Kharazmi University

Mathematical Research

Year 2026, Volume 11, Issue 4, pp. 104–113

Print ISSN: 2588-2546

Online ISSN: 2588-2554

DOI: xxxx

(Weakly) Compact Multipliers on Closed Ideals of Convolution Algebras of Nuclear Operators

Sima Soltani Renani [(1)] [1] and Mehdi Nemati[(2)]

[(1),(2)] Department of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

Received: 11 September 2023 Accepted: 15 December 2025 Published online:25 February 2026

Abstract: The space of trace-class or nuclear operators was studied by Grothendieck. In recent years, Neufang defined a new convolution product on this space, turning it into a Banach algebra. Many researchers have since investigated the properties of this Banach algebra. In this article, we study the existence of left and right (weakly) compact multipliers on a closed ideal J of the convolution algebra of nuclear operators, and as a result, characterize J as an ideal in its second dual.

Keywords: Compact multiplier, nuclear operators, convolution product, locally compact group.

©2026 Kharazmi University, Tehran, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[1]Corresponding author

E-mail addresses: (Sima Soltani Renani) simasoltani@iut.ac.ir, (Mehdi Nemati) m.nemati@iut.ac.ir

پژوهش‌های ریاضی

شاپا چاپی: ۲۵۸۸-۲۵۴۶

شاپا الکترونیکی: ۲۲۸۸-۲۵۵۴

DOI: xxxx

سال ۱۴۰۴، دوره ۱۱، شماره ۴، ص ۱۰۴–۱۱۳

دانشگاه خوارزمی

ضربگرهای فشرده (ضعیف) بر ایدآل‌های بسته از جبرهای پیچشی عملگرهای هسته‌ای

سیما سلطانی رنانی[(۱)] [۱] و مهدی نعمتی [(۲)]

[(۱),(۲)] دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۶/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۹/۲۴ تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۱۲/۷

چکیده: فضای عملگرهای رده اثر یا هسته‌ای توسط گروتندیک مورد توجه قرار گرفت. در سال‌های اخیر نئوفانگ یک ضرب پیچشی جدید روی این فضا تعریف کرد و آن را به یک جبر باناخ تبدیل کرد. دانشمندان زیادی ویژگی‌های این جبر باناخ را بررسی کردند. در این مقاله وجود ضربگرهای چپ و راست فشرده (ضعیف) بر ایدآل بسته J از جبر پیچشی عملگرهای هسته‌ای را بررسی می‌کنیم و نتیجه‌ی آن، ایدآل بودن J را در دوگان دومش مشخصه سازی می‌کند.

واژه‌هاي کليدي: ضربگر فشرده (ضعیف)، عملگرهای هسته‌ای، ضرب پیچشی، گروه فشرده موضعی.

۱ مقدمه

فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند. فضای باناخ تمام عملگرهای خطی و کراندار از X به Y را با نماد $B(X,Y)$ نشان می‌دهیم. فضاهای باناخ متعددی به عنوان زیرفضای $B(X,Y)$ شناخته شده‌اند؛ از جمله می‌توان به فضای عملگرهای هسته‌ای اشاره کرد. عملگر $T \in B(X,Y)$ ، عملگر هسته‌ای نام دارد اگر دنباله‌های کراندار $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ در Y^* و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ در Y با شرط $\sum_{n=1}^{\infty}\|\varphi_n\|_{Y^*}\|y_n\|_Y < \infty$ به گونه‌ای یافت شوند که به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) y_n.$$

[۱]نویسنده مسئول مقاله

(Sima Soltani Renani) simasoltani@iut.ac.ir, (Mehdi Nemati) m.nemati@iut.ac.ir

مجموعه‌ی تمام عملگرهای هسته‌ای از X به Y را با نماد $\mathcal{N}(X,Y)$ نشان می‌دهیم. با نرم هسته‌ای زیر

$$\|T\|_{\mathcal{N}} = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\|\varphi_n\|_{Y^*}\|y_n\|_Y \,:\, T(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)y_n\right\}$$

تبدیل به یک فضای باناخ می‌شود.

