

Solution of the optimal control problem for linear time-delay systems using shifted Chebyshev functions

Hajar Alimorad¹

Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Jahrom University, Jahrom, Iran.

Received: 21 September 2022 Accepted: 10 December 2025 Published online: 25 February 2026

Abstract: Time delay frequently appears in many real-world engineering systems, whether in the state function, the control input signal, or even in the measurement process. This phenomenon essentially represents the time interval during which, after an input is applied, the system's output is not yet observed; in other words, time delay is precisely the time gap between the moment an input is applied and the onset of a detectable system response. Systems involving time delays are of great significance; however, obtaining analytical solutions for them is typically difficult or even impossible. Consequently, numerical methods serve as a key tool for solving optimal control problems based on such systems. In recent years, the use of orthogonal functions for the numerical solution of optimal control problems has attracted considerable attention. These functions act as a powerful instrument by approximating unknown functions (such as state and control) using an appropriate basis set, thereby transforming the original problem into an algebraic one that is considerably easier to solve than the original problem. In this paper, a numerical method based on shifted Chebyshev functions is presented for solving optimal control problems of linear systems with piecewise-constant delay. The choice of these basis functions is justified not only by their high approximation accuracy over arbitrary intervals but also by their numerical stability and the reduction they offer in the condition number of the associated operational matrices. Unlike standard Chebyshev functions, which are defined only over the interval $[-1, 1]$, shifted Chebyshev functions enable direct discretization over the system's physical time intervals and prevent errors arising from unnecessary variable transformations. Using these basis functions, the original problem is converted into a nonlinear programming problem and solved using an interior-point algorithm in the MATLAB environment. Furthermore, convergence analysis of the proposed method is provided over a general interval, and numerical studies, including comparisons with methods based on block-pulse and Legendre functions, are conducted. The obtained results demonstrate that the proposed method not only achieves superior accuracy but also exhibits better performance in terms of numerical stability and computational cost.

Keywords: Shifted Chebyshev functions, orthogonal functions, time-delay systems, piecewise-constant.



©2026 Kharazmi University, Tehran, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

¹Corresponding author

E-mail addresses: (Hajar Alimorad) h.alimorad@jahromu.ac.ir



حل مسأله کنترل بهینه سیستم‌های تأخیری خطی به کمک توابع انتقال یافته چبیشف

هاجر علی مراد^۱

گروه ریاضیات و کاربردها، دانشکده علوم پایه، دانشگاه جهرم، جهرم، ایران.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۳/۳۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۹/۱۹ تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۱۲/۷

چکیده: تأخیر زمانی اغلب در بسیاری از سیستم‌های مهندسی دنیای واقعی، چه در تابع حالت، چه در سیگنال ورودی کنترل و یا حتی در فرآیند اندازه‌گیری، ظاهر می‌شود. این پدیده در واقع بیانگر مدت زمانی است که پس از اعمال یک ورودی، هنوز خروجی سیستم مشاهده نمی‌شود؛ به عبارت دیگر، تأخیر زمانی همان فاصله زمانی بین لحظه اعمال ورودی و آغاز پاسخ قابل تشخیص سیستم است. سیستم‌های دارای تأخیر از اهمیت بالایی برخوردارند، اما به دست آوردن جواب تحلیلی برای آن‌ها معمولاً دشوار یا غیرممکن است. از این رو، روش‌های عددی ابزاری کلیدی برای حل مسائل کنترل بهینه مبتنی بر چنین سیستم‌هایی محسوب می‌شوند. در سال‌های اخیر، استفاده از توابع متعامد برای حل عددی مسائل کنترل بهینه مورد توجه ویژه‌ای قرار گرفته است. این توابع به عنوان ابزاری قدرتمند، با تقریب توابع مجهول (مانند حالت و کنترل) بر پایه یک مجموعه پایه مناسب، مسأله اصلی را به یک مسأله جبری تبدیل می‌کنند که حل آن به مراتب ساده‌تر از حل مسأله اصلی است. در این مقاله، یک روش عددی مبتنی بر توابع چبیشف انتقال یافته برای حل مسائل کنترل بهینه سیستم‌های خطی با تأخیر قطعه قطعه ثابت ارائه می‌شود. انتخاب این پایه‌ها نه تنها به دلیل دقت بالای تقریب در بازه‌های دلخواه، بلکه به خاطر پایداری عددی و کاهش عدد شرط ماتریس‌های عملگری مرتبط، توجیه می‌شود. برخلاف توابع چبیشف استاندارد که تنها بر بازه $[-1, 1]$ تعریف می‌شوند، توابع چبیشف انتقال یافته امکان گسسته‌سازی مستقیم در بازه‌های فیزیکی سیستم را فراهم می‌آورند و از خطاهای ناشی از تغییر متغیرهای غیرضروری جلوگیری می‌کنند. با استفاده از این پایه‌ها، مسأله اصلی به یک مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل شده و با به کارگیری الگوریتم نقطه درونی در محیط متلب حل می‌گردد. همچنین، تحلیل همگرایی روش در یک بازه کلی ارائه شده و مطالعات عددی شامل مقایسه با روش‌های مبتنی بر توابع بلاک پالس و لژاندر انجام شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که روش پیشنهادی نه تنها از نظر دقت برتری دارد، بلکه از جهت پایداری عددی و هزینه محاسباتی نیز عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: توابع انتقال یافته چبیشف، توابع متعامد، سیستم‌های تأخیری، قطعه‌ای ثابت.

۱ مقدمه

در سال‌های اخیر، روش‌های مبتنی بر توابع متعامد به‌طور گسترده‌ای برای حل معادلات دیفرانسیل و مسائل کنترل بهینه مورد استفاده قرار گرفته‌اند. ویژگی اصلی این روش‌ها، تقریب توابع مجهول (مانند متغیرهای حالت و کنترل) توسط یک مجموعه پایه متعامد است، به‌گونه‌ای که مسأله اصلی به یک سیستم معادلات جبری تبدیل می‌شود که حل آن به مراتب ساده‌تر است. ایده اصلی این رویکرد، کاهش مسأله به یک فرم گسسته‌شده بر اساس بردار پایه‌ای $\psi(t)$ به صورت زیر است:

$$\underbrace{\int_{\alpha}^t \cdots \int_{\alpha}^t}_{k\text{-times}} \psi(\sigma)(d\sigma)^k \approx \mathbf{P}^k \Psi(t), \quad (1.1)$$

