



Kharazmi
University

Mathematical Research

Year 2026, Volume 11, Issue 4, pp. 114–136

Print ISSN: 2588-2546

Online ISSN: 2588-2554

DOI: xxxx

Numerical Solution of the Variable-Order Fractional Burger's Equation Using a Hybrid Spectral Element Method with Adaptive Penalty Rate and Crank-Nicolson Leap-Frog Scheme

Payam Mokhtary⁽¹⁾¹ Negisa Ayazi⁽²⁾

^{(1),(2)} Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Sahand University of Technology, Tabriz, Iran.

Received: 3 October 2025 Accepted: 21 December 2025 Published online: 25 February 2026

Abstract: The primary objective of this study is to develop a hybrid numerical scheme for approximating the solutions of the one-dimensional fractional Burgers' equation governed by a variable-order Riemann–Liouville derivative. In the proposed framework, spatial discretization is accomplished via a spectral element method based on the collocation approach, whereas temporal discretization is handled using a Crank–Nicolson Leap-Frog scheme. To enhance the stability of the derivative matrix resulting from the spectral element formulation, an adaptive penalty enforcement strategy is employed, wherein the penalty coefficient is dynamically adjusted in response to the local variations in the fractional derivative order. The accuracy, stability, and computational efficiency of the proposed method are validated through a series of numerical experiments, demonstrating its robustness and effectiveness across diverse test cases.

Keywords: Variable-Order Fractional Burger's equation, Spectral Element Method, Adaptive Penalty, Crank-Nicolson Leap-Frog Scheme.



©2026 Kharazmi University, Tehran, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

¹Corresponding author

E-mail addresses: (Payam Mokhtary) mokhtary@sut.ac.ir, (Negisa Ayazi) Ne_ayazi98.ac.ir



شاپا چاپی: ۲۵۸۸-۲۵۴۶

شاپا الکترونیکی: ۲۲۸۸-۲۵۵۴

DOI: xxxx

پژوهش‌های ریاضی

سال ۱۴۰۴، دوره ۱۱، شماره ۴، ص ۱۱۴-۱۳۶

حل عددی معادله برگرز کسری از مرتبه متغیر با ترکیب روش‌های المان طیفی دارای نرخ جریمه تطبیقی و کرانک-نیکلسون لیپ‌فراگ

پیام مختاری^(۱) و نگیسا ایازی^(۲)

(۱)،(۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران

تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۱۲/۷

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۹/۳۰

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۷/۱۲

چکیده: هدف از این مقاله ارائه یک رویکرد عددی ترکیبی به منظور تقریب جواب‌های معادله برگرز کسری یک بعدی مبتنی بر مشتق ریمان لیوویل از مرتبه متغیر می‌باشد. الگوریتم عددی مد نظر طوری طراحی گردیده است که برای گسسته‌سازی مکانی از روش المان طیفی بر پایه رویکرد هم‌مکانی و برای گسسته‌سازی زمانی از رویکرد کرانک-نیکلسون لیپ‌فراگ استفاده می‌شود. به علاوه، به منظور پایداری ماتریس مشتق بدست آمده از پیاده‌سازی رویکرد المان طیفی، تکنیک اعمال نرخ جریمه تطبیقی پیشنهاد می‌شود که در آن ضریب جریمه به صورت پویا و براساس تغییرات موضعی مرتبه مشتق کسری تنظیم می‌شود. کارایی رویکرد اتخاذ شده توسط مثال‌های متنوع بررسی و در تمامی موارد دقت بالا، پایداری و کارایی محاسباتی روش پیشنهادی تایید شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: معادله برگرز کسری از مرتبه متغیر، روش المان طیفی، جریمه تطبیقی، روش کرانک-نیکلسون لیپ‌فراگ.

۱ مقدمه

معادلات دیفرانسیل کسری با مرتبه متغیر به دلیل قابلیت منحصر به فردشان در مدل‌سازی دینامیک‌های پیچیده با ویژگی‌های غیرموضعی، اثرات حافظه‌ای طولانی مدت و وابستگی‌های پویا به مکان یا زمان، جایگاه برجسته‌ای در

علوم محاسباتی و مهندسی یافته‌اند. برخلاف معادلات کسری با مرتبه ثابت که در آن‌ها مرتبه مشتق در سراسر دامنه یکنواخت است، این معادلات امکان تنظیم موضعی مرتبه مشتق را فراهم می‌کند و بدین ترتیب انعطاف‌پذیری بالایی در توصیف سیستم‌های ناهمگن و پدیده‌های انتقال با حافظه و نفوذ متغیر در مکان و زمان عرضه می‌نمایند. این ویژگی‌ها معادلات مذکور را به ابزاری مناسب برای مدل‌سازی پدیده‌هایی مانند نفوذ غیرعادی، بررسی رفتارهای ویسکوالاستیک مواد پیشرفته، بررسی جریان سیالات در رسانه‌های متخلخل ناهمگن، مدل‌سازی‌های پیچیده در تغییرات نوسانی بازارهای مالی و فرآیندهای بیولوژیکی نظیر انتشار دارو در بافت‌های زنده تبدیل کرده‌اند [۴-۶، ۱۰، ۲۴، ۲۵]. علاوه بر این، چنین معادلاتی در تحلیل سیستم‌هایی با تغییرات پویا در خواص ماده مانند انتقال حرارت در مواد کامپوزیتی یا دینامیک‌های جمعیتی با اثرات حافظه متغیر، برتری قابل توجهی نسبت به مدل‌های کلاسیک نشان می‌دهند [۱۵، ۲۷]. این قابلیت به ویژه در مسائل غیرخطی با ناپیوستگی‌های موضعی یا رفتارهای تکین از اهمیت بسزایی برخوردار است.

معادله برگرز کسری به‌عنوان یک مدل ریاضی کلیدی برای توصیف پدیده‌های غیرخطی با رفتار غیرمحلی، مانند انتشار امواج شوک‌دار در محیط‌های با حافظه در حوزه‌های مختلفی از جمله دینامیک سیالات، مواد ویسکوالاستیک و انتقال غیرعادی کاربرد دارد [۱، ۱۱، ۲۶]. برخلاف معادله برگرز کلاسیک که شامل مشتق‌های مرتبه صحیح است، نسخه کسری این معادله با مشتق‌های کسری تعریف می‌شود. این تعمیم امکان مدل‌سازی سیستم‌های پویا با نرخ انتشار وابسته به زمان و مکان را فراهم می‌کند، اما چالش‌های محاسباتی قابل توجهی را به دلیل غیرموضعی بودن عملگرهای کسری و پیچیدگی‌های ناشی از غیرخطی بودن ایجاد می‌نماید.

با وجود پیشرفت‌های نظری چشمگیر در فرمول‌بندی این معادلات، حل عددی آن‌ها با چالش‌های محاسباتی عمیقی همراه است. ماهیت غیرموضعی عملگرهای کسری که ریشه در وابستگی‌های حافظه‌ای و تعاملات گسترده در دامنه دارد، همراه با پیچیدگی‌های ناشی از تغییرات پیوسته یا ناپیوسته در مرتبه مشتق، طراحی روش‌های عددی کارآمد را به یک مسئله اساسی تبدیل کرده است. تولید ماتریس‌های پر با عدد وضیعت بالا که منجر به ناپایداری عددی و هزینه‌های محاسباتی بالا می‌شود و همچنین مدیریت تکینگی‌ها در نزدیکی مرزها شامل این چالش‌ها هستند. روش‌های عددی سنتی مانند روش‌های تفاضل متناهی [۲۰-۲۳، ۲۸، ۲۹] و روش‌های المان محدود [۹، ۱۲، ۱۴، ۱۹، ۳۱، ۳۸]، اگرچه در معادلات دیفرانسیل کلاسیک موفق بوده‌اند، در مواجهه با معادلات کسری مرتبه متغیر اغلب با محدودیت‌هایی نظیر کاهش نرخ همگرایی، ناپایداری در تقریب‌های غیرموضعی و ناکارآمدی از منظر حافظه روبرو می‌شوند. برای نمونه روش‌های تفاضل متناهی به ماتریس‌هایی منجر می‌شوند که حل آن‌ها در مقیاس‌های بزرگ از نظر زمانی و حافظه‌ای پرهزینه است [۳۵]. و روش‌های المان محدود هرچند در هندسه‌های پیچیده انعطاف‌پذیرترند ولی در مدیریت رفتارهای غیرهموار یا ناپیوستگی‌های موضعی با چالش‌هایی در دستیابی به دقت بالا مواجه هستند [۳۲]. این محدودیت‌ها ضرورت توسعه روش‌های پیشرفته‌تر با تمرکز بر کارایی محاسباتی و پایداری را برجسته می‌سازد.

روش‌های طیفی با ارائه نرخ همگرایی نمایی برای جواب‌های هموار، در دهه اخیر به عنوان جایگزینی قدرتمند برای حل معادلات کسری ظاهر شده‌اند [۷، ۱۶، ۱۸، ۳۰]. این روش‌ها از پایه‌های متعامد مانند چندجمله‌ای‌های ژاکوبی برای تقریب سراسری استفاده می‌کنند و دقت طیفی بالایی را در مسائل با رفتارهای منظم فراهم می‌آورند. با این حال در دامنه‌های طولانی یا در حضور ناپیوستگی‌ها و تکینگی‌ها، با مشکلاتی مانند پدیده گیس، خطاهای گرد کردن و افزایش پیچیدگی محاسباتی مواجه می‌شوند. برای غلبه بر این کاستی‌ها، رویکردهای ترکیبی مانند روش‌های المان طیفی پیشنهاد شده‌اند. برای مثال، دهقان و عباسزاده [۸]، با تلفیق روش تفاضل متناهی در زمان و روش المان طیفی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های لژاندر در مکان، رویکردی پایدار و همگرا برای حل معادلات کسری ارائه کرده‌اند. همچنین روش‌های هم‌مکانی بر پایه چندجمله‌ای‌های ژاکوبی در حل معادلات کسری غیرخطی با مرتبه متغیر کارایی قابل توجهی نشان داده‌اند [۳۴].

در این راستا پیشرفت‌های نوینی برای حل معادله برگرز کسری گزارش شده است. برای مثال، نویسندگان در

[۲۶] یک روش ترکیبی مبتنی بر تبدیل موجک هار و تفاضل متناهی غیراستاندارد برای حل معادله برگرز کسری با مرتبه متغیر زمانی توسعه داده‌اند که در آن مشتق کسری زمانی ابتدا گسسته‌سازی شده و سپس مشتقات مکانی با سری‌های موجک هار تقریب زده می‌شوند. در مطالعه دیگری، یک روش بهینه‌سازی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های تعمیم‌یافته برای حل معادله برگرز کسری با مرتبه متغیر زمانی پیشنهاد شده است که جواب را به صورت ترکیب خطی از چندجمله‌ای‌های تعمیم‌یافته با ضرایب آزاد و پارامترهای کنترلی مدل می‌کند [۱۳]. در [۳۳] یک کلاس جدید از روش‌های طیفی بر مبنای توابع پایه‌ای ژاکوبی کسری برای حل معادلات کسری با مرتبه متغیر ارائه شده است که با تعریف توابع پایه‌ای که تحت عملگر مشتق کسری بسته هستند، امکان ساخت ماتریس‌های عملیاتی دقیق و کم‌بعد فراهم می‌شود و دقت نمایی برای معادلات پیچیده تضمین می‌شود.