اکنون فرض کنیم G یک گروه فشرده‌ی موضعی با اندازه هر چپ μ باشد. می‌دانیم

$$L^2(G)=\left\{f:G\to\mathbb{C}: \int_G |f|^2 d\mu<\infty\right\}$$

یک فضای هیلبرت است. فضای باناخ $B(L^2(G))$ از تمام عملگرهای خطی و کراندار روی $L^2(G)$ را در نظر می‌گیریم. عملگرهای رده اثر $\mathcal{T}(L^2(G))$ در واقع حالت خاصی از عملگرهای هسته‌ای $\mathcal{N}(X,Y)$ هستند که در آن به جای X و Y همان فضای هیلبرت $L^2(G)$ قرار می‌گیرد. فضای $\mathcal{T}(L^2(G))$ ساختاری به‌صورت زیر دارد:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(L^2(G)) &\cong L^2(G)\widehat{\otimes}L^2(G)\\ &= \left\{\xi=\sum_{n=1}^{\infty}g_n\otimes h_n\in B(L^2(G)) : g_n,h_n\in L^2(G), \sum_{n=1}^{\infty}\|g_n\|_2\|h_n\|_2<\infty\right\}.\end{aligned}$$

که در آن $\widehat{\otimes}$ ضرب تانسوری تصویری فضاهای باناخ است. همانطور که اشاره شد فضاهای باناخ متعددی به عنوان زیر فضای $B(L^2(G))$ وجود دارند. جایگاه فضای باناخ $\mathcal{T}(L^2(G))$ را در این بین به‌صورت زیر مشاهده می‌کنیم:

$$\mathcal{F}(L^2(G))\subseteq\mathcal{T}(L^2(G))\subseteq\mathcal{K}(L^2(G))\subseteq B(L^2(G)). \qquad (1)$$

که در آن $\mathcal{F}(L^2(G))$ فضای عملگرهای از مرتبه‌ی متناهی و $\mathcal{K}(L^2(G))$ فضای عملگرهای فشرده روی $L^2(G)$ است. علاوه بر (۱)، روابط دیگری بین این فضاها وجود دارند، از جمله اینکه فضای $\mathcal{F}(L^2(G))$ در $\mathcal{T}(L^2(G))$ چگال است. همچنین روابط دوگانگی که می‌توان بین فضاهای $\mathcal{T}(L^2(G)),\mathcal{K}(L^2(G))$ و $B(L^2(G))$ به آن اشاره کرد، دو رابطه‌ی مهم زیر می‌باشند

$$\left[\mathcal{K}(L^2(G))\right]^*=\mathcal{T}(L^2(G)),\quad \left[\mathcal{T}(L^2(G))\right]^*=B(L^2(G)).$$

برای اطلاعات بیشتر در این زمینه، به [۱] مراجعه کنید.

تبدیل کردن یک فضای باناخ به یک جبر باناخ توسط یک ضرب جبری، از جمله مباحث ارزشمندی است که همواره در آنالیز هارمونیک مورد توجه قرار گرفته است. به‌ویژه در مواردی که عمل ضرب جبر، پیچش باشد. از طرف دیگر، عملگرهای رده اثر یا عملگرهای هسته‌ای، بخش قابل توجهی از نظریه عملگرها را به خود اختصاص داده‌اند. ترکیب این دو مفهوم، یعنی پیچش روی عملگرهای هسته‌ای، ایده‌ای جدید را به همراه دارد. ایده‌ی این پیچش، از پیچش جبر گروهی $(L^1(G),*)$ به وجود آمده است. در سال‌های اخیر برخی از انواع جبرهای ناجابجایی از $L^1(G)$ به‌طور متمرکز مورد مطالعه قرار گرفته‌اند که از جمله می‌توان به پیچش ناجابجایی نئوفانگ روی عملگرهای

هسته‌ای اشاره کرد [۲].

نئوفانگ ثابت کرد $(\mathcal{T}(L^2(G)), *)$ یک جبر باناخ شرکت‌پذیر با یک همانی تقریبی کراندار راست از نرم ۱ است. این جبر پیچشی، ناجابجایی است. بررسی‌های نئوفانگ نشان می‌دهند که جبر باناخ $\mathcal{T}(L^2(G))$ با این ضرب پیچشی جدید را می‌توان به عنوان حالت ناجابجایی از $(L^1(G), *)$ در نظر گرفت. این جبر باناخ در برخی موارد رفتاری شبیه به جبر گروهی $L^1(G)$ دارد. همچنین در برخی موارد، تفاوت‌های زیادی بین این دو جبر پیچشی مشاهده شده است. همچنین ضرب پیچشی روی $T(L^2(G))$ متفاوت از ترکیب عملگرهاست.