در این روش، فرض می‌شود که $\Psi^T(t) = [\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_{k-1}(t)]$ ، که در آن توابع پایه‌ای متعامد تعریف شده در بازه $[\alpha, \beta]$ هستند، و \mathbf{P} یک ماتریس مربعی ثابت است. با جایگزینی رابطه (۱.۱) در معادله انتگرالی، تمام انتگرال‌های ظاهر شده به صورت تحلیلی محاسبه شده و نتیجه نهایی به صورت توان‌های ماتریس \mathbf{P}^k بیان می‌شود. در نهایت، با محاسبه ضرایب متناظر با توابع $\psi_i(t)$ ، معادله اصلی به یک سیستم معادلات جبری تبدیل می‌گردد. به وضوح، ماتریس \mathbf{P} به انتخاب بردار پایه‌ای Ψ وابسته است. تاکنون، سه دسته از توابع پایه‌ای توابع والش، توابع بلاک‌پالس و توابع لاگر در این چارچوب مورد استفاده قرار گرفته‌اند. از جمله کاربردهای توابع والش می‌توان به موارد زیر اشاره کرد: شناسایی سیستم‌هایی مانند سیستم‌های تغییرناپذیر زمان [۳۱، ۴۱]، سیستم‌هایی با تأخیر [۳۰]، سیستم‌های پارامتر توزیع شده [۲۸، ۴۰]، سیستم‌های دو خطی و دو بعدی [۶، ۱۷] و برای تجزیه و تحلیل سیستم‌هایی مانند سیستم‌های کنترل بهینه تغییرناپذیر زمان [۵] و متغیر با زمان [۷]. توابع بلاک‌پالس نیز در کاربردهای گوناگونی از جمله شناسایی سیستم [۱۱، ۱۶، ۲۰]، تجزیه و تحلیل [۸-۱۰، ۱۲] و کنترل بهینه [۱۵] و [۲۸] به کار گرفته شده‌اند. از سوی دیگر، توابع لاگر که دارای خاصیت متعامدی بر روی بازه نیمه‌نامتناهی هستند عمدتاً برای شناسایی سیستم [۱۳، ۱۸] مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

تأخیر زمانی پدیده‌ای رایج در بسیاری از سیستم‌های واقعی است و در حوزه‌های متنوعی مانند فرآیندهای شیمیایی، زیست‌شناسی، متالورژی، صنعت، دستگاه‌های الکترونیکی و مکانیکی، سیستم‌های حمل‌ونقل و همچنین مدل‌های نظری مانند رشد جمعیت، رشد اقتصادی و شبکه‌های عصبی دیده می‌شود. این تأخیرها معمولاً ناشی از زمان لازم برای انتقال سیگنال یا ماده یا زمان پردازش و محاسبه در سیستم هستند. معادلات دیفرانسیل تأخیری کاربرد گسترده‌ای در علوم و مهندسی دارند و زمانی ظاهر می‌شوند که نرخ تغییر یک متغیر حالت نه‌تنها به مقدار کنونی آن، بلکه به مقادیر گذشته‌اش نیز وابسته باشد. از این رو، سیستم‌های دارای تأخیر از اهمیت بالایی برخوردارند، اما به‌دست‌آوردن جواب تحلیلی برای آن‌ها معمولاً دشوار یا غیرممکن است. در پاسخ به این چالش، روش‌های عددی مبتنی بر توابع متعامد یا چندجمله‌ای‌های پایه در سال‌های اخیر به‌طور گسترده‌ای برای حل مسائل کنترل بهینه سیستم‌های تأخیری مورد استفاده قرار گرفته‌اند. از جمله این توابع می‌توان به توابع بلاک‌پالس [۳۹]، توابع والش [۲۷]، سری فوریه [۲۲]، چندجمله‌ای لژاندر [۲۱]، موجک‌های فیبوناچی [۳۶]، چندجمله‌ای‌های لاگرانژ [۳۵]، و لاگر [۱۹]، اشاره کرد. همچنین، در سال‌های اخیر، بسیاری از پژوهشگران از توابع پایه ترکیبی برای بهبود عملکرد روش‌های عددی استفاده کرده‌اند [۲۲-۲۴، ۳۳، ۳۷، ۳۸].

با این وجود، انتخاب مناسب توابع پایه نقشی کلیدی در دستیابی به دقت بالا، پایداری عددی و کارایی محاسباتی روش دارد. در این مقاله، از توابع چیشیف انتقال‌یافته استفاده می‌شود. دلایل این انتخاب از جمله، دقت نمایی، پایداری عددی و انطباق مستقیم با بازه‌های فیزیکی سیستم، در بخش بعدی توجیه خواهد شد. در این راستا، ساختار مقاله به شرح زیر است:

در بخش ۲ به معرفی توابع چیشیف و چیشیف انتقال‌یافته خواهیم پرداخت. سیستم‌های تأخیری با تابع تأخیر قطعه‌ای ثابت در بخش ۳ معرفی شده است. بخش ۴ به ارزیابی روش حل پیشنهادی می‌پردازد. در بخش ۵، شرایط بهینگی روش ارزیابی شده بیان خواهد شد. مثال‌های عددی برای بررسی کارایی روش در بخش ۶ آورده شده‌اند.

۲ توابع چبیشف و چبیشف انتقال یافته

چندجمله‌ای‌های چبیشف از نوع اول در بازه $t \in [-1, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲]:

$$T_n(t) = \cos(n \cos^{-1}(t)), \quad (1.2)$$

یا به صورت صریح‌تر، به عنوان یک چندجمله‌ای جبری:

$$T_n(t) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \frac{n!}{(2i)!(n-2i)!} (1-t^2)^i t^{n-2i}, \quad (2.2)$$

برای $n = 0, 1, 2, \dots$ که در آن $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ نمایانگر بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی $\frac{n}{2}$ ، یعنی جزء صحیح $\frac{n}{2}$ است. چندجمله‌ای $T_n(t)$ جواب معادله چبیشف زیر می‌باشد:

$$(1-t^2) \frac{d^2 y}{dt^2} - t \frac{dy}{dt} + n^2 y = 0.$$

همچنین، چندجمله‌ایهای $T_n(t)$ و $T_m(t)$ در بازه $[-1, 1]$ نسبت به تابع وزن $w = \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}$ متعامد هستند؛ یعنی:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(t)T_m(t)}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} dt = \begin{cases} 0, & n \neq m; \\ \frac{\pi}{2}, & n = m \neq 0; \\ \pi, & n = m = 0. \end{cases}$$

این چندجمله‌ای‌ها دارای ویژگی‌های ساختاری مهمی هستند که کاربردهای گسترده‌ای در تقریب عددی و حل معادلات دیفرانسیل دارند. از جمله این ویژگی‌ها می‌توان به رابطه بازگشتی زیر اشاره کرد:

$$T_{n+1}(t) - 2tT_n(t) + T_{n-1}(t) = 0,$$

و همچنین رابطه مربوط به مشتق آن‌ها:

$$(1-t^2)T_n'(t) = -ntT_n(t) + nT_{n-1}(t),$$

مقادیر خاص این چندجمله‌ای‌ها در نقاط انتهایی و مرکز بازه به صورت زیر است:

$$\begin{cases} T_n(1) = 1, \\ T_n(-1) = (-1)^n, \\ T_{2n}(0) = (-1)^n, \\ T_{2n+1}(0) = 0. \end{cases}$$

هر تابع تحلیلی $f(t)$ تعریف شده بر بازه $[-1, 1]$ را می‌توان به صورت سری چبیشف بسط داد:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k T_k(t) \quad (3.2)$$

که در آن ضرایب f_k با استفاده از خاصیت متعامدی چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$f_k = \lambda \int_{-1}^1 \frac{f(t)T_k(t)}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} dt,$$

که در آن اگر $\lambda = \frac{1}{\pi}$, $k = 0$ و برای $\lambda = \frac{1}{\pi}$, $k = 1, 2, \dots$ در عمل، سری فوق را با N جمله اول تقریب می‌زنیم:

$$f(t) \approx \sum_{k=0}^{N-1} f_k T_k(t) = f_N^T \Phi_N(t)$$

$$f_N = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \Phi_N(t) = \begin{bmatrix} T_0(t) \\ T_1(t) \\ \vdots \\ T_{N-1}(t) \end{bmatrix}.$$