روش‌های المان طیفی با تلفیق دقت بالای روش‌های طیفی و انعطاف‌پذیری تجزیه دامنه در روش‌های المان محدود، به‌عنوان یکی از پیشرفته‌ترین ابزارهای محاسباتی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری شناخته می‌شوند. این روش‌ها با بهره‌گیری از توابع پایه‌ای با درجه پایین نظیر چندجمله‌ای‌های متعامد، در هر المان و تقسیم دامنه به زیربخش‌های کوچک‌تر، امکان تقریب دقیق جواب‌ها و مدیریت ناپیوستگی‌های موضعی را فراهم می‌کنند. با این حال فرمول‌بندی‌های موجود برای روش‌های المان طیفی اغلب به تولید روابط بازگشتی می‌شوند که به چندجمله‌ای‌های متعامد وابسته هستند که این امر به‌ویژه در مسائل با ابعاد بالا یا دامنه‌های پیچیده، از نظر محاسباتی پرهزینه است [۲، ۷، ۳۷]. این محدودیت، ضرورت توسعه روش‌های نوین با کارایی محاسباتی بالاتر را برجسته می‌سازد. در این مقاله، یک روش عددی ترکیبی برای حل معادله برگرز کسری با مرتبه متغیر زیر پیشنهاد می‌شود:

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + u(x, t) \partial_x u(x, t) = \varepsilon \cdot D_x^{\alpha(x)} u(x, t), & (x, t) \in (0, L) \times (0, 1], \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in (0, L), \\ u_0 = u(0, t), \quad u_L = u(L, t), & t \in (0, 1] \end{cases} \quad (1.1)$$

که در آن $D_x^{\alpha(x,t)} u(x, t)$ مشتق کسری ریمان-لیوویل تابع u از مرتبه متغیر $\alpha(x) \in (1, 2)$ است، که در هر گام زمانی برای $k - 1 < \alpha(x) < k$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$({}_0 D_x^{\alpha(x)} u)(x) = \frac{1}{\Gamma(k - \alpha(x))} \left[\frac{d^k}{d\zeta^k} \int_0^\zeta \frac{u(s)}{(\zeta - s)^{\alpha(x) - k + 1}} ds \right]_{\zeta=x},$$

که در آن $\varepsilon > 0$ یک پارامتر ویسکوزیته است که میزان پخش یا هموارسازی را کنترل می‌کند، $u^0(x)$ شرط اولیه برای شروع فرایند زمانی در نظر گرفته می‌شود و شرایط مرزی مکانی به صورت همگن دیریکله تعریف می‌شود که متغیر مجهول $u(x, t)$ در بازه مکانی برای تمام زمان‌های $t \in (0, 1]$ صفر است.

این معادله یک نسخه تعمیم‌یافته از معادله برگرز کلاسیک است که در آن مشتق مرتبه اول مکانی با یک مشتق کسری مرتبه متغیر جایگزین شده است. این جایگزینی باعث می‌شود که معادله بتواند رفتارهای غیرموضعی و پیچیده‌تری را مدل‌سازی کند. در رویکرد ترکیبی پیشنهادی، روش المان طیفی بر اساس رویکرد هم‌مکانی برای گسسته‌سازی مکانی و روش کرانک-نیکلسون لپ‌فراگ برای گسسته‌سازی زمانی استفاده می‌کند که دقت مرتبه دوم در زمان را تضمین می‌کند. در این روش از پایه‌های لاگرانژ-ژاکوبی برای تقریب موضعی بهره گرفته شده و ماتریس مشتق کسری بر اساس تعریف ریمان-لیوویل فرمول‌بندی می‌شود، که امکان تقریب دقیق حتی در حضور رفتارهای غیرهموار یا تکینگی‌ها را فراهم می‌آورد. با جایگزینی روابط بازگشتی با ماتریس‌های عملیاتی، بار محاسباتی به طور قابل توجهی کاهش می‌یابد و پیاده‌سازی در مسائل مقیاس بزرگ تسهیل می‌شود. بعلاوه، برای رفع ناپایداری‌های ناشی از وجود مشتقات کسری یک رویکرد جریمه تطبیقی معرفی شده است که پرش در شارهای صحیح در مرزهای

المان‌ها را کمینه می‌کند. این روش با شبکه‌بندی و تنظیم موضعی پارامتر جریمه، پایداری عددی را تضمین کرده و از انتخاب تجربی پارامتر جریمه که در عمل بسیار زمان‌بر و مستعد خطا است جلوگیری می‌کند. در ادامه، برتری کارایی روش پیشنهادی با بررسی متنوع آن مورد تایید قرار می‌گیرد.

در ادامه مقاله به شرح زیر تقسیم‌بندی شده است: بخش دوم به معرفی معادله کسری برگرز مرتبه متغیر و گسسته‌سازی آن می‌پردازد. در بخش سوم، اثربخشی روش پیشنهادی برای معادله برگرز کسری مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نهایت، بخش نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای تحقیقات آینده ارائه می‌شود.

۲ روش عددی برای معادله (۱.۱)

در این بخش به منظور حل عددی معادله برگرز کسری با مرتبه متغیر (۱.۱) یک رویکرد ترکیبی شامل روش المان طیفی هم‌مکانی برای گسسته‌سازی مکانی و روش کرانک-نیکلسون لیپ‌فراگ برای گسسته‌سازی زمانی پیشنهاد می‌شود.

۱.۲ گسسته‌سازی مکانی

به منظور اعمال رویکرد المان طیفی بر اساس روش هم‌مکانی، ابتدا جواب تقریبی را در هر گام زمانی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u_{N,M}(x, t) = \bar{u}_{N,M}(x, t) + u_0 \Phi_0(x) + u_L \Phi_M(x), \quad (1.2)$$

که در آن $u_0 = u(x_0, t)$ و $u_L = u(L, t)$ شرایط مرزی دیریکله را برآورده می‌کنند و

$$\bar{u}_{N,M}(x, t) = \sum_{e=1}^M \sum_{j=1}^{N_e-1} u_{N,M}(x_j^e, t) \Psi_j^e(x) + \sum_{e=1}^{M-1} u_{N,M}(x_e, t) \Phi_e(x).$$

همچنین $\Psi_j^e(x)$ و $\Phi_e(x)$ توابع پایه‌ای هستند که در ادامه تعریف می‌شوند. جواب تقریبی $u_{N,M}(x, t)$ در فضای چندجمله‌ای گسسته $V_{N,M}$ تعریف می‌شود:

$$V_{N,M} = \{v \in C(\Omega) : v|_{I_e} \in P_{I_e}^N, e = 1, \dots, M\},$$

که در آن $\Omega = [0, L]$ ، $I_e = [x_{e-1}, x_e]$ زیردامنه e -ام، و $P_{I_e}^N$ مجموعه چندجمله‌ای‌های جبری با درجه حداکثر N است. دامنه مکانی به M زیردامنه غیرهمپوشان تقسیم می‌شود:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M = L,$$

که $d_e = x_e - x_{e-1}$ طول زیردامنه I_e است. با جایگذاری جواب تقریبی (۱.۲) در معادله (۱.۱) خواهیم داشت:

$$(2.2) \begin{cases} \partial_t u_{N,M}(x, t) + u_{N,M}(x, t) \partial_x u_{N,M}(x, t) = \varepsilon \cdot \mathcal{D}_x^{\alpha(x,t)} u_{N,M}(x, t), & (x, t) \in (0, L) \times (0, T], \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in (0, L), \\ u_0 = u(0, t), u_L = u(L, t), & t \in (0, 1] \end{cases}$$

حال در هر زیردامنه I_e ، نقاط هم مکانی $\{x_j^e\}_{j=0}^N$ را به طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم $x_0^e = x_{e-1}$ و $x_N^e = x_e$. به عبارتی دیگر، مجموعه نقاط هم مکانی کلی به صورت

$$N_0 = \{x_j^e : e = 1, \dots, M; j = 0, \dots, N\},$$

در نظر گرفته می‌شود. به منظور تولید توابع پایه‌ای مورد نظر برای ساخت جواب تقریبی (۲.۲) توابع پایه لاگرانژ-ژاکوبی را در این مجموعه نقاط تعریف و توابع پایه‌ای را به صورت زیر تقسیم‌بندی می‌کنیم:

• توابع پایه مرزی و رابط:

$$\Phi_0(x) = \begin{cases} P_0^1(x), & x \in I_1, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \Phi_M(x) = \begin{cases} P_N^M(x), & x \in I_M, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\Phi_e(x) = \begin{cases} P_N^e(x), & x \in I_e, \\ P_{e+1}^{e+1}(x), & x \in I_{e+1}, \quad e = 1, \dots, M-1, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

• توابع پایه داخلی:

$$\Psi_j^e(x) = \begin{cases} P_j^e(x), & x \in I_e, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad e = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N-1,$$

که در آن $P_{j,e}(x)$ چندجمله‌ای لاگرانژ j -ام در زیردامنه I_e است که در شرط $P_{j,e}(x_i^e) = \delta_{ij}$ صدق می‌کنند. به منظور ساخت ماتریس مشتق در رویکرد المان طیفی هم مکانی ضروری است ماتریس حاصل از اعمال مشتق کسری بر توابع پایه‌ای در نقاط هم مکانی ساخته شود. بدین منظور، مشتق کسری ${}_0D_x^{\alpha(x,t)} u_{N,M}(x,t)$ با استفاده از ماتریس مشتق کسری چنددامنه‌ای به نام M^α در هر گام زمانی تقریب زده می‌شود. در واقع، این ماتریس به صورت یک ماتریس بلوکی ساختاریافته تعریف می‌شود:

$$M^\alpha = \begin{bmatrix} \mathcal{M}^{ij} & \mathcal{K}^i \\ \mathcal{F}^i & \mathcal{H} \end{bmatrix}.$$

که در آن زیرماتریس \mathcal{M}^{ij} یک ماتریس قطری بلوکی است که به ازای $m, n = 1, \dots, N-1$ و $i, j = 1, \dots, M$ به صورت $\mathcal{M}^{ij} = [{}_0D_x^{\alpha(x)} \Psi_n^i(x)]_{x=x_m^j}$ تعریف می‌شود و ساختار آن به صورت زیر است:

$$\mathcal{M}^{ij} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}^{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{M}^{M1} & \dots & \mathcal{M}^{MM} \end{bmatrix}.$$