نئوفانگ ثابت کرد $(\mathcal{T}(L^2(G)), *)$ دارای یک همانی راست است اگر و تنها اگر G گسسته باشد. این جبر باناخ همانی دو طرفه ندارد؛ مگر در حالت بدیهی $G = \{e_G\}$ در صورتی که $L^1(G)$ همانی دو طرفه دارد اگر و تنها اگر G گسسته باشد. همچنین $\mathcal{T}(L^2(G))$ همواره همانی تقریبی کراندار راست دارد ولی هرگز همانی تقریبی کراندار چپ ندارد مگر در حالت بدیهی $G = \{e_G\}$. در حالی که $L^1(G)$ همواره همانی تقریبی کراندار دو طرفه دارد. در سال‌های اخیر دانشمندان زیادی در مورد جبر $\mathcal{T}(L^2(G))$ تحقیق و مطالعه کرده‌اند و موضوعات متفاوتی در آنالیز ریاضی را برای این جبر باناخ بررسی کرده‌اند. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به [۳]، [۴] و [۵] مراجعه کنید.

از طرف دیگر، یکی از مفاهیم مهم و کاربردی در آنالیز ریاضی مطالعه در مورد وجود ضربگرهای فشرده (ضعیف) بر روی جبرهای باناخ می‌باشد. چارلز آکمن در [۶] وجود ضربگرهای فشرده (ضعیف) بر جبر گروهی $L^1(G)$ برای گروه فشرده موضعی G را مورد مطالعه قرار داده است. در [۷] و [۸] ضربگرهای فشرده (ضعیف) راست بر دوگان دوم $L^1(G)$ مطالعه شده است و در ادامه می‌توان به نتایج ارزشمند لوزرت [۹] در مورد ضربگرهای چپ فشرده ضعیف بر دوگان دوم $M(G)$ و $L^1(G)$ اشاره کرد.

در این مقاله وجود ضربگرهای چپ و راست فشرده (ضعیف) روی ایدال بسته $\mathcal{T}(L^2(G))$ را بررسی می‌کنیم و به عنوان نتیجه آن ایدال بودن J در دوگان دوم آن را مشخصه‌سازی می‌کنیم.

۲ تعاریف

در این بخش به معرفی جبر باناخ پیچشی $\mathcal{T}(L^2(G))$ برای گروه فشرده موضعی G می‌پردازیم و مقدمات لازم برای بیان موضوع اصلی را مطرح می‌کنیم. ابتدا نگاشت دو خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \alpha : B(L^1(G)) \times \mathcal{T}(L^1(G)) \to L^\infty(G) \\ (T, \xi) \mapsto \begin{cases} \alpha(T, \xi) : G \to \mathbb{C} \\ (\alpha(T, \xi))(t) := \langle L_{t^{-1}} T L_t, \xi \rangle \end{cases} \end{cases}$$

به‌طوری که $t \in G, \xi \in \mathcal{T}(L^1(G)), T \in B(L^1(G))$ و $L_t : L^2(G) \to L^2(G)$ با ضابطه زیر

$$L_t(g)(x) = g(t^{-1}x)$$

می‌باشد، که در آن $x \in G$ و $g \in L^2(G)$. همچنین نمایش زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \beta : L^\infty(G) \to B(L^1(G)) \\ \varphi \mapsto \begin{cases} \beta(\varphi) := M_\varphi : L^2(G) \to L^2(G) \\ (\beta(\varphi))(g) = M_\varphi(g) = \varphi g \end{cases} \end{cases}$$

که در آن $g \in L^{۲}(G)$ و $\varphi \in L^{\infty}(G)$. سپس نگاشت دو خطی $\bullet$ را که ترکیب نگاشت‌های α و β است، به‌صورت زیر داریم:

$$\begin{cases} \bullet := \beta \circ \alpha : B(L^{۱}(G)) \times T(L^{۱}(G)) \to B(L^{۱}(G)) \\ T \bullet \xi = \beta(\alpha(T,\xi)) : L^{۲}(G) \to L^{۲}(G) \\ (T,\xi) \mapsto \Big\{ g \mapsto \quad \begin{cases} [\beta(\alpha(T,\xi))](g) = M_{\alpha(T,\xi)}(g) \\ = \alpha(T,\xi)g : G \to \mathbb{C} \\ (\alpha(T,\xi)g)(t) = \alpha(T,\xi)(t)g(t) \\ = \langle L_{t^{-۱}} T L_t, \xi \rangle g(t) \end{cases} \end{cases} \tag{۲}$$