در بسیاری از کاربردهای مهندسی، تابع $f(t)$ بر یک بازه دلخواه $[a, b]$ تعریف می‌شود. در چنین حالتی، از چندجمله‌ای‌های چبیشف انتقال یافته استفاده می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$T_n^*(t) = T_n\left(\frac{2}{b-a}t - \frac{b+a}{b-a}\right), \quad a \leq t \leq b, \quad n \geq 0, \quad (4.2)$$

به طوری که

$$T_0^*(t) = 1, \quad T_1^*(t) = t, \quad T_n^*(t) = 2tT_{n-1}^*(t) - T_{n-2}^*(t), \quad n \geq 2, \quad -1 \leq t \leq 1 \quad (5.2)$$

این تبدیل، بازه $[a, b]$ را به صورت خطی به $[-1, 1]$ نگاشت می‌کند. بنابراین، تمام ویژگی‌های چندجمله‌ای‌های استاندارد (مانند رابطه بازگشتی و متعامدی) برای $T_n^*(t)$ نیز برقرارند. مشتقات $T_n^*(t)$ نیز از طریق قاعده زنجیره‌ای به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\frac{dT_n^*(t)}{dt} = \frac{dT_n(t)}{dt} \left(\frac{b-a}{2}\right);$$

$$\frac{d^k T_n^*(t)}{dt^k} = \left(\frac{b-a}{2}\right)^k \frac{d^k T_n(t)}{dt^k}.$$

به عنوان مثال، سه جمله اول این دنباله عبارتند از:

$$T_0^*(t) = 1;$$

$$T_1^*(t) = \left(\frac{2}{b-a}\right)t - \frac{b+a}{b-a} = \left(\frac{b+a}{a-b}\right) - \left(\frac{2}{a-b}\right)t;$$

$$T_2^*(t) = 2\left(\frac{b+a}{a-b} - \frac{2}{a-b}t\right)\left(\frac{b+a}{a-b} - \frac{2}{a-b}t\right) - 1$$

$$= 2\left(\frac{b+a}{a-b} - \frac{2}{a-b}t\right)^2 - 1.$$

در حالت کلی، بردار توابع پایه انتقال یافته $T^*(t) = [T_0^*(t), T_1^*(t), \dots, T_N^*(t)]$ را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نوشت [۱]:

$$T^*(t) = \varphi(t)M^T,$$

$$\varphi(t) = [1 \quad t \quad \dots \quad t^N]$$

که M یک ماتریس $(N+1) \times (N+1)$ از ضرایب است که ارتباط بین پایه‌های توانی و پایه‌های چبیشف انتقال یافته را تعریف می‌کند.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a+b}{(a-b)^1} & \frac{-2}{(a-b)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \sum_{k=0}^N \frac{a^{N-k} b^k \binom{N}{k}}{(a-b)^N} & -N \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a^{N-(k+1)} b^k \binom{N}{k+1}}{(a-b)^N} & \dots & (-1)^N \frac{2^{2N-1}}{(a-b)^N} \end{bmatrix}$$

در این صورت مشتق مرتبه n ام تابع $T^*(t)$ عبارت است از:

$$T^{*(n)}(t) = \varphi^{(n)}(t)M^T,$$

جایی که

$$\varphi^{(n)}(t) = \varphi(t)(B^T)^n$$

و

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بررسی کارایی توابع چبیشف انتقال یافته: توابع چبیشف استاندارد $T_n(t)$ فقط در بازه خاصی از اعداد تعریف می‌شوند و برای استفاده از این توابع در بازه‌های دیگر، باید از یک روش تبدیل استفاده کنیم. این روش تبدیل دو مشکل اصلی دارد: افزایش خطای محاسباتی که در بازه‌های طولانی یا نامتقارن شدیدتر می‌شود، و عدم تطابق با ساختار اصلی مسأله که در سیستم‌های تأخیری مشکل ساز است، زیرا نقاط مهم (نقاط شکست) معمولاً در مقادیر واقعی زمان رخ می‌دهند. توابع چبیشف انتقال یافته به صورت دیگری تعریف می‌شوند که این مشکلات را برطرف می‌کند و مزایای متعددی دارند. برخی از مزایای این رویکرد در جدول ۱ آورده شده است. همچنین، در مقایسه با توابع بلاک پالس (که در مراجع [۲۵، ۲۳] استفاده شده‌اند)، چبیشف انتقال یافته: همواری

جدول ۱: مقایسه توابع چبیشف استاندارد و انتقال یافته

معیار	چبیشف استاندارد	چبیشف انتقال یافته
دقت تقریب [۴۲]	خوب در $[-1, 1]$	عالی در $[a, b]$
پایداری عددی [۳]	وابسته به تغییر متغیر	ذاتاً پایدار
عدد شرط ماتریس [۱۴]	بالا تر (به ویژه در بازه‌های طولانی)	پایین تر
هزینه محاسباتی [۴]	شامل محاسبه تغییر متغیر	مستقیم و کارآمد
رفتار در مرزها [۲۶]	ممکن است خطای بیشتری داشته باشد	دقیق تر

بیشتری دارند (مناسب برای سیستم‌هایی با پاسخ هموار) [۲۶]، با تعداد کمتری از توابع، دقت بالاتری حاصل می‌شود، خطای همگرایی نمایی^۱ دارند، در حالی که بلاک پالس خطای جبری^۲ دارد [۴۲]. عدد شرط ماتریس‌های عملگر در روش چبیشف انتقال یافته با رشد کندتری افزایش می‌یابد. عدد شرط نشان‌دهنده حساسیت سیستم به خطاهای عددی است و رشد کندتر آن، پایداری بهتر روش را تضمین می‌کند. این موضوع به ویژه در مسائل تأخیری که نیاز به محاسبات دقیق دارند، اهمیت بیشتری می‌یابد.

¹exponential

²algebraic

۳ سیستم‌های تأخیر خطی با تابع تأخیر قطعه‌ای ثابت

در بسیاری از سیستم‌های فیزیکی، حضور تأخیر زمانی در متغیرهای حالت یا ورودی کنترل یک پدیده ذاتی و ناخواسته است که معمولاً ناشی از محدودیت‌های فیزیکی مانند زمان انتقال سیگنال، زمان پردازش، یا دینامیک‌های داخلی سیستم می‌باشد. چنین تأخیرهایی می‌توانند منجر به کاهش عملکرد، ناپایداری یا حتی واگرایی پاسخ سیستم شوند. از این رو، طراحی کنترل‌کننده‌هایی که بتوانند اثرات مخرب تأخیر را جبران کنند، از اهمیت بالایی در نظریه کنترل برخوردار است.

