(2024), 109094.
- [22] O. Özpeynirci and M. Köksalan, An exact algorithm for finding extreme supported nondominated points of multiobjective mixed integer programs, *Manage. Sci.*, 56(2010), 2302–2315 .
- [23] H. Wang, Z. Xie, L. Pu, Z. Ren, Y. Zhang and Z. Tan, Energy management strategy of hybrid energy storage based on Pareto optimality, *Appl. Energy.*, 327(2022), 120095.
- [24] P. L. Yu and M. Zeleny, The set of all nondominated solutions in linear cases and a multicriteria simplex method, *J. Math. Anal. Appl.*, 49(1975), 430–468.
- [25] L. Zadeh, Optimality and non-scalar-valued performance criteria, *IEEE Trans. Autom. Control*, 8(1963), 59–60.
- [26] C. C. Zhou, G. F. Yin and X. B. Hu, Multi-objective optimization of material selection for sustainable products: artificial neural networks and genetic algorithm approach, *Mater. Des.*, 30(2009), 1209-1215.