زیرماتریس \mathcal{F}^i به ازای $m = 1, \dots, M-1$ به صورت $\mathcal{F}^i = [{}_0D_x^{\alpha(x)} \Psi_N^i(x)]_{x=x_m}$ تعریف می‌شود که اثر توابع پایه‌ای داخلی المان i ام در نقاط فصل مشترک x_m را نشان می‌دهد، زیرماتریس \mathcal{K}^i نیز به ازای $m = 1, \dots, N-1$ و

$n = 1, \dots, M - 1$ به صورت $\mathcal{K}^i = [{}_{\circ}D_x^{\alpha(x)} \Phi_n^i(x)]_{x=x_m^i}$ تعریف می شود که اثر توابع پایه ای فصل مشترک در نقاط داخلی المان i ام را ارزیابی می کند و در نهایت زیرماتریس \mathcal{H} به صورت $\mathcal{H} = [{}_{\circ}D_x^{\alpha(x)} \Phi_n(x)]_{x=x_m}$ تعریف می شود که مربوط به ارزیابی عملگر کسری بر روی توابع پایه ای فصل مشترک در نقاط فصل مشترک است. به عبارتی دقیق تر، این ماتریس با اعمال عملگر مشتق کسری مرتبه متغیر در هر گام زمانی بر توابع پایه تکه ای تعریف شده در زیردامنه ها تشکیل می شود و محاسبه این درایه ها نیازمند بررسی دقیق تعاملات غیرموضعی بین زیردامنه ها است.

مشتق کسری توابع پایه ای فصل مشترک: برای $e = 1, \dots, M - 1$ ، مشتق کسری تابع پایه فصل مشترک $\Phi_e(x)$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\mathcal{D}_x^{\alpha(x)} \Phi_e(x) = \begin{cases} \circ, & x \leq x_{e-1}, \\ {}_{x_{e-1}}\mathcal{D}_x^{\alpha(x)} P_N^e(x), & x_{e-1} < x \leq x_e, \\ {}_{x_{e-1}}\mathcal{D}_{x_e}^{\alpha(x)} P_N^e(x) + x_e \mathbf{D}_x^{\alpha(x,t)} P_{\circ}^{e+1}(x), & x_e < x \leq x_{e+1}, \\ {}_{x_{e-1}}\mathcal{D}_{x_e}^{\alpha(x)} P_N^e(x) + x_e \mathbf{D}_{x_{e+1}}^{\alpha(x,t)} P_{\circ}^{e+1}(x), & x > x_{e+1}. \end{cases}$$

مشتق کسری توابع پایه ای داخلی: برای $e = 1, \dots, M$ و $j = 1, \dots, N - 1$:

$$\mathcal{D}_x^{\alpha(x)} \Psi_j^e(x) = \begin{cases} \circ, & x \leq x_{e-1}, \\ {}_{x_{e-1}}\mathcal{D}_x^{\alpha(x)} P_j^e(x), & x_{e-1} < x \leq x_e, \\ {}_{x_{e-1}}\mathbf{D}_{x_e}^{\alpha(x)} P_j^e(x), & x > x_e. \end{cases}$$

که در آن برای $k - 1 < \alpha(x) < k$ و $j = 0, 1, \dots, M$ و $e = 1, 2, \dots, M$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$({}_{\circ}\mathcal{D}_x^{\alpha(x)} u)(x) = \frac{1}{\Gamma(k - \alpha(x))} \left[\frac{d^k}{d\zeta^k} \int_{\circ}^{\zeta} \frac{u(s)}{(\zeta - s)^{\alpha(x) - k + 1}} ds \right]_{\zeta=x},$$

از روابط فوق مشاهده می شود که باید دو نوع مشتق زیر را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} & {}_{x_{e-1}}\mathcal{D}_x^{\alpha(x)} P_j^e(x), \quad x \in (x_{e-1}, x_e], \\ & {}_{x_{e-1}}\mathbf{D}_{x_e}^{\alpha(x)} P_j^e(x), \quad x > x_e, \end{aligned}$$

برای محاسبه روابط فوق هر زیردامنه $I_e = [x_{e-1}, x_e]$ با تبدیل

$$x = \frac{d_e}{\gamma} (y + 1) + x_{e-1}, \quad y \in [-1, 1]$$

به دامنه $[-1, 1]$ نگاشت می شود. با انتقال هر عنصر به بازه $[-1, 1]$ ، روابط زیر بدست می آید:

$${}_{x_{e-1}}\mathcal{D}_x^{\alpha(x)} P_j^e(x) = \left(\frac{\gamma}{d_e} \right)^{\hat{\alpha}(y)} {}_{-1}\mathcal{D}_y^{\alpha(y)} P_j(y), \quad y \in (-1, 1],$$

$${}_{x_e-1}D_{x_e}^{\alpha(x)}P_j^e(x) = \left(\frac{\gamma}{d_e}\right)^{\hat{\alpha}(y)} {}_{-1}D_1^{\alpha(y)}P_j(y), \quad y > 1.$$

سپس چندجمله‌ای لاگرانژ $P_i(y)$ حاصله بر حسب چندجمله‌ای‌های لژاندر

$$L_i(y) = \frac{1}{\gamma^i} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{i}{\gamma} \rfloor} (-1)^l \frac{(\gamma i - l)!}{\gamma^{i-l} l! (i-l)(i-\gamma l)} y^{i-\gamma l}, \quad (3.2)$$

به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$P_j(y) = \sum_{i=0}^N c_i^j L_i(y), \quad c_i^j = \begin{cases} \frac{w_j}{\gamma_i} L_i(y_j), & i = 0, 1, \dots, N-1, \\ \frac{w_j}{(\gamma + \frac{1}{N})\gamma_i} L_N(y_j), & i = N, \end{cases}$$

که در آن $\gamma_i = \frac{\gamma}{\gamma_i + 1}$ و $\{y_j, w_j\}$ گره‌ها و وزن‌های گاوس-لوباتو-لژاندر هستند. با اعمال عملگر مشتق کسری ${}_{-1}D_y^{\hat{\alpha}(y)}$ در رابطه بالا داریم:

$${}_{-1}D_y^{\hat{\alpha}(y)}P_j(y) = \sum_{i=0}^N c_i^j ({}_{-1}D_y^{\hat{\alpha}(y)}L_i(y)). \quad (4.2)$$

شایان ذکر است به منظور ارائه یک چارچوب عملیاتی و محاسباتی سازگار، چندجمله‌ای‌های لژاندر را می‌توان به صورت بردار $\underline{L}(y) = [L_0(y), L_1(y), \dots, L_N(y)]^T$ در نظر گرفت. در این چارچوب محاسبه عملگر کسری مرتبه متغیر ${}_{-1}D_y^{\hat{\alpha}(y)}P_j(y)$ که در آن ترکیب خطی از چندجمله‌ای‌های لژاندر است، مستلزم تعیین دقیق عبارت ${}_{-1}D_y^{\hat{\alpha}(y)}\underline{L}(y)$ می‌باشد. با توجه به اینکه سیستم پایه لژاندر را می‌توان به صورت تبدیل خطی از پایه استاندارد

$$\underline{Y}(y) = [Y_0(y), Y_1(y), \dots, Y_N(y)]^T = [1, y, y^2, \dots, y^N]^T,$$

بیان نمود یعنی:

$$\underline{L}(y) = \Upsilon \underline{Y}(y), \quad (5.2)$$

که در آن Υ ماتریس ضرایب پایین مثلثی پایه‌های لژاندر است و انتقال بین دو سیستم پایه را انجام می‌دهد، به عنوان مثال، برای $N = 4$ ، ماتریس Υ به شکل زیر است:

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & -\frac{15}{4} & 0 & \frac{35}{8} \end{bmatrix}.$$

بر این اساس محاسبه مشتق کسری ریمان-لیوویل مرتبه متغیر ${}_{-1}D_y^{\hat{\alpha}(y)}\underline{L}(y)$ به طور مستقیم به محاسبه همان

عملگر روی توابع پایه‌ای استاندارد $\underline{Y}(y)$ تقلیل می‌یابد:

$$-{}_1D_y^{\hat{\alpha}(y)} \underline{L}(y) = \Upsilon -{}_1D_y^{\hat{\alpha}(y)} \underline{Y}(y).$$

توابع پایه‌ای استاندارد y^n را می‌توان با استفاده از بسط جبری دقیق

$$y^n = ((y+1) - 1)^n = \sum_{j=0}^n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(n-j+1)} (y+1)^j (-1)^{n-j}$$

بیان کرد. در مقاله [۳۷]، فرمول زیر برای مشتق کسری ریمان-لیوویل چپ ارائه شده است:

$$-{}_1D_y^{\hat{\alpha}(y)} (y-a)^j = \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\hat{\alpha}(y))} (y-a)^{j-\hat{\alpha}(y)}.$$

با در نظر گرفتن نقطه شروع $a = -1$ و به کارگیری خاصیت خطی بودن عملگر ریمان-لیوویل، می‌توان مشتق کسری مورد نظر را به صورت مجموعه‌ای از مشتقات کسری توان‌های $(y+1)^j$ بیان کرد. این رویکرد که صرفاً بر پایه خواص تحلیلی تابع گاما استوار است، منجر به عبارت زیر می‌شود:

$$-{}_1D_y^{\hat{\alpha}(y)} y^n = \sum_{j=0}^n \frac{\Gamma(n+1)(-1)^{n-j}}{\Gamma(j+1-\hat{\alpha}(y))\Gamma(n-j+1)} (y+1)^{j-\hat{\alpha}(y)}.$$

از طرفی دیگر مقدار $-{}_1D_y^{\hat{\alpha}(y)} P_j(y)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$-{}_1D_y^{\hat{\alpha}(y)} P_j(y) = \frac{1}{\Gamma(-\hat{\alpha}(y))} \sum_{i=0}^N \sum_{p=0}^L c_i^j \frac{L_i(\eta_p)}{(y-\eta_p)^{\hat{\alpha}(y)+1}} w_p,$$

که در آن w_p و η_p به ترتیب گره‌ها و وزن‌های گاوس-لژاندر هستند. در نتیجه توانایی محاسبه تمام درایه‌های زیرماتریس‌های معرفی شده برای ماتریس M^α وجود دارد و بنابراین می‌توان این ماتریس را ایجاد کرد.