در مسائل کنترل بهینه سیستم‌های تأخیری، هدف یافتن قانون کنترل $u(t)$ است که ضمن رعایت دینامیک سیستم دارای تأخیر، یک تابع هزینه معین را بهینه سازد. برخلاف سیستم‌های بدون تأخیر، در اینجا اطلاعات لازم برای محاسبه کنترل در لحظه t تنها به مقادیر کنونی حالت بستگی ندارد، بلکه ممکن است به مقادیر گذشته $x(t - \tau)$ یا $u(t - \sigma)$ نیز وابسته باشد. به عنوان مثال، یک سیستم خطی در فرم کانونی را در نظر بگیرید که تحت یک اغتشاش خارجی $d(t)$ و با تأخیر در حالت یا ورودی قرار دارد [۳۴]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= x_{i+1}(t); \\ \dot{x}_n(t) &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i(t - \tau_i) + bu(t - \sigma) + d(t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

که در آن $\sigma \geq 0$ و $\tau_i \geq 0$ تأخیرهای ثابت (یا قطعه‌قطعه ثابت) هستند. چنین سیستمی را نمی‌توان با روش‌های کلاسیک کنترل بهینه (مانند اصل ماکسیمم پونتریاگین یا معادله همیلتون-ژاکوبی-بلمن) به راحتی حل کرد. در چنین شرایطی، روش‌های عددی مبتنی بر تقریب توابع مجهول با استفاده از مجموعه‌های پایه متعامد، از جمله توابع چبیشف انتقال‌یافته، می‌توانند سیستم تأخیری را به یک مسأله بهینه‌سازی جبری تبدیل کنند. این رویکرد امکان به کارگیری الگوریتم‌های بهینه‌سازی را فراهم می‌آورد و در عین حال، با حفظ ساختار فیزیکی سیستم، از خطاهای ناشی از گسسته‌سازی نامناسب جلوگیری می‌کند.

کنترل بهینه سیستم‌های تأخیری با تابع تأخیر قطعه‌ای ثابت، در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \min J(u, x) &= \frac{1}{2} x^T(t_f) S x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)] dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t - h(t)) E(t) x(t - h(t)) + u^T(t - h(t)) F(t) u(t - h(t))] dt \end{aligned} \quad (2.3)$$

مشروط به دستگاه معادلات دیفرانسیل تأخیری خطی زیر

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A(t)x(t) + B(t)x(t - h(t)) + C(t)u(t) + D(t)u(t - h(t)), \quad t \in (t_0, t_f); \\ x(t) &= g^x(t), \quad t_0 - \alpha \leq t \leq t_0; \\ u(t) &= g^u(t), \quad t_0 - \alpha \leq t \leq t_0; \end{aligned} \quad (3.3)$$

که در آن

$$h(t) = \begin{cases} \tau_1, & t_0 \leq t < t_1; \\ \tau_2, & t_1 \leq t < t_2; \\ \vdots \\ \tau_k, & t_{k-1} \leq t \leq t_k, \end{cases} \quad (4.3)$$

و $u(t) \in \mathbb{R}^q$, $x(t) \in \mathbb{R}^p$, $t_0 < t_1 < \dots < t_k = t_f$ و $p \times p$ ماتریس‌های $C(t)$ و $D(t)$ ماتریس‌هایی معلوم با ابعاد $p \times q$ ، ماتریس‌های S و $Q(t)$ ماتریس‌های نیم معین مثبت با ابعاد $p \times p$ و $R(t)$ ماتریس معین مثبت با ابعاد $q \times q$ هستند. همچنین، اعداد کسری و نامنفی τ_i معلوم در بازه $[t_0, t_f]$ می‌باشد و $\alpha = \max\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k\}$.

هدف مسأله یافتن $x(t)$ و $u(t)$ است که در معادلات (۳.۳) و (۴.۳) صدق کرده و تابع $J(u, x)$ را کمینه کند.

۴ گستره‌سازی مسأله به کمک توابع چبیشف انتقال‌یافته

در ابتدا یادآوری می‌شود که در سیستم‌های با تأخیر ثابت، نقاط شکست (یعنی نقاطی که در آن‌ها کنترل بهینه $u^*(t)$ دچار ناپوستگی می‌شود) تنها به مقدار تأخیر زمانی بستگی دارند. در مقابل، در سیستم‌های با تأخیر قطعه‌ای ثابت، این نقاط شکست به مقادیر پارامترهای تأخیر $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ و همچنین به زمان‌های تقسیم‌بندی شده t_0, t_1, \dots, t_k وابسته‌اند. از این رو، حل مسأله کنترل بهینه برای سیستم‌های با تأخیر قطعه‌ای ثابت، در مقایسه با سیستم‌های با تأخیر ثابت، پیچیدگی بیشتری دارد.

فرض کنید بازه اصلی مسأله به صورت $[t_0, t_f]$ باشد، به طوری که $t_f = t_k$. برای تحلیل دقیق‌تر، این بازه را به صورت زیر تقسیم‌بندی می‌کنیم:

$$\text{اگر } t \in [t_{r-1}, t_r) \text{ آنگاه } t - \tau_r \in [t_{r-1} - \tau_r, t_r - \tau_r)$$

در این مرحله، بازه‌های متناظر با $t - \tau_r$ را محاسبه می‌کنیم؛ بدیهی است که برخی از این بازه‌ها هم‌پوشانی دارند و برای برخی مقادیر r ، ممکن است $t_r - \tau_r \leq t_0$ باشد.

بنابراین، بازه‌های جدید را با روند زیر تعیین می‌نماییم:

$$(۱) \text{ هر بازه } [t_{r-1} - \tau_r, t_r - \tau_r) \text{ را به صورت } [h_{r-1}, h_r) \text{ نمایش می‌دهیم.}$$

$$(۲) \text{ فرض کنید برای دو شاخص متوالی } r = l, l+1 \text{ رابطه زیر برقرار باشد:}$$

$$t_0 \leq h_{l-1} \leq h_{l+1} \leq t_{l-1} \leq h_l \leq t_l \leq h_{l+1} \leq t_{l+1},$$

در این حالت، بازه‌های جدید عبارتند از: $[h_{l-1}, h_{l+1})$ ، $[h_l, t_l)$ ، $[t_{l-1}, h_l)$ ، $[h_{l+1}, t_{l-1})$ ، $[h_{l-1}, h_{l+1})$ و $[t_l, h_{l+1})$.

(۳) همچنین، اگر $\tau_k \neq 0$ ، آنگاه $t_k - \tau_k < t_k$. با توجه به اینکه همه توابع در سیستم لزوماً شامل تأخیر نیستند، بازه $[t_k - 2\tau_k, t_k - \tau_k)$ نیز نیازمند تقسیم‌بندی است. این بازه را طبق روش گام (۲) تقسیم کرده و سپس تمام زیربازه‌های حاصل را با τ_k جمع می‌کنیم. در نهایت، مجموعه بازه‌های جدید به دست آمده از گام‌های (۲) و (۳) را با نماد $[I_{r-1}, I_r)$ نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم تعداد کل این بازه‌ها برابر با m باشد. لازم به ذکر است که برای هر t که در آن $t - \tau_r \leq t_0$ ، مقادیر حالت و کنترل از پیش تعیین شده‌اند؛ یعنی: $x(t) = g^x(t)$ و $u(t) = g^u(t)$ به عنوان مثال فرض کنید:

$$h(t) = \begin{cases} 0.1, & 0 \leq t < 0.35; \\ 0.3, & 0.35 \leq t < 0.7; \\ 0.5, & 0.7 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

در این صورت

$$h(t - \tau) = \begin{cases} t - 0.1, & -0.1 \leq t < 0.25; \\ t - 0.3, & 0.05 \leq t < 0.4; \\ t - 0.5, & 0.2 \leq t \leq 0.5, \end{cases}$$

و

$$-0.1 < t_0 = 0 < 0.05 < 0.2 < t_1 = 0.35 < 0.4 < 0.5,$$

بنابراین، افراز نهایی بازه زمانی $[0, 0.5)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[0, 0.05), [0.05, 0.2), [0.2, 0.25), [0.25, 0.35), [0.35, 0.4), [0.4, 0.5).$$