به‌طوری که $T \in B(L^{۲}(G))$ و $\xi \in \mathcal{T}(L^{۲}(G))$، $g \in L^{۲}(G)$ و $t \in G$. در نهایت ضرب پیچشی جدید $*$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} * : \mathcal{T}(L^{۲}(G)) \times \mathcal{T}(L^{۲}(G)) \to \mathcal{T}(L^{۱}(G)) \\ \langle \xi * \eta, T \rangle = \langle T, \xi * \eta \rangle = \langle T \bullet \xi, \eta \rangle \end{cases} \tag{۳}$$

که در آن $T \in B(L^{۱}(G))$ و $\xi,\eta \in \mathcal{T}(L^{۲}(G))$. حال قصد داریم ضابطه این پیچش جدید را معرفی کنیم. با توجه به تعریف $\bullet$ داریم:

$$\begin{aligned} (T \bullet \xi)(g) &= \langle L_{t^{-۱}} T L_t, \xi \rangle g \\ &= \left[\beta(\langle L_{t^{-۱}} T L_t, \xi \rangle)\right](g) \\ &= M\langle L_{t^{-۱}} T L_t, \xi \rangle (g), \end{aligned}$$

بنابراین

$$(T \bullet \xi) = \beta(\langle L_{t^{-۱}} T L_t, \xi \rangle) = M\langle L_{t^{-۱}} T L_t, \xi \rangle. \tag{۴}$$

اکنون نشاننده $\iota : L^{\infty}(G) \hookrightarrow B(L^{۱}(G))$ را با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم:

$$\iota(\varphi) = \beta(\varphi) = M_{\varphi} \quad (\varphi \in L^{\infty}(G)) \tag{۵}$$

که در آن برای هر $t \in G$ $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t^{-۱})$. همچنین نشاننده ι، نگاشتی ضعیف*ـضعیف* پیوسته است و در نتیجه دارای نگاشت پیش‌الحاق $\sigma : \mathcal{T}(L^{۲}(G)) \to L^{۱}(G)$ است. بنابراین $\iota = \sigma^{*}$. اکنون برای هر

$\xi, \eta \in \mathcal{T}(L^2(G))$ بنابر روابط (۴) و (۵) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\langle T \bullet \xi, \eta\rangle &= \langle \beta\left(\langle L_{t^{-1}} T L_t, \xi\rangle\right), \eta\rangle = \langle \iota\left(\langle L_t T L_{t^{-1}}, \xi\rangle\right), \eta\rangle \\
&= \langle \sigma^*\left(\langle L_t T L_{t^{-1}}, \xi\rangle\right), \eta\rangle = \langle\langle L_t T L_{t^{-1}}, \xi\rangle, \sigma(\eta)\rangle \\
&= \int_G \langle L_t T L_{t^{-1}}, \xi\rangle \sigma(\eta)(t)\, d\mu(t) = \int_G \langle T, L_{t^{-1}} \xi L_t\rangle \sigma(\eta)(t)\, d\mu(t) \\
&= \langle T, \int_G^W L_{t^{-1}} \xi L_t \sigma(\eta)(t)\, d\mu(t)\rangle.
\end{aligned} \tag{۶}$$

که در آن $\int_G^W L_{t^{-1}} \xi L_t \sigma(\eta)(t)\, d\mu(t)$ انتگرال ضعیف نسبت به μ است. سرانجام با توجه به روابط بالا داریم:

$$\xi * \eta = \int_G^W L_{t^{-1}} \xi L_t\, \sigma(\eta)(t)\, d\mu(t) \quad (\xi, \eta \in \mathcal{T}(L^2(G))).$$

نئوفانگ در قضیه‌ی ۵۰۳۰۱ از مرجع [۲] اثبات می‌کند که نگاشت σ یک هم‌ریختگی جبری پوشا نیز می‌باشد. در ادامه به نتایج و تعاریفی نیاز داریم که در روند اثبات‌های نتایج اصلی مورد استفاده قرار می‌گیرند و با ذکر مراجع دقیق آنها را بیان می‌کنیم.