۲.۲ بررسی ناپایداری ذاتی از طریق توزیع مقادیر ویژه

در چارچوب روش‌های المان طیفی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری با مرتبه متغیر، پایداری عددی روش به‌طور بنیادین به توزیع مقادیر ویژه ماتریس مشتق کسری M_α وابسته است. این ماتریس که تعاملات غیرموضعی عملگرهای کسری را در بر می‌گیرد، اغلب به دلیل وابستگی‌های حافظه‌ای طولانی و پیرش‌های احتمالی در شارهای صحیح به ناپایداری‌های ذاتی منجر می‌شود. در این بخش با بهره‌گیری از تحلیل طیفی دقیق شرایط ناپایداری روش را بررسی کرده و یک رویکرد برای پایدارسازی مبتنی بر جریمه تطبیقی موضعی پیشنهاد می‌دهیم. این رویکرد که بر پایه شاخص‌های نزدیکی مرتبه کسری به مقادیر صحیح استوار است نه تنها ناپایداری را مرتفع می‌سازد بلکه با کاهش عدد شرطی ماتریس کارایی محاسباتی را ارتقا می‌بخشد.

برای ارزیابی پایداری روش پیشنهادی، توزیع مقادیر ویژه ماتریس M_α را در یک مسئله نمونه با مرتبه متغیر $\alpha(x) = 0.95 + \frac{x+1}{1.05}$ در دامنه $[0, 10]$ و تحت افراز یکنواخت دامنه محاسباتی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. شکل ۱ این توزیع را در دو رویکرد مجزا به تصویر می‌کشد: حالت نخست با افزایش تعداد زیردامنه‌ها M در حالی که درجه چندجمله‌ای ثابت $(N = 4)$ نگه داشته شده، و حالت دوم با افزایش N در حالی که $M = 32$ ثابت است.

مشاهده می‌شود که در هر دو حالت، بخشی از مقادیر ویژه در نیم‌صفحه راست صفحه مختلط قرار گرفته‌اند که این امر حاکی از ناپایداری ذاتی ماتریس در فقدان مکانیسم‌های کنترلی است. این پدیده ریشه در دو عامل کلیدی دارد:

- غیرموضعی بودن عملگر کسری: عملگرهای مشتق کسری با مرتبه متغیر وابستگی‌های حافظه‌ای طولانی‌مدت و تعاملات غیرموضعی را در سراسر دامنه القا می‌کنند. این ویژگی هرچند مدل‌سازی فیزیکی دقیق‌تری از پدیده‌های پیچیده مانند نفوذ غیرعادی فراهم می‌آورد، در ساختار بلوکی ماتریس به درایه‌های غیرصفر در بلوک‌های دور منجر شده و مقادیر ویژه مثبت تولید می‌کند.
- ناپوستگی‌های موضعی در مرزهای زیردامنه‌ها: در رویکردهای چنددامنه‌ای اگرچه تابع تقریب در نقاط فصل مشترک x_e از کلاس C^0 برخوردار است، مشتقات صحیح ممکن است پرش کنند. این پرش‌ها در شارهای صحیح به‌ویژه هنگامی که $\alpha(x_e)$ به مقادیر صحیح نزدیک می‌شود تشدید شده و نوسانات عددی را تقویت می‌کنند.

نتایج عددی نشان‌دهنده آن است که افزایش صرف M یا N ناپایداری را برطرف نمی‌کند بلکه در مواردی مانند $M = 128$ و $N = 4$ تعداد مقادیر ویژه مثبت افزایش می‌یابد که این امر بر تشدید ناپایداری با پیچیدگی سیستم دلالت دارد. این یافته‌ها ضرورت یک رویکرد پایدارسازی پویا و تطبیقی را برجسته می‌سازد.

۳.۲ رویکرد جریمه تطبیقی برای کمینه‌سازی پرش شارها و دستیابی به پایداری

ناپایداری مشاهده‌شده در توزیع مقادیر ویژه، انگیزه‌ای قوی برای توسعه یک روش جریمه تطبیقی فراهم می‌آورد که فراتر از پارامترهای ثابت مرسوم عمل می‌کند. رویکردهای سنتی با بهره‌گیری از σ ثابت اغلب به تنظیم دستی و غیربهبینه منجر می‌شوند. با توجه به مطالب [۳۷] و بررسی‌های انجام شده در [۳۲] و محاسبه عدد وضعیت ماتریس مشتق M^α در نزدیکی مرز تابع مرتبه کسری مشهود است که وقتی α به یک و دو نزدیک می‌شود عدد وضعیت ماتریس به شدت افزایش می‌یابد و قسمت حقیقی مقادیر ویژه بزرگتر می‌شود. در این راستا یک فرمول مبتنی بر ساختار موضعی مرتبه کسری و تحلیل مجانبی رفتار عملگر در نزدیکی مرتبه‌های صحیح برای پارامتر جریمه موضعی σ_e در هر نقطه فصل مشترک x_e پیشنهاد می‌دهیم که صرفاً بر پایه مقادیر $\alpha(x_e)$ استوار است. ابتدا شاخص کلیدی زیر را تعریف می‌کنیم:

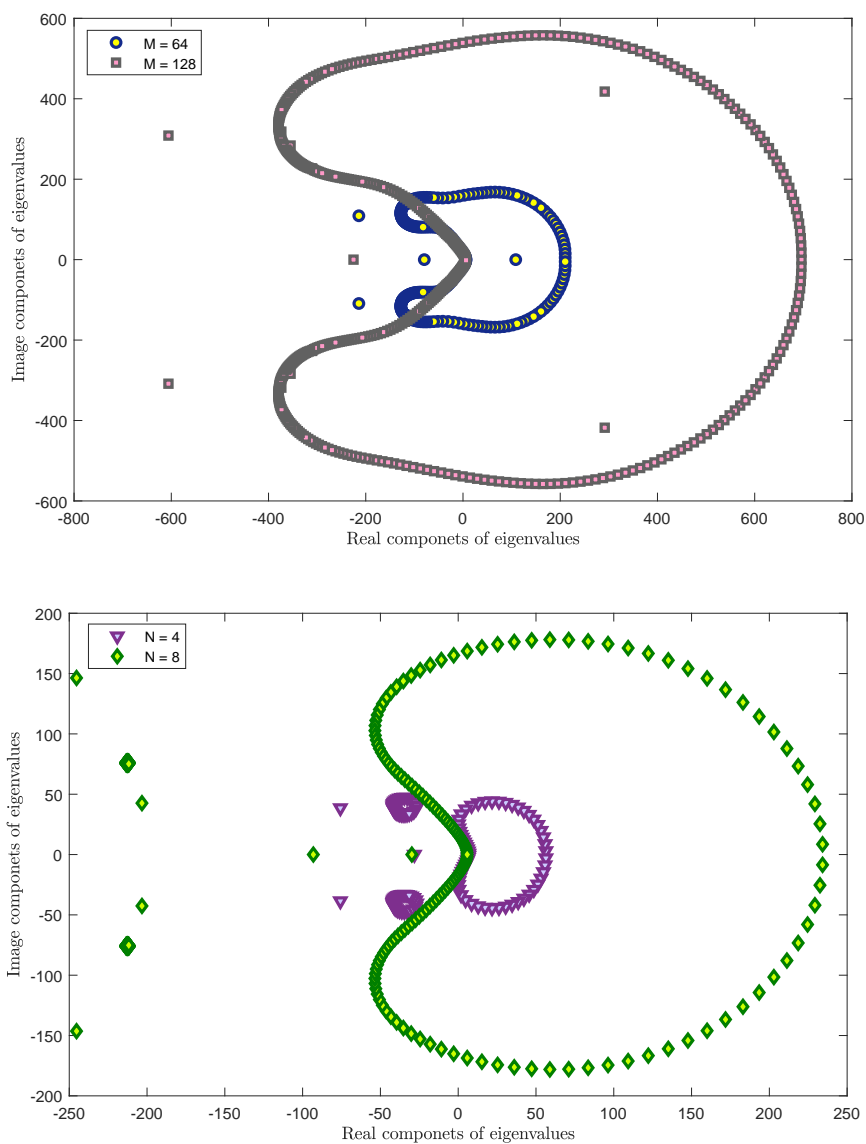
$$d(x_e) = \min(|\alpha(x_e) - 1|, |\alpha(x_e) - 2|), \quad (6.2)$$

که نزدیکی مرتبه کسری به مقادیر صحیح ۱ و ۲ را اندازه‌گیری می‌کند. مقادیر کوچک $d(x_e)$ نشان‌دهنده انتقال به رفتار کلاسیک و پتانسیل ناپایداری عددی است. با الهام از تحلیل‌های مجانبی رفتار مقادیر ویژه در نزدیکی مرتبه‌های صحیح، پارامتر جریمه تطبیقی را به صورت زیر فرمول‌بندی می‌کنیم:

$$\sigma_e = \frac{1}{d(x_e)} \left(\frac{1}{\sqrt{d(x_e)}} + \frac{1}{\sqrt{d_{\min}}} \right) \quad (7.2)$$

که در آن $d_{\min} = \min_{e=1, \dots, M-1} d(x_e)$ کوچک‌ترین مقدار $d(x_e)$ در تمام نقاط فصل مشترک است. این ساختار تضمین می‌کند که:

- در نواحی با $d(x_e)$ کوچک (نزدیک به مرتبه‌های صحیح) σ_e به‌طور چشمگیری افزایش می‌یابد و پایداری موضعی را تقویت کند.



شکل ۱: مقادیر ویژه M^α برای $\alpha(x) = 0.95 + \frac{x+1}{1.5}$ به ازای $M = \{64, 128\}$ (بالا) و $N = \{4, 8\}$ (پایین).

• در نواحی با $d(x_e)$ بزرگ σ_e کوچک باقی می ماند و از اعمال جریمه بیش از حد که می تواند دقت طیفی را مختل سازد جلوگیری نماید.

با بهره گیری از این پارامتر، ماتریس جریمه \mathbb{P} به صورت تنک تعریف می شود:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \underline{P^1} & \underline{P^2} & \dots & \underline{P^M} & \underline{\bar{P}} \end{bmatrix},$$

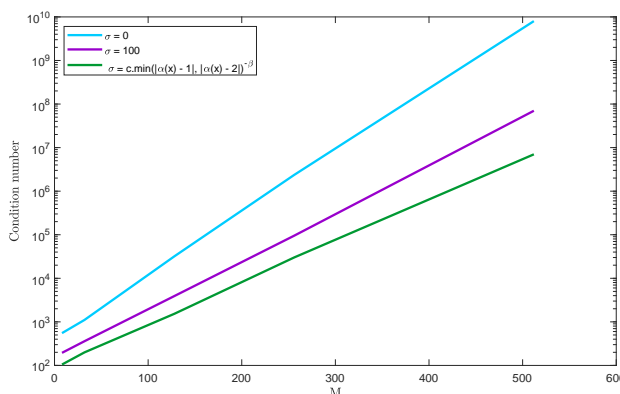
که درایه های غیر صفر آن به صورت زیر محاسبه می گردند:

$$\underline{P^j} = \sigma_e \left[\frac{d\Psi_n^j}{dx}(x_e^+) - \frac{d\Psi_n^j}{dx}(x_e^-) \right]_{e=1, \dots, M-1; n=1, \dots, N-1},$$

$$\underline{\bar{P}} = \sigma_e \left[\frac{d\Phi_n}{dx}(x_e^+) - \frac{d\Phi_n}{dx}(x_e^-) \right]_{e, n=1, \dots, M-1}.$$

در نتیجه، ماتریس مشتق کسری اصلاح شده به صورت $\mathbb{M}_p^\alpha = M^\alpha + \mathbb{P}$ حاصل می شود که ساختار تنک خود را حفظ کرده و هزینه محاسباتی اضافی ناچیزی تحمیل می کند.