برای افراز بازه بعدی $[0.5, 1)$ ، ابتدا مقدار $t - \tau_k$ را برای $t \in [0.5, 1)$ محاسبه می‌کنیم. با توجه به اینکه $\tau_k = 0.5$ داریم: $[0.5, 1) - 0.5 = [0, 0.5)$. این بازه قبلاً در گام قبلی افراز شده است. بنابراین، همان زیربازه‌های تعریف شده برای $[0, 0.5)$ را در نظر گرفته و به هر یک از آن‌ها مقدار $\tau_k = 0.5$ را اضافه می‌کنیم. در نتیجه، افراز بازه $[0.5, 1)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$[0.5, 0.55), [0.55, 0.7), [0.7, 0.75), [0.75, 0.85), [0.85, 0.9), [0.9, 1).$$

در مجموع، ۱۲ زیربازه زمانی به دست می‌آید که آن‌ها را به صورت $[I_{r-1}, I_r)$ برای $r = 1, \dots, 12$ نمایش می‌دهیم. تابع تأخیر $h(t)$ در این زیربازه‌ها به صورت تکه‌ای ثابت تعریف می‌شود:

$$h(t) = \begin{cases} 0.1, & t \in [I_{r-1}, I_r), \quad r = 1, \dots, 4; \\ 0.3, & t \in [I_{r-1}, I_r), \quad r = 5, \dots, 8; \\ 0.5, & t \in [I_{r-1}, I_r), \quad r = 9, \dots, 12. \end{cases}$$

پس از انجام این افزایش زمانی با در نظر گرفتن ساختار تأخیر قطعه‌ای ثابت، هدف بعدی، تقریب توابع حالت $x(t)$ و کنترل $u(t)$ توسط سری‌های متناهی چبیشف است. این تقریب بر پایه توابع متعامد چبیشف انتقال یافته انجام می‌شود. لذا،

$$x_N(t) = \sum_{j=0}^N a_j^x T_j^*(t) \quad (1.4)$$

$$u_N(t) = \sum_{j=0}^N a_j^u T_j^*(t) \quad (2.4)$$

که در آن T_j^* چندجمله‌ای چبیشف انتقال یافته از درجه j است و ضرایب a_j^x و a_j^u مقادیر مجهولی هستند که باید تعیین شوند. روابط (۱.۴) و (۲.۴) را می‌توان به صورت فشرده ماتریسی زیر بازنویسی کرد:

$$[x(t)] = T^*(t)A_j^x;$$

$$[u(t)] = T^*(t)A_j^u,$$

جایی که

$$T^*(t) = [T_0^*(t), T_1^*(t), \dots, T_N^*(t)];$$

$$A_j^x = [a_0^x, a_1^x, \dots, a_N^x];$$

$$A_j^u = [a_0^u, a_1^u, \dots, a_N^u].$$

بنابراین با توجه به رابطه

$$T^*(t) = \varphi(t)M^T$$

مسئله (۳.۳) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
 J(x, u) = & \frac{1}{\gamma} \sum_{i=0}^{m-1} (A_{ij}^x)^T (M\varphi^T(t_f)S\varphi(t_f)M^T) A_{ij}^x \\
 & + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=0}^{m-1} (A_{ij}^x)^T \left(\int_{I_i}^{I_{i+1}} (M\varphi^T(t)Q(t)\varphi(t)M^T) dt \right) A_{ij}^x \\
 & + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=0}^{m-1} (A_{ij}^u)^T \left(\int_{I_i}^{I_{i+1}} (M\varphi^T(t)R(t)\varphi(t)M^T) dt \right) A_{ij}^u \\
 & + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=0}^{m-1} \chi_{[I_i, I_{i+1})}(t) (A_{ij}^x)^T \left(\int_{I_i}^{I_{i+1}} (M\varphi^T(t - \tau_{i+1})E(t)\varphi(t - \tau_{i+1})M^T) dt \right) A_{ij}^x \\
 & + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=0}^{m-1} \chi_{[I_i, I_{i+1})}(t) (A_{ij}^u)^T \left(\int_{I_i}^{I_{i+1}} (M\varphi^T(t - \tau_{i+1})F(t)\varphi(t - \tau_{i+1})M^T) dt \right) A_{ij}^u \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S.to : & \sum_{i=0}^{m-1} ((\varphi(t)B^T M^T - A(t)\varphi(t)M^T) A_{ij}^x - (C(t)\varphi(t)M^T) A_{ij}^u) \\
 & - \sum_{i=0}^{m-1} \chi_{[I_i, I_{i+1})}(t) (B(t)\varphi(t - \tau_{i+1})M^T) A_{ij}^x \\
 & + \sum_{i=0}^{m-1} \chi_{[I_i, I_{i+1})}(t) (D(t)\varphi(t - \tau_{i+1})M^T) A_{ij}^u = 0; \\
 & g^x(t) = \varphi(t)M^T A_{ij}^x, \quad t_0 - \alpha \leq t \leq t_0; \\
 & g^u(t) = \varphi(t)M^T A_{ij}^u, \quad t_0 - \alpha \leq t \leq t_0.
 \end{aligned}$$

تابع مشخصه $\chi_{[I_i, I_{i+1})}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\chi_{[I_i, I_{i+1})}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [I_i, I_{i+1}); \\ 0, & t \notin [I_i, I_{i+1}). \end{cases}$$

مسئله برنامه ریزی غیرخطی مذکور با استفاده از نرم افزار MATLAB-R2020a در تابع کتابخانه ای fmincon و با به کارگیری روش نقطه درونی (interior-point) حل شده است. حدس اولیه برای متغیرهای تصمیم بر اساس شرایط اولیه مسئله تعیین گردیده است. معیار توقف الگوریتم نیز به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\left| \frac{J_N - J_{N-1}}{J_N} \right| < \varepsilon,$$

که در آن J_N مقدار تابع هزینه در تکرار N است. پس از همگرایی الگوریتم، مقادیر بهینه ضرایب مجهول A_{ij}^x و A_{ij}^u به دست می آیند که به ترتیب منجر به تقریب های عددی توابع مسیر $x(t)$ و کنترل بهینه $u(t)$ می شوند.

۵ تحلیل خطا

در این بخش، همگرایی روش ارائه شده را بررسی می کنیم. فرض کنیم که $x(t)$ و $u(t)$ در بازه $[0, 1]$ هموار باشند و $x_N(t)$ سری چبیشف نظیر $x(t)$ در نقاط t_j ، برای $j = 0, 1, 2, \dots, N$ ، ریشه های چندجمله ای چبیشف درجه N باشد. در این صورت [۲۶، ۳]:

$$x(t) - x_N(t) = \frac{x^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \prod_{j=0}^N (t - t_j), \quad \xi \in [0, 1].$$

آنگاه داریم:

$$\|x(t) - x_N(t)\|_{L^\infty([-1,1])} \leq \frac{1}{2^{2N}(N+1)!} \|x^{(N+1)}(t)\|_{L^\infty([-1,1])} \quad (۱.۵)$$

قضیه ۱.۵. فرض کنید $x(t) \in C^{N+1}([a, b])$ و $x_N(t)$ تقریب چندجمله‌ای چبیشف انتقال یافته درجه N آن بر روی بازه $[a, b]$ باشد؛ یعنی:

$$x_N(t) = \sum_{n=0}^N a_n^x T_n^*(t),$$

که در آن $T_n^*(\cdot)$ چندجمله‌ای‌های چبیشف انتقال یافته به بازه $[a, b]$ هستند. آنگاه خطای تقریب در نرم بی‌نهایت به صورت زیر کران دار است:

$$\|x - x_N\|_{L^\infty([a,b])} \leq \frac{(b-a)^{N+1}}{2^{2N+1}(N+1)!} \|x^{(N+1)}(t)\|_{L^\infty([a,b])}.$$