ملاحظه ۱.۲. *در مراجع [۱۰] و [۱۱] برای گروه کوانتومی $\mathbb{G}$ با استفاده از عملگر یکانی چپ W روی $L^2(\mathbb{G}) \otimes L^2(\mathbb{G})$ یک ضرب پیچشی بر $\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}))$ معرفی می‌کند و با نماد $\triangleleft$ نمایش می‌دهد. در این حالت $(\mathcal{T}(L^2(\mathbb{G}), \triangleleft)$ به یک جبر باناخ تبدیل می‌شود. در حالتی که G یک گروه فشرده موضعی باشد جبر پیچشی نئوفانگ $(\mathcal{T}(L^2(G)), *)$ برابر با $(\mathcal{T}(L^2(G), \triangleleft))^{op}$ خواهد بود و بنابراین با توجه به اینکه $B(L^2(G))$ به‌طور طبیعی یک $(\mathcal{T}(L^2(G), \triangleleft)$ ـ مدول باناخ دوطرفه است برای هر $\xi \in \mathcal{T}(L^2(G))$ و $T \in B(L^2(G))$ داریم:*

$$\xi \bullet T = T \triangleleft \xi, \quad T \bullet \xi = \xi \triangleleft T.$$

بنابراین نتایج به‌دست آمده در مرجع [۱۱]، $L^\infty(G)$ یک $(\mathcal{T}(L^2(G)), *)$ ـ زیرمدول از $B(L^2(G))$ است و به‌خصوص برای هر $T \in L^\infty(G)$ و $\xi \in \mathcal{T}(L^2(G))$ داریم:

$$\xi \bullet T = T \cdot \sigma(\xi), \quad T \bullet \xi = \sigma(\xi) \cdot T \in L^\infty(G).$$

قابل ذکر است که جبر گروهی $L^1(G)$ با عمل پیچش یک جبر باناخ است و $L^\infty(G)$ با عمل طبیعی به یک $L^1(G)$ ـ مدول باناخ دو طرفه تبدیل می‌شود [۱۲].

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد. در این صورت نگاشت خطی $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ را یک ضربگر چپ روی $\mathcal{A}$ نامیم هرگاه برای هر $a, b \in \mathcal{A}$ داشته باشیم $T(ab) = T(a)b$ و آن را ضربگر راست $\mathcal{A}$ نامیم هرگاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $T(ab) = aT(b)$.

برای هر $a \in \mathcal{A}$، عملگر $l_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ با ضابطه $l_a(b) = ab$ یک ضربگر چپ روی A و عملگر $r_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ با ضابطه $r_a(b) = ba$ یک ضربگر راست روی A است.

ضربگر $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ را فشرده (ضعیف) گوییم هرگاه $\overline{T(B_{\mathcal{A}})}$ در $\mathcal{A}$ فشرده (ضعیف) باشد که منظور از $B_{\mathcal{A}}$ همان گوی یکه $\mathcal{A}$ است.

اثبات لم زیر به‌راحتی از تعاریف حاصل می‌شود.

لم ۲.۲. *فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو جبر باناخ باشند و $\varphi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ یک همریختی پوشا باشد. در این صورت اگر برای $a\in\mathcal{A}$، ضربگر l_a فشرده (ضعیف) روی $\mathcal{A}$ باشد، آن‌گاه $l_{\varphi(a)}$ نیز یک ضربگر فشرده (ضعیف) روی $\mathcal{B}$ است.*

ملاحظه ۳.۲. *فرض کنیم G یک گروه فشرده موضعی و $\lambda,\rho:G\to B(L^2(G))$ به‌ترتیب نمایش منظم چپ و راست روی G باشند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:*

$$\lambda(s)f(t)=f(s^{-1}t),\quad \rho(s)f(t)=\Delta(s)^{\frac{1}{2}}f(ts)\quad (f\in L^1(G),s,t\in G)$$

که در آن $\Delta:G\to(0,\infty)$ تابع مدولی روی G می‌باشد. در این صورت اگر قرار دهیم

$$L(G):=\{\lambda(s):s\in G\}'',\quad R(G):=\{\rho(s):s\in G\}'',$$

آن‌گاه $L(G)$ و $R(G)$ به‌ترتیب جبرهای فون نویمان گروهی چپ و راست G نامیده می‌شوند.