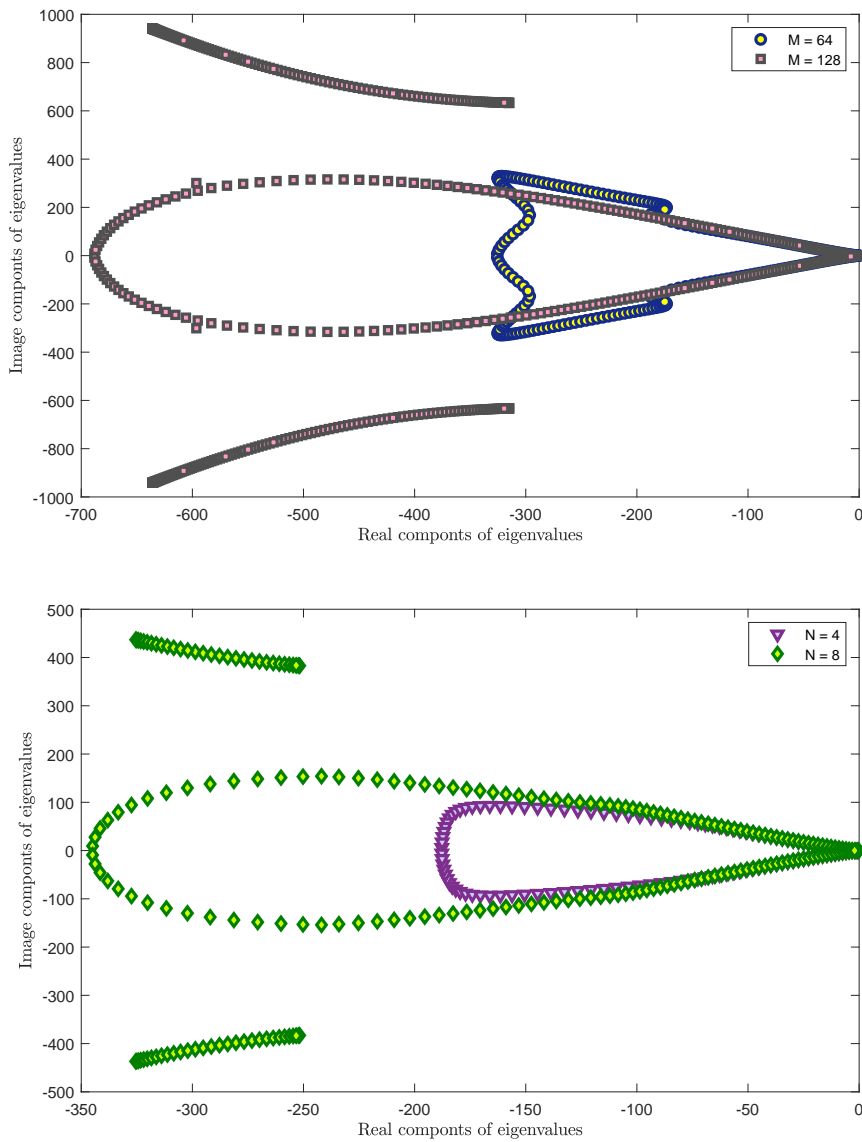
در ادامه برای ارزیابی کارایی این رویکرد، توزیع مقادیر ویژه ماتریس اصلاح شده \mathbb{M}_p^α را با مرتبه متغیر $\alpha(x) = 0.95 + \frac{x+1}{10.5}$ در دامنه $[0, 10]$ مورد محاسبه و تحلیل قرار داده ایم.



شکل ۲: مقایسه عدد وضعیت M^α و \mathbb{M}_p^α برای $\alpha(x) = 0.95 + \frac{x+1}{10.5}$ و مقادیر متفاوت M .

در شکل ۲ مقایسه عدد وضعیت ماتریس \mathbb{M}_p^α با M^α و رویکرد جریمه ثابت $\| \cdot \|_{L^2}$. به تصویر کشیده شده است. نتایج بدست آمده حاکی از کاهش قابل توجه عدد وضعیت ماتریس حتی نسبت به روش های جریمه ثابت است که کارایی رویکرد پیشنهادی را تایید می نماید. شایان ذکر است، با اینکه افزودن ماتریس جریمه ساختار اصلی را حفظ کرده و هزینه محاسباتی اندکی دارد، بدحالی ماتریس را مرتفع ساخته و رشد عدد وضعیت را محدود می کند که این امر عملکرد بهینه در حل سیستم های خطی و غیرخطی را تسهیل می نماید.

همچنین شکل ۳ به وضوح جابه جایی بخش های حقیقی مثبت مقادیر ویژه به سمت مقادیر منفی را به تصویر می کشد به گونه ای که بخش عمده ای از این مقادیر نه تنها از نزدیکی صفر فاصله گرفته بلکه در نیم صفحه چپ صفحه



شکل ۳: مقادیر ویژه $\mathbb{M}_p^{\alpha(x)}$ برای $\alpha = 0.95 + \frac{x+1}{1.5}$ به ازای $M = \{64, 128\}$ (بالا) و $N = \{4, 8\}$ (پایین).

مختلط قرار می‌گیرند. این تحول، پایداری عددی سیستم را بدون بروز پدیده بیش‌تنظیم یا کم‌تنظیم پارامتر جریمه تضمین نموده و بر برتری رویکرد تطبیقی پیشنهادی در مدیریت تعاملات غیرموضعی عملگرهای کسری دلالت دارد. بنابراین در این مرحله گسسته‌سازی مکانی عملگر مشتق کسری در نقاط هم‌مکانی $x \in N_o \setminus \{o, L\}$ با شرط مرزی $u_{N,M}(o, t) = u_{N,M}(L, t) = o$ انجام می‌شود. در ادامه گسسته‌سازی عبارت غیرخطی $\partial_x u_{N,M}(x, t)$ به صورت نقطه‌به‌نقطه در نقاط هم‌مکانی گسسته‌سازی می‌شود. ابتدا $\partial_x u_{N,M}(x, t)$ در هر گام زمانی با استفاده از ماتریس مشتق M^1 گسسته می‌شود که مشابه ماتریس مشتق کسری M^α ساختار بلوکی داشته اما برای مرتبه صحیح محاسبه می‌شود، سپس عبارت غیرخطی به صورت حاصل ضرب عنصر به عنصر در هر گام زمانی تقریبی زده می‌شود. لذا سیستم نیمه‌گسسته مکانی است که از روش طیفی هم‌مکانی چنددامنه‌ای به دست آمده و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\partial_t U(t) + (U(t))M^1 U(t) = \epsilon M_p^\alpha U(t)$$

که در آن $U(t) = [u_{N,M}(x_j^e, t)_{e=1, \dots, M; j=1, \dots, N-1}, U_{N,M}(x_e, t)_{e=1, \dots, M-1}]^T$ می‌باشد.

۴.۲ گسسته‌سازی زمانی

در این بخش برای گسسته‌سازی زمانی معادله برگرز کسری مورد نظر، یک رویکرد نیمه‌ضمنی دو مرحله‌ای مرتبه دوم بر پایه ترکیب روش‌های کرانک-نیکلسون و لیپ‌فراگ به کار گرفته می‌شود. این طرح که در مقالات پیشین [۳۳] و [۳۷] برای معادلات کسری توسعه یافته است، برای معادلات غیرخطی با عملگرهای غیرموضعی بسیار کارآمد است.

بازه زمانی $[o, T]$ را به N_t گام یکنواخت با اندازه Δt تقسیم می‌کنیم، به طوری که $t^n = n\Delta t$ ، $n = 0, 1, \dots, N_t$ روند گسسته‌سازی زمانی را برای $U(t_n) \approx U^n$ به صورت زیر پیاده‌سازی می‌کنیم:

- مشتق زمانی موجود در معادله را با استفاده از تقریب لیپ‌فراگ مرتبه دوم زیر تقریب می‌زنیم:

$$\partial_t U(t)|_{t=t_n} \approx \frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta t}, \quad n \geq 1.$$

- برای اجتناب از حل غیرخطی که پیچیده است، عبارت غیرخطی به صورت صریح در سطح زمانی n گسسته می‌شود:

$$diag(U(t))M^1 U(t)|_{t=t_n} \approx diag(U^n)M^1 U^n,$$

این فرم در عمل برای مقادیر کوچک Δt دقت قابل قبولی دارد و بار محاسباتی را کاهش می‌دهد.

- طرف راست (مشتق کسری) با استفاده از میانگین کرانک-نیکلسون گسسته می‌شود:

$$\epsilon M_p^\alpha U(t)|_{t=t_n} = \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha)} (M_p^\alpha U^{n+1} + M^\alpha U^{n-1}).$$

دلیل عدم استفاده از ماتریس جریمه M_p^α در گام U^{n-1} این است که در واقع در گام‌های قبلی مسئله پایداری اعمال شده است و نیازی به اعمال دوباره آن نیست، در نتیجه صرفاً در گام $n+1$ ام از M_p^α استفاده شده است. نتایج بدست آمده حاکی از افزایش ناپایداری در صورت اعمال M_p^α در گام U^{n-1} است.