علاوه بر این، اگر سیستم دینامیکی مسأله کنترل بهینه (۲.۳) شامل تأخیرهای قطعه قطعه ثابت $h(t) = \tau_k$ باشد، و تابع $x(t)$ در کل بازه $[t_0 - \alpha, t_f]$ به اندازه کافی هموار باشد (یعنی $x(t) \in C^{N+1}([t_0 - \alpha, t_f])$ ، آنگاه خطای تقریب هم‌زمان برای $x(t)$ و $x(t - h(t))$ تحت کنترل است و داریم:

$$\max \{ \|x - x_N\|_{L^\infty([t_0, t_f])}, \|x(\cdot, h(\cdot)) - x_N(\cdot, h(\cdot))\|_{L^\infty([t_0, t_f])} \} \leq C_N \|x^{(N+1)}(t)\|_{L^\infty([t_0 - \alpha, t_f])},$$

که در آن:

$$C_N = \frac{(t_f - t_0 + \alpha)^{N+1}}{2^{2N+1}(N+1)!}.$$

اثبات. قسمت اول: خطای تقریب در بازه عمومی $[a, b]$: با استفاده از تغییر متغیر خطی

$$\tau = \frac{2}{b-a}t - \frac{b+a}{b-a},$$

تابع $x(t)$ به تابع $\hat{x}(\tau) = x\left(\frac{(b-a)\tau + (b+a)}{2}\right)$ روی $[-1, 1]$ تبدیل می‌شود. فرض کنید $\hat{x}_N(\tau)$ چندجمله‌ای درونیاب چبیشف درجه N برای $\hat{x}(\tau)$ باشد. طبق نتیجه استاندارد در نظریه تقریب (مراجعه کنید به [۲۶])، خطای درونیابی در نقاط ریشه‌های چبیشف به صورت زیر است:

$$\|\hat{x}(\tau) - \hat{x}_N(\tau)\|_{L^\infty([-1,1])} \leq \frac{1}{2^N(N+1)!} \|\hat{x}^{(N+1)}(\tau)\|_{L^\infty([-1,1])}.$$

با بازگشت به متغیر اصلی t و استفاده از قاعده زنجیره‌ای برای مشتق‌های مرتبه بالا، داریم:

$$x^{(N+1)}(t) = \left(\frac{2}{b-a}\right)^{N+1} \hat{x}^{(N+1)}(\tau).$$

بنابراین:

$$\|\hat{x}^{(N+1)}(\tau)\|_{L^\infty([-1,1])} = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{N+1} \|x^{(N+1)}(t)\|_{L^\infty([a,b])}.$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_N(t)\|_{L^\infty([a,b])} &\leq \frac{1}{2^N(N+1)!} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{N+1} \|x^{(N+1)}(t)\|_{L^\infty([a,b])} \\ &= \frac{(b-a)^{N+1}}{2^{2N+1}(N+1)!} \|x^{(N+1)}(t)\|_{L^\infty([a,b])}. \end{aligned}$$

این کران در تمام $t \in [a, b]$ برقرار است، پس در نرم بی نهایت نیز صدق می کند. قسمت دوم: ارتباط با سیستم تأخیری (مسأله ۲.۳).

در مسأله کنترل بهینه ۲.۳، تابع حالت $x(t)$ نه تنها در t بلکه در $t - h(t)$ نیز ظاهر می شود. با فرض اینکه $x(t)$ در کل بازه $[t_0 - \alpha, t_f]$ به اندازه کافی هموار باشد (یعنی $x(t) \in C^{N+1}([t_0 - \alpha, t_f])$)، می توان برای هر زیربازه $[t_i, t_{i+1}]$ که $h(t) = \tau_i$ ثابت است، تقریب چیشف را به طور جداگانه اعمال کرد.

از آنجا که $t - h(t) \in [t_0 - \alpha, t_f]$ برای همه $t \in [t_0, t_f]$ ، خطای تقریب برای $x(t - h(t))$ نیز با همان کران بالا کنترل می شود، فقط با این تفاوت که طول بازه مؤثر برای تأخیر، حداکثر $L = t_f - t_0 + \alpha$ است. بنابراین:

$$\|x(t - h(t)) - x_N(t - h(t))\|_{L^\infty([t_0, t_f])} \leq \frac{L^{N+1}}{\sqrt{2^{N+1}}(N+1)!} \|x^{(N+1)}\|_{L^\infty([t_0 - \alpha, t_f])}$$

این خطا در تابع هزینه (۲.۳) و محدودیت دینامیکی (۳.۳) ظاهر می شود، زیرا هر دو شامل $x(t)$ و $x(t - h(t))$ هستند. بنابراین، کنترل این خطا برای تضمین همگرایی روش عددی پیشنهادی ضروری است. □

قضیه ۲.۵. حال فرض کنید $x_N(t)$ چند جمله ای چیشف انتقال یافته ای باشد که جواب دقیق مسأله (۲.۳) را نمایش می دهد و $\bar{x}_N(t)$ تقریب عددی این چند جمله ای باشد که با روش مذکور و با استفاده از تعداد محدودی از نقاط محاسبه شده است. در این صورت، عدد حقیقی مثبتی مانند α وجود دارد به طوری که:

$$\|x(t) - \bar{x}_N(t)\| \leq \alpha \frac{1}{\sqrt{2^{N+1}}} \|x^{(N+1)}(t)\|_{L^\infty([a, b])} + \sqrt{\frac{3\pi}{\lambda}} \|A - \bar{A}\|,$$

جایی که $\bar{x}_N(t) = \sum_{n=0}^N \bar{a}_n^x T_n^*(t)$ ، $x_N(t) = \sum_{n=0}^N a_n^x T_n^*(t)$ و

$$A = [a_0^x, a_1^x, \dots, a_N^x], \quad \bar{A} = [\bar{a}_0^x, \bar{a}_1^x, \dots, \bar{a}_N^x].$$

اثبات. فرض کنید $x_N(t)$ چند جمله ای حقیقی مقداری از درجه حداکثر N باشد که بهترین تقریب برای $x(t)$ در فضای مورد نظر است. آنگاه با استفاده از نامساوی مثلثی داریم:

$$\|x(t) - \bar{x}_N(t)\|_2 \leq \|x(t) - x_N(t)\|_2 + \|x_N(t) - \bar{x}_N(t)\|_2.$$

بر اساس رابطه (۱.۵)، جمله اول به صورت زیر تخمین زده می شود:

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_N(t)\|_2 &= \left(\int_0^1 |x(t) - x_N(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_0^1 \left(\frac{(b-a)^{N+1}}{\sqrt{2^{N+1}}(N+1)!} \|x^{(N+1)}(t)\|_{L^\infty([a, b])} \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{L} \frac{(b-a)^{N+1}}{\sqrt{2^{N+1}}(N+1)!} \|x^{(N+1)}(t)\|_{L^\infty([a, b])} \end{aligned}$$