اکنون اگر $\mathbb{G}_a=(L^\infty(G),\Gamma_a,\phi_a,\psi_a)$ گروه کوانتومی جابجایی متناظر با جبر فون نویمان جابجایی $L^\infty(G)$ باشد، که در آن نگاشت هم‌ضرب Γ_a با ضابطه $\Gamma_a(f)(s,t)=f(st)$ تعریف می‌شود و ψ_a و ϕ_a در واقع وزن‌های متناظر با اندازه‌های هار چپ و راست روی G هستند. آن‌گاه دوگان گروه کوانتومی $\mathbb{G}_a$ یعنی، $\widehat{\mathbb{G}_a}$ گروه کوانتومی هم‌جابجایی $\mathbb{G}_s=(L(G),\Gamma_s,\phi_s,\psi_s)$ است که در آن نگاشت هم‌ضرب Γ_s با ضابطه $\Gamma_s(\lambda(t))=\lambda(t)\otimes\lambda(t)$ تعریف می‌شود و $\phi_s=\psi_s$ وزن پلانچرل روي $L(G)$ است [۱].

همچنین می‌توان گروه کوانتومی $\mathbb{G}'_a=\mathbb{G}'_s$ متناظر با جبر فون نویمان راست $R(G)$ را نیز تعریف کرد. در این صورت $L^1(\mathbb{G}_a)$ همان جبر گروهی $L^1(G)$ و $L^1(\mathbb{G}_s)=L^1(\mathbb{G}'_s)$ جبر فوریه $A(G)$ هستند و بعلاوه $R(G)=L^\infty(\mathbb{G}'_a)$.

بنابراین با توجه به ملاحظه قبل و نتایج بیان شده در مرجع [۱۳] صفحه ۱۰۵۹ برای گروه‌های کوانتومی، در این حالت خاص می‌توان نتیجه گرفت که $R(G)$ نیز یک $(\mathcal{T}(L^2(G)),*)$ ـ زیرمدول از $B(L^2(G))$ است و به‌خصوص برای هر $T\in R(G)$ و $\xi\in\mathcal{T}(L^2(G))$ داریم:

$$\xi\bullet T=T\triangleleft\xi=\langle\xi,1\rangle T=\left(\int_G\sigma(\xi)\,d\mu\right)T.$$

۳ نتایج اصلی

در این بخش به نتایج اصلی که بر روی ضربگرها می‌باشد، اشاره می‌کنیم.

قضیه ۱.۳. *فرض کنیم G یک گروه فشرده موضعی و J یک ایدال بسته از $\mathcal{T}(L^2(G))$ باشد به‌طوری‌که عضو ξ_0 در J موجود است که $\sigma(\xi_0*\xi_0)\neq 0$. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:*

۱. *گروه G فشرده است.*

۲. *برای هر $\xi\in J$، ضربگر $l_\xi:J\to J$ فشرده است.*

۳. *برای هر $\xi\in J$، ضربگر $l_\xi:J\to J$ فشرده ضعیف است.*

۴. *ضربگر $l_{\xi_0}:J\to J$ فشرده است.*

۵. *ضربگر $l_{\xi_0}:J\to J$ فشرده ضعیف است.*

اثبات. ۲$\Rightarrow$ ۱. فرض کنیم G یک گروه فشرده موضعی باشد. در این صورت بنابر [۱۴] می‌دانیم برای هر $f \in L^1(G)$، ضربگرهای $r_f, l_f : L^1(G) \to L^1(G)$ فشرده اند. اکنون برای هر $\eta \in \mathcal{T}(L^2(G))$ و $T \in B(L^2(G))$ داریم:

$$\begin{aligned}(l_{\zeta*\eta})^*(T) &= \underbrace{(T \bullet \zeta)}_{\in L^\infty(G)} \bullet \eta \\ &= \sigma(\eta) \cdot (T \bullet \zeta) \\ &= \left((r_{\sigma(\eta)})^* \circ (l_\zeta)^*\right)(T).\end{aligned}$$

اما $\sigma(\eta) \in L^1(G)$ و $r_{\sigma(\eta)}$ یک ضربگر راست فشرده روی $L^1(G)$ است. بنابراین با توجه به تساوی‌های فوق $(l_{\zeta*\eta})^*$ نیز فشرده است و در نتیجه $l_{\zeta*\eta}$ روی $\mathcal{T}(L^2(G))$ فشرده است. از طرف دیگر، با توجه به اینکه $\mathcal{T}(L^2(G))$ همانی تقریبی راست کراندار دارد، داریم:

$$\mathcal{T}(L^2(G)) * \mathcal{T}(L^2(G)) = \mathcal{T}(L^2(G)),$$

و این نشان می‌دهد که برای هر $\xi \in \mathcal{T}(L^2(G))$ ، عملگر $l_\xi : J \to J$ فشرده است.