با ترکیب این تقریب‌ها، برای $n \geq 1$ داریم:

$$\frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta t} + \text{diag}(U^n)M \setminus U^n \approx \frac{\epsilon}{4}(M_p^\alpha U^{n+1} + M^\alpha U^{n-1}),$$

که گام شروع‌کننده در آن به صورت زیر است:

$$U^1 = U^0 - \Delta t(\text{diag}(U^0)M \setminus U^0) + \epsilon \Delta t M^\alpha U^0.$$

U^0 بردار مقادیر شرط اولیه در زمان $t = 0$ به ازای مجموعه نقاط هم‌مکانی $\{0, L\}$ است. لذا فرم گسسته شده معادله برگرز کسری را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{cases} \left(\mathbb{I} - \frac{\epsilon \Delta t}{4} M_p^\alpha \right) U^{n+1} = \left(\mathbb{I} + \frac{\epsilon \Delta t}{4} M^\alpha \right) U^{n-1} - 2\Delta t \text{diag}(U^n)M \setminus U^n, \\ U^1 = U^0 - \Delta t(\text{diag}(U^0)M \setminus U^0) + \epsilon \Delta t M^\alpha U^0, \end{cases}$$

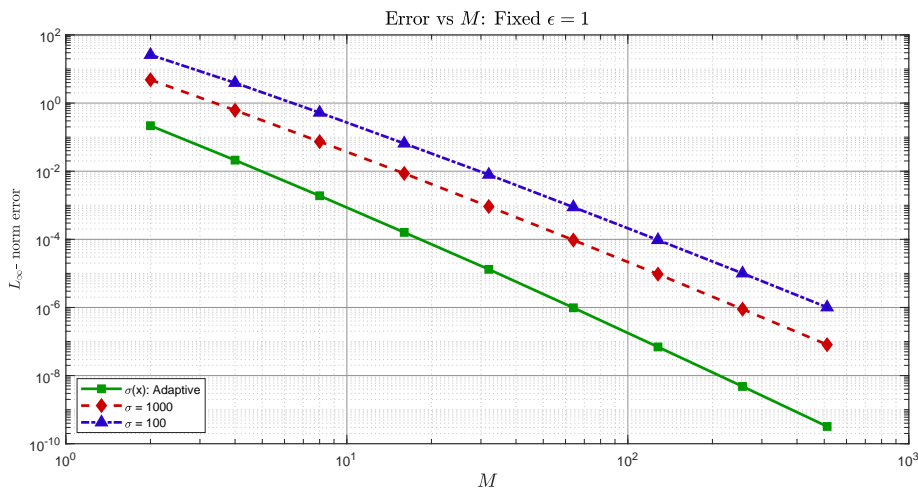
که در آن \mathbb{I} ماتریس همانی است و برای حفظ پایداری از ماتریس مشتق اصلاح‌شده استفاده می‌شود که در بخش قبل تعریف شد.

۳ نتایج عددی

در این بخش، کارایی و دقت روش عددی پیشنهادی را در حل یک مسئله وابسته به زمان با رفتار غیرخطی و ویسکوزیته کسری بررسی می‌کنیم. معادله برگرز کسری به دلیل وجود عبارت غیرخطی $u(x, t)\partial_x u(x, t)$ و مشتق کسری غیرموضعی، چالش‌های عددی قابل توجهی از جمله ناپایداری‌های ناشی از شوک‌های تیز، ناپیوستگی‌های شار در نقاط فصل مشترک المان‌ها، و وابستگی شدید به مرتبه کسری ایجاد می‌کند. هدف از این مثال، ارزیابی توانایی روش چنددامنه‌ای طیفی هم‌مکانی پیشنهادی در شبیه‌سازی دقیق رفتارهای پیچیده جواب از جمله گذارهای تند در نزدیکی مرزها و وابستگی به پارامترهای فیزیکی مانند ضریب ویسکوزیته ϵ و تابع مرتبه کسری است. نتایج عددی با جواب مرجع مقایسه می‌شوند تا برتری روش پیشنهادی در رسیدگی به تکینگی‌های مکانی و کنترل نوسانات عددی به وضوح آشکار گردد.

مثال ۱.۳. در این مثال معادله برگرز کسری (۱.۱) در دامنه $(0, 1) \times (0, 2)$ را در نظر می‌گیریم که در آن $u_0(x) = \sin(\frac{\pi x}{4})$ با شرایط مرزی $u(0, t) = u(2, t) = 0$ است. برای ارزیابی روش پیشنهادی، مرتبه متغیر $\alpha(x) = 0.95 + \frac{x+1}{2.5}$ و $\Delta t = 10^{-3}$ انتخاب می‌شود. با توجه به تحلیل رفتار معادله برگرز کسری در مرجع [۳۷] مشاهده می‌شود که این معادله در نزدیکی مرز چپ دامنه، نوسانات قابل توجهی از خود نشان می‌دهد. این پدیده عمدتاً ناشی از وجود عبارت غیرخطی است که تمایل به ایجاد گرادیان‌های تند و ساختارهای شوک مانند به‌ویژه در نواحی مجاور شرط مرزی صفر در جواب دارد. علاوه بر این، گرادیان‌های تیز این چنینی زمانی که مرتبه کسری α به ازای مقادیر نزدیک به مرز به دست می‌آید تشدید می‌گردد، زیرا در این حالت اثر پخش کسری ضعیف شده و عبارت غیرخطی بر رفتار سیستم غالب می‌شود. همچنین کاهش مقدار ϵ نیز به تضعیف بیشتر اثر پخش کسری منجر شده و این ناپایداری‌ها را تقویت می‌کند.

شکل ۴ رفتار همگرایی خطای بیشینه را به عنوان تابعی از تعداد زیردامنه‌های گسسته‌سازی M و تحت ضریب پخش $\epsilon = 1$ و $T = 1$ نمایش می‌دهد. تمامی نتایج به ازای درجه چندجمله‌ای ثابت $N = 4$ و گام زمانی کوچک



شکل ۴: مقایسه خطا به ازای M های متفاوت برای مقادیر متفاوت σ

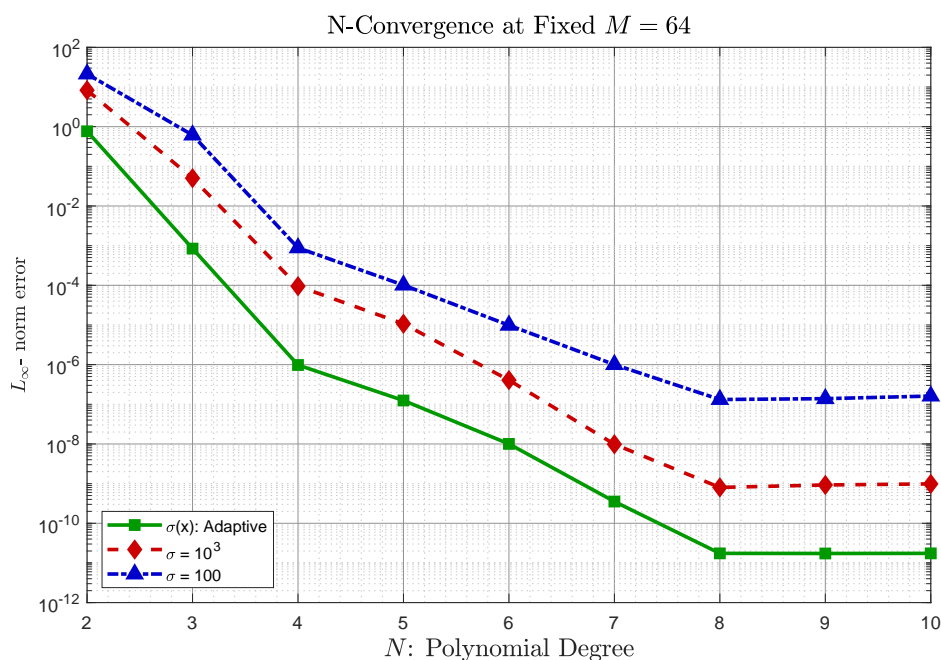
انجام شده‌اند تا تأثیر گسسته‌سازی مکانی به‌طور شفاف قابل مشاهده باشد. جواب عددی متناظر با $M = 1024$ به عنوان جواب مرجع در نظر گرفته شده است و خطاهای گزارش شده برای مقادیر کوچک‌تر M با مقایسه جواب‌های تقریبی با این جواب مرجع محاسبه شده‌اند. در این شکل جریمه تطبیقی با جریمه ثابت مقایسه شده است، طوریکه منحنی مربوط به جریمه تطبیقی نرخ کاهش خطا را تندتر از دو حالت دیگر نشان می‌دهد و این بهبود با افزایش M (یعنی ریزتر شدن شبکه) تشدید می‌شود. این رفتار نشان‌دهنده همگرایی نمایی مؤثر و پایداری بالای روش در حضور شبکه‌های چنددامنه‌ای است.

بدیهی است که این برتری، ریشه در تنظیم پویای پارامتر جریمه σ_e بر اساس شاخص

$$d(x_e) = \min(|\alpha(x_e) - 1|, |\alpha(x_e) - 2|)$$

دارد که منجر به کمینه‌سازی پرش در شارهای مرتبه صحیح در مرز زیردامنه‌ها شده و پایداری موضعی روش را به‌طور چشمگیری ارتقا می‌دهد. علاوه بر این، باید توجه داشت که معادله برگرز کسری در نزدیکی مرزهای دامنه به‌ویژه در مرز چپ دارای رفتار نوسانی قوی است که در شبکه‌های یکنواخت بدون جریمه، به‌راحتی تقویت شده و منجر به انتشار خطای عددی در سراسر دامنه می‌شوند. با به‌کارگیری جریمه تطبیقی این نوسانات به‌طور مؤثری کنترل و مهار شده‌اند و در واقع روش پیشنهادی به‌گونه‌ای عمل می‌کند که شبکه یکنواخت رفتاری شبیه به یک شبکه درجه‌بندی شده داشته باشد، بدون اینکه نیاز به تغییر فیزیکی در توزیع گره‌ها باشد. به عبارت دقیق‌تر، در نواحی حساس (مانند $x \approx 0$ که $\alpha(x)$ به ۱ نزدیک است) جریمه بیشتری اعمال می‌شود. از سوی دیگر، رویکردهای اعمال جریمه ثابت عملکرد ضعیف‌تری دارند، طوریکه جریمه ثابت با $\sigma = 100$ قادر به کنترل نوسانات در مرزها نیست و خطای عددی به سرعت گسترش می‌یابد که ناکارآمدی مقادیر کوچک ثابت در مدیریت غیرموضعی و ناپایداری‌های موضعی را نشان می‌دهد. همچنین، اعمال جریمه ثابت $\sigma = 1000$ اگرچه پایداری بهتری نسبت به $\sigma = 100$ ایجاد می‌کند اما به دلیل عدم حساسیت به تغییرات موضعی در $\alpha(x)$ نمی‌تواند بهینه عمل کند. علاوه بر این، اعمال این جریمه بیش‌ازحد در نواحی غیربحرانی می‌تواند منجر به کاهش دقت یا حتی کندی در همگرایی شود.

شکل ۵، رفتار همگرایی خطا را در حل عددی معادله برگرز کسری نشان می‌دهد، که در آن تعداد زیردامنه‌ها ثابت بر روی $M = 64$ با ضریب پخش ثابت $\varepsilon = 1$ قرار دارد. محور افقی نشان‌دهنده درجه چندجمله‌ای N است که از $N = 2$ تا $N = 10$ تغییر می‌کند در حالی که محور عمودی خطا را در مقیاس لگاریتمی نمایش می‌دهد.