برای جمله دوم، داریم:

$$\begin{aligned} \|x_N(t) - \bar{x}_N(t)\|_2 &= \left(\int_0^1 \left[\sum_{n=0}^N (a_n^x - \bar{a}_n^x) T_n^*(t) \right]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_0^1 \left[\sum_{n=0}^N (a_n^x - \bar{a}_n^x)^2 \right] \left[\sum_{n=0}^N |T_n^*(t)|^2 \right] dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\sum_{n=0}^N (a_n^x - \bar{a}_n^x)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^N \int_0^1 |T_n^*(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \|A - \bar{A}\|_2. \end{aligned}$$

که در آن از خاصیت تعامد چندجمله‌ای‌های چیبیشف انتقال‌یافته و مقدار ثابت نرم آن‌ها استفاده شده است. در نتیجه، با افزایش تعداد نقاط t_j ، دقت تقریب $\bar{x}_N(t)$ بهبود یافته و به جواب دقیق $x_N(t)$ همگرا می‌شود. □

۶ مثالهای عددی

برای یک مقدار داده شده $\varepsilon > 0$ ، شرط توقف در روش عددی به صورت $\left| \frac{J_N - J_{N-1}}{J_N} \right| < \varepsilon$ در نظر گرفته می‌شود که در آن

$$\begin{aligned} J_N(u, x) &= \frac{1}{2} x_N^T(t_f) S x_N(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x_N^T(t) Q(t) x_N(t) + u_N^T(t) R(t) u_N(t)] dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x_N^T(t - h(t)) E(t) x_N(t - h(t)) + u_N^T(t - h(t)) F(t) u_N(t - h(t))] dt \end{aligned}$$

در صورتی که ε به اندازه کافی کوچک انتخاب شود، تقریب‌های $x_N(t)$ و $u_N(t)$ به ترتیب به جواب‌های بهینه واقعی $x^*(t)$ و $u^*(t)$ همگرا خواهند بود. بر این اساس، الگوریتم کلی روش عددی پیشنهادی در تمامی مثال‌های عددی به صورت زیر است:

الگوریتم:

گام ۱: عدد صحیح مثبت مناسب N (درجه سری چیبیشف) را انتخاب کنید.

گام ۲: با حل مسأله (۳.۴)، $x_N(t)$ و $u_N(t)$ را بر اساس روابط (۱.۴) و (۲.۴) محاسبه نمایید.

گام ۳: اگر شرط توقف $\left| \frac{J_N - J_{N-1}}{J_N} \right| < \varepsilon$ برقرار باشد، الگوریتم را متوقف کرده و جواب $x_N(t)$ و $u_N(t)$ را به عنوان جواب‌های بهینه تقریبی در نظر بگیرید. در غیر این صورت، N را با $N + 1$ جایگزین کرده و به گام ۲ بازگردید. در تمامی مثال‌های عددی ارائه شده، مقدار $\varepsilon = 10^{-5}$ در نظر گرفته شده است.

مثال ۱.۶. سیستم خطی تأخیری زیر را در نظر بگیرید [۴۳]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + x(t - \frac{1}{2}) + u(t) - \frac{1}{2}u(t - \frac{1}{2}), & t \in [0, 1]; \\ x(t) = 1, & t \in [-\frac{1}{2}, 0]; \\ u(t) = 0, & t \in [-\frac{1}{2}, 0]. \end{cases}$$

جدول ۲: مراحل پیاده‌سازی عددی

مرحله	توضیحات	خروجی
۱	تقسیم بازه زمانی $[t_0, t_f]$ بر اساس نقاط شکست تابع تأخیر قطعه‌ای $h(t)$	زیربازه‌های $\{[I_0, I_1), \dots, [I_{m-1}, I_m]\}$
۲	محاسبه ماتریس انتقال	ماتریس M
۳	تعریف توابع پایه با تبدیل مقادیر به بازه $[-1, 1]$	توابع $T_j^*(t)$
۴	تعریف بردارهای ضرایب مجهول برای حالت و کنترل	A^u و A^x
۵	پیاده‌سازی تابع هزینه با انتگرال‌گیری عددی	$J_N(A^x, A^u)$
۶	تعریف قیود دینامیکی به صورت غیرخطی	تابع محدودیت‌ها
۷	تنظیم پارامترهای بهینه‌سازی و حدس اولیه	پارامترهای optimoptions و بردارهای اولیه
۸	حل مسئله بهینه‌سازی	$[A_{opt}, J^*]$
۹	بازسازی توابع تقریبی از ضرایب بهینه	$u_N(t)$ و $x_N(t)$

هدف یافتن کنترل بهینه‌ای است که تابع زیر را کمینه کند:

$$J = \frac{1}{\tau} \int_0^1 \left[x^\tau(t) + \frac{1}{\tau} u^\tau(t) \right] dt$$

با توجه به وجود دو تأخیر مختلف $\tau = \frac{1}{3}$ و $\tau = \frac{2}{3}$ ، بازه زمانی $[0, 1]$ به سه زیربازه پیوسته تقسیم می‌شود:

$$[I_0, I_1) = \left[0, \frac{1}{3} \right), \quad [I_1, I_2) = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), \quad [I_2, I_3] = \left[\frac{2}{3}, 1 \right].$$

در هر زیربازه، توابع حالت و کنترل با چند جمله‌ای‌های چیشیف انتقال یافته درجه $N = 5$ تقریب زده می‌شوند:

$$x_N^{(i)}(t) = X^{(i)}(t) M^T A_i^x, \quad u_N^{(i)}(t) = X^{(i)}(t) M^T A_i^u, \quad i = 0, 1, 2,$$

که در آن $X^{(i)}(t) = [T_0^*(t), T_1^*(t), \dots, T_N^*(t)]$ بردار پایه‌های چیشیف انتقال یافته روی زیربازه i ام است. ماتریس M ماتریس انتگرال‌گیری چیشیف به صورت پایین‌مثنی به صورت زیر می‌باشد:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{9}{2} & -3 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 10 & -4 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & \frac{25}{2} & -25 & \frac{25}{3} & -5 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

و B^T ماتریس مشتق‌گیری است:

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تابع هزینه و قیود گسسته شده به صورت زیر است:

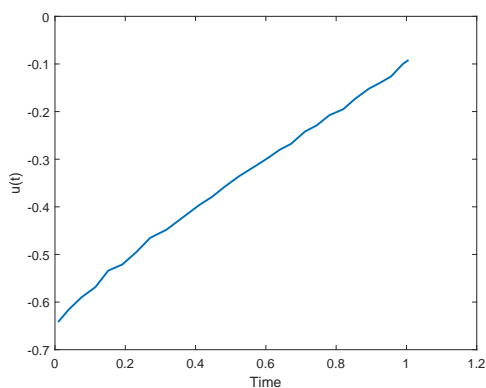
$$\begin{aligned} \min J &= \sum_{i=0}^{\nu} \left[(A_{ij}^x)^T \left(\int_{I_i}^{I_{i+1}} (MX^T(t)X(t)M^T) dt \right) A_{ij}^x \right] \\ &+ \sum_{i=0}^{\nu} \left[\frac{1}{\nu} (A_{ij}^u)^T \left(\int_{I_i}^{I_{i+1}} (MX^T(t)X(t)M^T) dt \right) A_{ij}^u \right] \\ S. to : & \sum_{i=0}^{\nu} [(X(t)B^T M^T) A_{ij}^x] = \sum_{i=0}^{\nu} [- (X(t)M^T) A_{ij}^x + (X(t - \frac{1}{\nu})M^T) A_{ij}^x] \\ &+ \sum_{i=0}^{\nu} [(X(t)M^T) A_{ij}^u - \frac{1}{\nu} (X(t - \frac{\nu}{\nu})M^T) A_{ij}^u], \\ & X(t)M^T A_{ij}^x = 1, \quad t \in [-\frac{1}{\nu}, 0]; \\ & X(t)M^T A_{ij}^u = 0, \quad t \in [-\frac{\nu}{\nu}, 0]. \end{aligned}$$