استلزام‌های ۳$\Rightarrow$ ۲، ۵$\Rightarrow$ ۳، ۴$\Rightarrow$ ۲ و ۵$\Rightarrow$۴ واضح است. بنابراین فقط نیاز داریم ۱$\Rightarrow$۵ را اثبات کنیم. بنابراین فرض کنیم $\xi_\circ$ در J وجود دارد که $\sigma(\xi_\circ * \xi_\circ) \neq \circ$ و ضربگر $l_{\xi_\circ}$ فشرده ضعیف است. به‌سادگی دیده می‌شود که $l_{\xi_\circ * \xi_\circ} = l_{\xi_\circ} \circ L_{\xi_\circ}$ که در آن $L_{\xi_\circ} : \mathcal{T}(L^2(G)) \to J$ با ضابطه $L_{\xi_\circ}(\eta) = \xi_\circ * \eta$ می‌باشد. بنابراین $l_{\xi_\circ * \xi_\circ}$ نیز فشرده ضعیف است و بنابر لم ۲.۲، ضربگر $l_{\sigma(\xi_\circ * \xi_\circ)}$ که $\sigma(\xi_\circ * \xi_\circ) \in L^1(G)$ نیز روی $L^1(G)$ فشرده ضعیف است. پس بنابر نتایج [۱۴]، G فشرده است □

قابل ذکر است که جبر باناخ $\mathcal{A}$ در دوگان دوم خود که مجهز به ضرب آرنز اول است ایدآل راست است اگر و تنها اگر برای هر $a \in \mathcal{A}$ ضربگرهای $l_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ فشرده ضعیف باشند. پس بنابراین با توجه به این نکته و قضیه قبل، نتیجه زیر را خواهیم داشت:

نتیجه ۲.۳. *فرض کنیم J یک ایدآل بسته در $\mathcal{T}(L^2(G))$ باشد و $\xi_\circ \in J$ وجود داشته باشد که $\sigma(\xi_\circ * \xi_\circ) \neq \circ$. در این صورت J در دوگان خود ایدآل راست است اگر و تنها اگر G فشرده باشد.*

قضیه ۳.۳. *فرض کنیم G یک گروه فشرده موضعی و J یک ایدال بسته از $\mathcal{T}(L^2(G))$ باشد به‌طوری‌که عضو $\xi_\circ$ در J موجود است که $\int_G \sigma(\xi_\circ)\, d\mu \neq \circ$. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:*

۱. *گروه G متناهی است.*

۲. *برای هر $\xi \in J$ ، ضربگر $r_\xi : J \to J$ فشرده است.*

۳. *برای هر $\xi \in J$ ، ضربگر $r_\xi : J \to J$ فشرده ضعیف است.*

۴. *ضربگر $r_{\xi_\circ} : J \to J$ فشرده است.*

۵. *ضربگر $r_{\xi_\circ} : J \to J$ فشرده ضعیف است.*

اثبات. استلزام‌های ۲$\Rightarrow$ ۱، ۳$\Rightarrow$۲، ۵$\Rightarrow$۳ ، ۴$\Rightarrow$۲ و ۵$\Rightarrow$۴ واضح است. بنابراین فقط نیاز داریم ۱$\Rightarrow$۵ را اثبات کنیم. بنابراین فرض کنیم عنصر $\xi_\circ \in J$ موجود است که $\int_G \sigma(\xi_\circ)(t)\, d\mu(t) \neq \circ$ و ضربگر $r_{\xi_\circ} : J \to J$