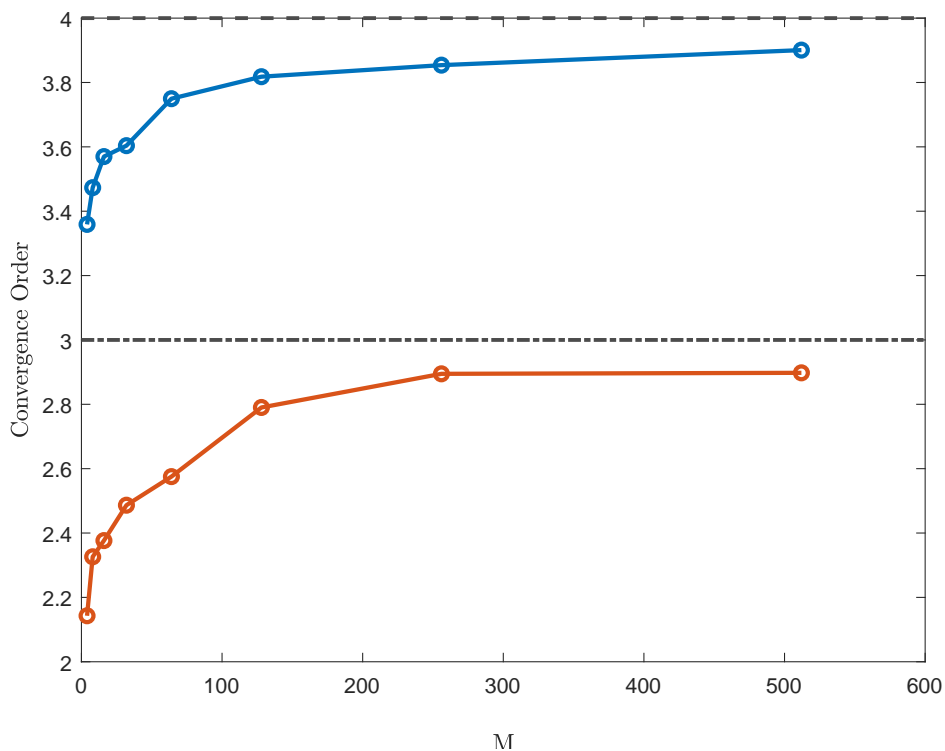


شکل ۵: مقایسه خطا به ازای N ‌های متفاوت برای مقادیر متفاوت σ

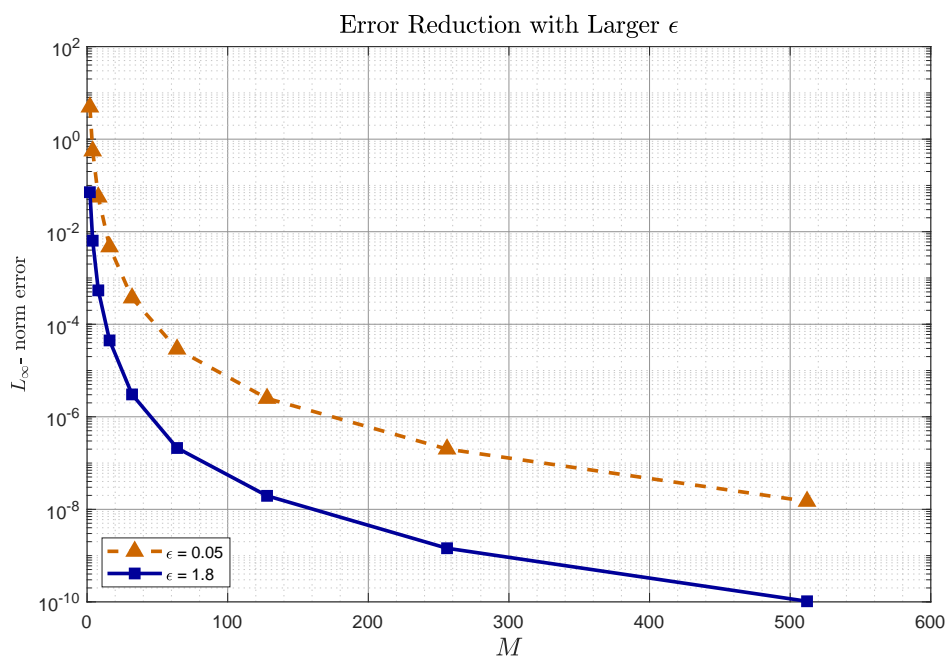
سه رویکرد مختلف جریمه برای مدیریت شرایط مرزی مورد بررسی قرار گرفته‌اند: منحنی سبز که مربوط به رویکرد پیشنهادی با اعمال جریمه تطبیقی است، نرخ همگرایی تندتری را نشان می‌دهد. این عملکرد برتر به تنظیم پویای پارامتر جریمه تطبیقی بر اساس شاخص $d(x_e)$ نسبت داده می‌شود، که نقش مهمی در کاهش نوسانات شار در مرزها و ارتقای پایداری موضعی دارد. نمودار مربوط به عبارت جریمه $\sigma = 1000$ ، نرخ همگرایی کندتری نسبت به جریمه تطبیقی دارد که نشان‌دهنده کاهش کندتر خطای بیشینه است. این کمبود به دلیل عدم توانایی جریمه ثابت در مدیریت تغییرات موضعی در مرتبه کسری $\alpha(x)$ است. همچنین، منحنی مربوط به جریمه ثابت با جریمه $\sigma = 100$ عملکرد بسیار ضعیف‌تری نسبت به دو رویکرد دیگر نشان می‌دهد که حاکی از ناکارآمدی مقادیر ثابت پایین‌تر در کنترل اثرات غیرموضعی است. این رویکرد همچنین نشان می‌دهد که اشباع خطا به صورت زود هنگام‌تری اتفاق می‌افتد که به دلیل ناتوانی در مدیریت نوسانات شار در مرزهای زیردامنه‌ها است. به‌طور دقیق‌تر، در تمام رویکردهایی که عبارت جریمه ثابت در نظر گرفته شده است، افزایش ملایم خطا در مقادیر بالا مشاهده می‌شود که به ظهور پدیده رانگ نسبت داده می‌شود. این پدیده در تقریب‌های درجه بالا معمولاً به وجود می‌آید و منجر به نوسانات عددی در مرزهای زیردامنه‌ها می‌شود، در حالیکه، رویکرد پیشنهادی با اعمال نرخ جریمه تطبیقی، بهترین عملکرد را در مقابله با این پدیده نشان می‌دهد، چراکه تنظیمات پویای آن قادر است شرایط مرزی را به نحو بهینه‌تر مدیریت کند.

شکل ۶، با پارامتر ویسکوزیته $\epsilon = 1$ به بررسی تأثیر عبارت جریمه تطبیقی بر نرخ همگرایی با توجه به ریزسازی دامنه و درجه چندجمله‌ای N می‌پردازد و بستری نظری برای بهره‌گیری از جریمه تطبیقی به منظور ارتقای کارایی روش فراهم می‌سازد. افزون بر این، نتایج نشان می‌دهند که مرتبه همگرایی به درجه تقریب در هر زیربازه وابسته است. بدین ترتیب، برای $N = 3$ مرتبه همگرایی به مقدار ۳ میل می‌کند در حالی که برای $N = 4$ این مرتبه به ۴ نزدیک می‌شود. این وابستگی توانایی روش را در دستیابی به دقت طیفی برای معادلات دیفرانسیل کسری وابسته به مرتبه متغیر برجسته می‌سازد و با نتایج بدست آمده در مرجع [۲] تطابق دارد.

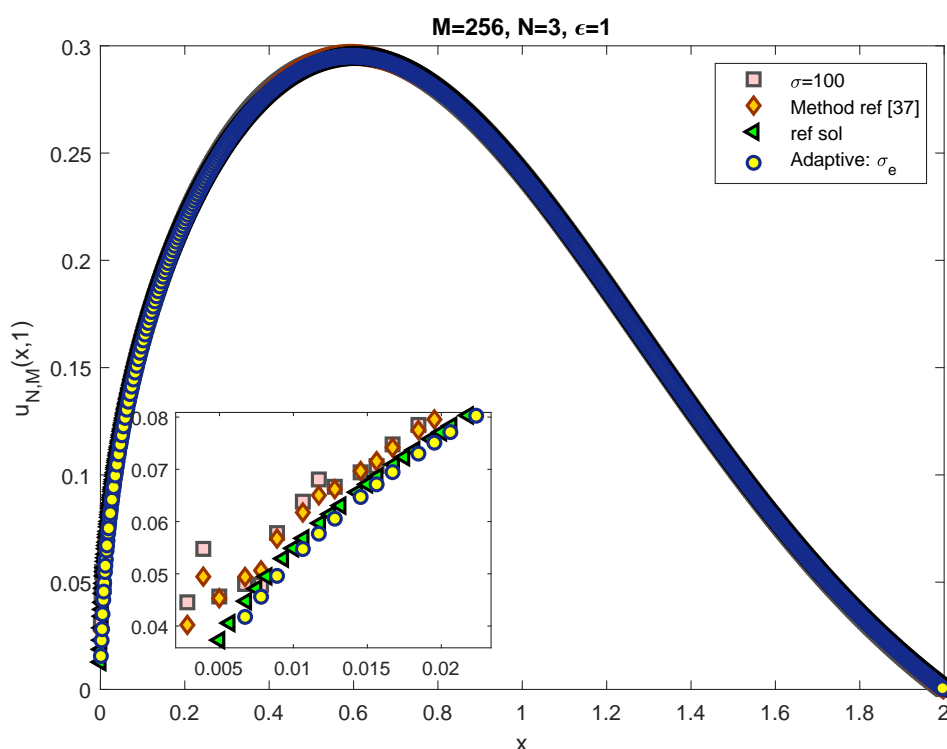
شکل ۷، وابستگی کاهش خطا به ریزسازی دامنه و ضریب پخش ϵ را تأکید دارد. به عبارت دقیق‌تر، از آنجا که کاهش ویسکوزیته به معنای کاهش اثر هموارکنندگی است، در نتیجه شوک‌ها تیزتر و باریک‌تر می‌شوند و در نتیجه در حضور ضریب پخش ضعیف، خطا کندتر کاهش می‌یابد.



شکل ۶: نمایش مرتبه همگرایی برای $N = ۳$ و $N = ۴$



شکل ۷: مقایسه کاهش خطا با $N = ۴$ ثابت و افزایش M با ضریب پخش متفاوت



شکل ۸: مقایسه رفتار جواب عددی معادله برگرز کسری به ازای 10^2 , 10^3 و $\sigma(x)$ با جواب مرجع

در شکل ۸، جواب عددی معادله برگرز کسری (۱.۱) برای $t = 1$ و $\Delta t = 10^{-3}$ برای دو مقدار از پارامتر جریمه شامل $\sigma = 100$ و یک تابع جریمه تطبیقی σ_e به همراه حل با استفاده از روش مرجع [۳۷] نشان داده شده است. همچنین جواب مرجع به عنوان خط مرجع برای ارزیابی دقت روش ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهند که وجود عبارت جریمه به ویژه در مناطقی که شیب تند و لایه‌های مرزی وجود دارد ($x = 0$) نقش تعیین‌کننده‌ای در کاهش ناپایداری‌های عددی و اصلاح رفتار تکینگی ابتدایی دامنه دارد. در حالی که با استفاده از مقدار ثابت $\sigma = 100$ نوسانات قابل توجهی در ناحیه ابتدایی مشاهده می‌شود، افزایش مقدار $\sigma = 10^3$ در روش به کار گرفته شده در [۳۷] منجر به کاهش این نوسانات و ایجاد یک رفتار هموارتر می‌شود. از طرفی دیگر، استفاده از تابع جریمه تطبیقی σ_e که در نقاط حساس مثلاً نزدیکی $x = 0$ افزایش یافته است، امکان اصلاح قوی‌تر و همزمان، کنترل دقیق‌تری بر ناپایداری‌ها را فراهم می‌کند، به طوری که، بدون نیاز به استفاده از شبکه‌های درجه‌بندی، قادر به تقویت پایداری در نواحی حساس است. علاوه بر این، مقایسه با روش ارائه‌شده در مرجع [۳۷] نشان می‌دهد که روش جریمه تطبیقی، با انتخاب هوشمندانه پارامتر جریمه می‌تواند در کاهش نوسانات و بهبود دقت عملکرد بهتری نسبت به روش‌های با جریمه ثابت داشته باشد در حالی که نیاز به ریزسازی شبکه کمتری دارد. این نتیجه نشان‌دهنده این واقعیت است که رویکرد جریمه تطبیقی یک راه‌حل مؤثر برای مدیریت ناپایداری‌های عددی در روش‌های طیفی با شبکه‌های یکنواخت است.

۴ نتیجه‌گیری و پیشنهادات آینده

در این مقاله، یک رویکرد ترکیبی مبتنی بر روش المان طیفی با اعمال نرخ جریمه تطبیقی برای گسسته‌سازی مکانی و روش کرانک-نیکلسون لپ فراگ برای گسسته‌سازی زمانی، برای حل عددی معادله برگرز کسری با مرتبه متغیر

ارائه شد که قادر به مدیریت تغییرات موضعی در مرتبه کسری $\alpha(x)$ است. رویکرد جریمه تطبیقی که در آن پارامتر σ_e بر اساس شاخص $d(x_e) = \min(|\alpha(x_e) - 1|, |\alpha(x_e) - 2|)$ تنظیم می‌شود نه تنها نرخ همگرایی را بهبود می‌بخشد بلکه از ناپایداری‌های عددی ناشی از درجات بالای چندجمله‌ای $N > 8$ و تغییرات تند α جلوگیری می‌کند. نتایج عددی نشان دادند که این روش در مقایسه با جریمه‌های ثابت، خطا را بیشتر کاهش می‌دهد و همگرایی نمایی را در حضور شبکه‌های طولانی حفظ می‌کند.

مراجع

- [1] T. Akram, M. Abbas, A. I. Ismail, N. M. L. Nik Long, and A. R. Ali, "An efficient numerical technique for solving time fractional Burgers equation," *Alexandria Engineering Journal*, vol. 59, pp. 2201–2220, 2020.
- [2] N. Ayazi, P. Mokhtary, and B. P. Moghaddam, "Efficiently solving fractional delay differential equations of variable order via an adjusted spectral element approach," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 181, p. 114635, 2024.
- [3] R. L. Bagley and P. Torvik, "A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity," *Journal of Rheology*, vol. 27, pp. 201–210, 1983.
- [4] R. L. Bagley and P. J. Torvik, "Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures," *AIAA Journal*, vol. 23, pp. 918–925, 1985.
- [5] E. Barkai, "Fractional Fokker-Planck equation, solution, and application," *Physical Review E*, vol. 63, p. 046118, 2001.
- [6] R. T. Baillie, "Long memory processes and fractional integration in econometrics," *Journal of Econometrics*, vol. 73, pp. 5–59, 1996.
- [7] F. Chen, Q. Xu, and J. S. Hesthaven, "A multi-domain spectral method for time-fractional differential equations," *Journal of Computational Physics*, vol. 293, pp. 157–172, 2015.
- [8] M. D. Ruiz-Medina, V. V. Anh, and J. M. Angulo, "Fractional generalized random fields of variable order," *Stochastic Analysis and Applications*, vol. 22, pp. 775–799, 2004.
- [9] W. Deng, "Finite element method for the space and time fractional Fokker-Planck equation," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 47, pp. 204–226, 2008.
- [10] K. Diethelm and A. D. Freed, "On the solution of nonlinear fractional-order differential equations used in the modeling of viscoplasticity," *Scientific Computing in Chemical Engineering II*, pp. 217–224, 1999.
- [11] K. T. Elgindy, "Hybrid shifted Gegenbauer integral-pseudospectral method for solving time-fractional Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation," *arXiv preprint arXiv:2501.00000*, 2025.

- [12] N. J. Ford, J. Xiao, and Y. Yan, "A finite element method for time fractional partial differential equations," *Fractional Calculus and Applied Analysis*, pp. 454–474, 2011.
- [13] H. Hassani and E. Naraghirad, "A new computational method based on optimization scheme for solving variable-order time fractional Burgers' equation," *Mathematics and Computers in Simulation*, pp. 1–17, 2019.
- [14] Y. Jiang and J. Ma, "High-order finite element methods for time-fractional partial differential equations," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, pp. 3285–3290, 2011.
- [15] K. Kikuchi and A. Negoro, "On Markov process generated by pseudodifferential operator of variable order," *Osaka Journal of Mathematics*, vol. 34, pp. 319–335, 1997.
- [16] X. Li and C. Xu, "A space-time spectral method for the time fractional diffusion equation," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 47, pp. 2108–2131, 2009.
- [17] X. Li and C. Xu, "Existence and uniqueness of the weak solution of the space-time fractional diffusion equation and a spectral method approximation," *Communications in Computational Physics*, vol. 8, pp. 1016–1051, 2010.
- [18] C. Li, F. Zeng, and F. Liu, "Spectral approximations to the fractional integral and derivative," *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 15, pp. 383–406, 2012.
- [19] Y. Lian, Y. Ying, S. Tang, S. Lin, G. J. Wagner, and W. K. Liu, "A Petrov-Galerkin finite element method for the fractional advection-diffusion equation," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 309, pp. 388–410, 2016.
- [20] Y. Lin and C. Xu, "Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation," *Journal of Computational Physics*, vol. 225, pp. 1533–1552, 2007.
- [21] F. Liu, V. Anh, and I. Turner, "Numerical solution of the space fractional Fokker-Planck equation," *Computational and Applied Mathematics*, pp. 209–219, 2004.
- [22] M. M. Meerschaert and C. Tadjeran, "Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations," *Computational and Applied Mathematics*, vol. 172, pp. 65–77, 2004.
- [23] M. M. Meerschaert, H.-P. Scheffler, and C. Tadjeran, "Finite difference methods for two-dimensional fractional dispersion equation," *Computational Physics*, vol. 211, pp. 249–261, 2006.
- [24] R. Metzler and J. Klafter, "The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach," *Physics Reports*, vol. 339, pp. 1–77, 2000.
- [25] R. Metzler and J. Klafter, "The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics," *Physics A: Mathematical and General*, vol. 37, pp. R161–R208, 2004.

- [26] M. K. Rawani, A. K. Verma, and C. Cattani, "An efficient algorithm for solving the variable-order time-fractional generalized Burgers' equation," *Applied Mathematics and Computing*, vol. 70, pp. 5269–5291, 2024.
- [27] M. D. Ruiz-Medina, V. V. Anh, and J. M. Angulo, "Fractional generalized random fields of variable order," *Stochastic Analysis and Applications*, vol. 22, pp. 775–799, 2004.
- [28] Z.-Z. Sun and X. Wu, "A fully discrete difference scheme for a diffusion-wave system," *Applied Numerical Mathematics*, vol. 56, pp. 193–209, 2006.
- [29] C. Tadjeran, M. M. Meerschaert, and H.-P. Scheffler, "A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation," *Computational Physics*, vol. 213, pp. 205–213, 2006.
- [30] W. Y. Tian, W. Deng, and Y. Wu, "Polynomial spectral collocation method for space fractional advection-diffusion equation," *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, vol. 30, pp. 514–535, 2014.
- [31] H. Wang, D. Yang, and S. Zhu, "A Petrov-Galerkin finite element method for variable-coefficient fractional diffusion equations," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 290, pp. 45–56, 2015.
- [32] M. Zayernouri and G. E. Karniadakis, "Fractional spectral collocation method," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 36, pp. A40–A62, 2014.
- [33] F. Zeng, Z. Zhang, and G. E. Karniadakis, "A generalized spectral collocation method with tunable accuracy for variable-order fractional differential equations," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 37, pp. A2710–A2732, 2015.
- [34] F. Zeng, Z. Mao, and G. E. Karniadakis, "A generalized spectral collocation method with tunable accuracy for fractional differential equations with end-point singularities," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 39, pp. A360–A383, 2017.
- [35] Y.-N. Zhang, Z.-Z. Sun, and H.-W, "Error estimates of Crank-Nicolson-type difference schemes for the subdiffusion equation," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 49, pp. 2302–2322, 2011.
- [36] X. Zhao, Z.-Z. Sun, and Z.-P. Hao, "A fourth-order compact ADI scheme for two-dimensional nonlinear space fractional Schrödinger equation," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 36, pp. A2865–A2886, 2014.
- [37] T. Zhao, Z. Mao, and G. E. Karniadakis, "Multi-domain spectral collocation method for variable-order nonlinear fractional differential equations," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 348, pp. 377–395, 2019.
- [38] Y. Zheng, C. Li, and Z. Zhao, "A note on the finite element method for the space-fractional advection diffusion equation," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 59, pp. 1718–1726, 2010.

- [39] H. Zhou, W. Tian, and W. Deng, “Quasi-compact finite difference schemes for space fractional diffusion equations,” *Scientific Computing*, vol. 56, pp. 45–66, 2013.
- [40] P. Zhuang, F. Liu, V. Anh, and I. Turner, “Numerical methods for the variable-order fractional advection-diffusion equation with a nonlinear source term,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 47, pp. 1760–1781, 2009.