فشرده ضعیف باشد. در این صورت ضربگر $r_{\xi_\circ * \xi_\circ} = r_{\xi_\circ} \circ S_{\xi_\circ}$ نیز روی $\mathcal{T}(L^2(G))$ فشرده ضعیف است، که در آن عملگر $S_{\xi_\circ} : \mathcal{T}(L^2(G)) \to J$ با ضابطه $S_{\xi_\circ}(\eta) = \eta * \xi_\circ$ تعریف می‌شود. حال اگر قرار دهیم $\xi := \xi_\circ * \xi_\circ$، آن گاه داریم $\xi \in J$ و $\int_G \sigma(\xi)(t)\, d\mu(t) \neq 0$ و عملگر $(r_\xi)^* : B(L^2(G)) \to B(L^2(G))$ نیز که با ضابطه زیر تعریف می‌شود، فشرده ضعیف است:

$$(r_\xi)^*(T) = \xi \bullet T \quad (T \in B(L^2(G))).$$

در نتیجه عملگر $(r_\xi)^*|_{R(G)} : R(G) \to R(G)$ نیز فشرده است. از طرفی بنابر ملاحظه ؟؟ برای هر $T \in R(G)$ داریم:

$$(r_\xi)^*)(T) = \xi \bullet T = (\int_G \sigma(\xi)\, d\mu) T.$$

بنابراین $(r_\xi)^*$ روی $R(G)$ مانند عملگر همانی عمل می‌کند؛ یعنی، عملگر همانی روی $R(G)$ فشرده است و در نتیجه $R(G)$ یک جبر فون نویمان انعکاسی خواهدشد و بنابراین از [۱۵] گزاره ۱۰۱۱۰۷ می‌توان نتیجه گرفت که $R(G)$ متناهی البعد است و درنتیجه G متناهی است. $\square$

قابل ذکر است که جبر باناخ $\mathcal{A}$ در دوگان دوم خود که مجهز به ضرب آرنز اول است ایدآل چپ است اگر و تنها اگر برای هر $a \in \mathcal{A}$ ضربگرهای $r_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ فشرده ضعیف باشند. پس بنابراین با توجه به این نکته و قضیه قبل، نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۴.۳. *فرض کنیم J یک ایدآل بسته در $\mathcal{T}(L^2(G))$ باشد و $\xi_\circ \in J$ وجود داشته باشد که $\int_G \sigma(\xi_\circ)\, d\mu \neq 0$. در این صورت J در دوگان خود ایدآل چپ است اگر و تنها اگر G متناهی باشد.*

مراجع

[1] Takesaki, M., 1979. Theory of operator algebras. I, Springer-Verlag,New York-Heidelberg.

[2] Neufang, M., 2000. Abstrakte Harmonische Analyse: und Modulhomomorphismen über von Neumann-Algebren,Universität des Saarlandes.

[3] Neufang, M., 2004. A unified approach to the topological centre problem for certain Banach algebras arising in abstract harmonic analysis, *Arch. Math.* 82(2), pp.164–171

[4] Neufang, M., 2009. On one-sided strong Arens irregularity, *Arch. Math.* 92(5), 519–524.

[5] Pirkovskii, A. Y., 2004. Biprojectivity and biflatness for convolution algebras of nuclear operators, *Canad. Math. Bull.* 47(3), pp.445–455.

[6] Akemann, C., 1967. Some mapping properties of the group algebras of a compact group, *Pacific J. Math,* 22(1), pp.1–8.

[7] Ghahramani, F. and Lau, A. T. M., 1997. Multipliers and modulus on Banach algebras related to locally compact groups, *J. Funct. Anal,* 150(2), pp.478–497 .

[8] Ghahramani, F. and Lau, A. T. M., 1995. Multipliers and ideals in second conjugate algebras related to locally compact groups, *J. Funct. Anal,*132(1), pp.170–191 .

[9] Losert, V., 2004. Weakly compact multipliers on group algebras, *J. Funct. Anal,* 213(2), pp.466-472.

[10] Hu, Z., Neufang, M. and Ruan, Z. J., 2013. Arens irregularity of the trace class convolution algebra, *Bull. London Math. Soc,* 45(2), pp.351–362.

[11] Hu, Z., Neufang, M. and Ruan, Z. J., 2011. Completely bounded multipliers over locally compact quantum groups, *Proc. London. Math. Soc,* 103(1), pp.1–39.

[12] Hewitt, E. and Ross, K.A. 1994. Abstract Harmonic Analysis: Volume I Structure of Topological Groups Integration Theory Group Representations, Springer New York.

[13] Hu, Z. and Neufang, M. and Ruan, Z. J., 2013. Convolution of trace classoperators over locally compact quantum groups, *Canad J. Math,* 65(5), pp.1043–1072.

[14] Sakai, S., 1964. Weakly compact operators on operator algebras, *Pacific J. Math,* 14, pp.659–664.

[15] Li, B.R., 1992. Introduction to Operator Algebras,World Scientific Pub Co Inc.