مسأله نهایی یک مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی با متغیرهای تصمیم A_{ij}^x و A_{ij}^u است و حدس اولیه برای $x(t)$ تابع ثابت $x(t) = 1$ (متناظر با شرایط اولیه)، برای $u(t)$ تابع صفر است. معیار توقف $\left| \frac{J_N - J_{N-1}}{J_N} \right| < \varepsilon$ است. لذا، مقادیر x_N و u_N به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

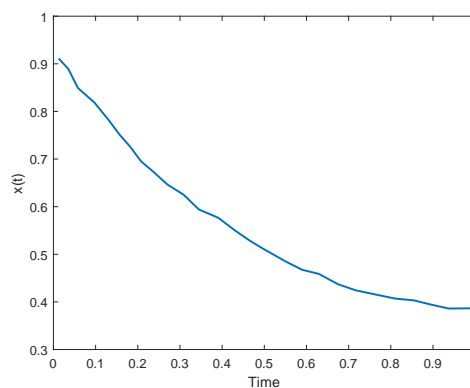
$$x_N = \begin{cases} 0.211001t^4 - 0.702191t^3 + 1.042797t^2 - 0.986615t + 0.999999, & 0 \leq t < \frac{1}{\nu}; \\ -0.176811t^4 + 0.336359t^3 + 0.126387t^2 - 0.664633t + 0.960817, & \frac{1}{\nu} \leq t < \frac{2}{\nu}; \\ -0.089458t^4 + 0.815715t^3 - 1.584441t^2 + 1.367137t + 0.207387, & \frac{2}{\nu} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$u_N = \begin{cases} -0.2981778t^4 + 0.481664t^3 - 1.139298t^2 + 1.105273t - 0.986767, & 0 \leq t < \frac{1}{\nu}; \\ -0.128925t^4 + 0.094869t^3 - 0.366658t^2 + 1.410629t - 1.162174, & \frac{1}{\nu} \leq t < \frac{2}{\nu}; \\ 0.338310t^4 - 0.809505t^3 + 1.401558t^2 - 0.295207t - 0.635157, & \frac{2}{\nu} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

مقدار بهینه J برابر با 0.373210 است که به مقدار گزارش شده در مرجع [۴۳] بسیار نزدیک است.

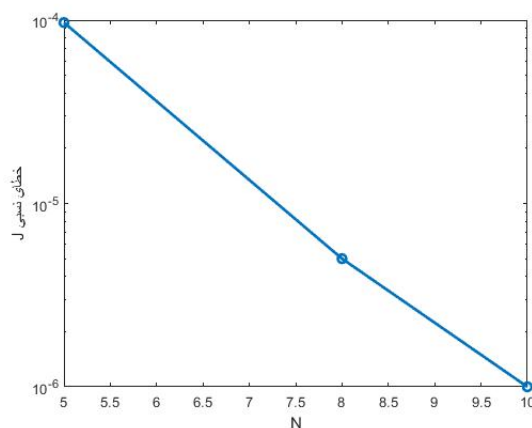


(ب) تابع کنترل بهینه در مثال ۱.۶.



(ا) تابع حالت بهینه در مثال ۱.۶.

شکل ۱: تابع حالت و کنترل بهینه در مثال ۱.۶.



شکل ۲: خطای نسبی هدف برای سه مقدار N در مثال ۱.۶.

با فرض اینکه مقدار مرجع برای محاسبه خطای نسبی، مقدار به دست آمده در بالاترین دقت یعنی $N = ۱۲$ باشد، خطای نسبی به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\left| \frac{J_N - J_{ref}}{J_{ref}} \right|.$$

مثال ۲.۶. سیستم خطی تأخیری زیر را در نظر بگیرید [۴۳]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (t^2 + 1)x_1(t - \frac{1}{4}) + x_2(t - \frac{1}{4}) + u(t) + (t + 1)u(t - \frac{1}{4}); \\ \dot{x}_2(t) = 2x_2(t - \frac{1}{4}) + (t + 1)u(t) + (t^2 + 1)u(t - \frac{1}{4}); \\ x_1(t) = 1, \quad x_2(t) = 1, \quad t \in [-\frac{1}{4}, 0]; \\ u(t) = 1, \quad t \in [-\frac{1}{4}, 0]; \end{cases}$$

هدف یافتن کنترل بهینه ای است که تابع زیر را کمینه کند:

$$J = \frac{1}{4} \int_0^1 [x_1^2(t) + 2tx_1(t)x_2(t) + t^2x_2^2(t) + (t^2 + 1)u^2(t)] dt$$

جدول ۳: خطای نسبی تابع هدف برای سه مقدار N در مثال ۱.۶.

خطای نسبی	J_N	N
$۲/۶ \times ۱۰^{-۴}$	۰.۳۷۳۲۱۰	۵
$۲/۵ \times ۱۰^{-۵}$	۰.۳۷۳۱۱۸	۸
...	۰.۳۷۳۱۱۳	۱۲

مسأله را با کمک توابع چیشیف انتقال یافته و $N = ۵$ حل می‌کنیم؛ جایی که

$$\begin{cases} [I_0, I_1) = [0, \frac{1}{4}), & [I_1, I_2) = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}); \\ [I_2, I_3) = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), & [I_3, I_4) = [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

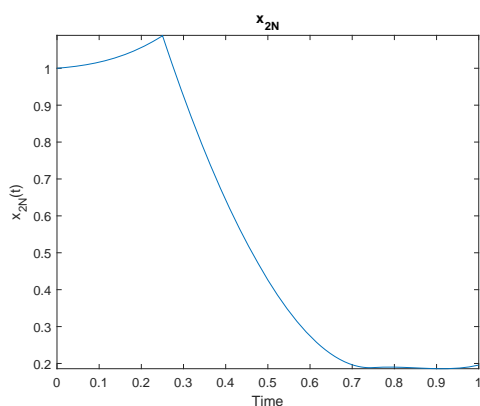
لذا، مقادیر x_N و u_N به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$x_{1N} = \begin{cases} -۱.۵۱۱۷۱۰t^4 + ۳.۲۲۸۴۴۳t^3 + ۱.۴۳۲۸۷۶t^2 + ۴.۶۶۵۴۱۹t + ۲.۲۲۰۷۵۹, & 0 \leq t < \frac{1}{4}; \\ -۱.۵۱۱۷۱۰t^4 + ۳.۲۲۸۴۴۳t^3 + ۱.۴۱۲۶۳۰t^2 - ۴.۶۵۰۲۳۵t + ۲.۳۸۵۲۵۹, & \frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2}; \\ ۱.۹۷۷۷۳۱t^4 - ۲.۷۹۲۹۷۶t^3 + ۵.۴۲۱۸۶۲t^2 - ۵.۸۸۴۹۰۴t + ۲.۳۶۷۸۶۸, & \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4}; \\ ۲.۸۴۰۸۴۴t^4 - ۶.۲۹۵۸۰۴t^3 + ۳.۵۴۷۲۶۷t^2 + ۱.۳۸۲۰۱۲t - ۰.۸۲۳۱۵۸, & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

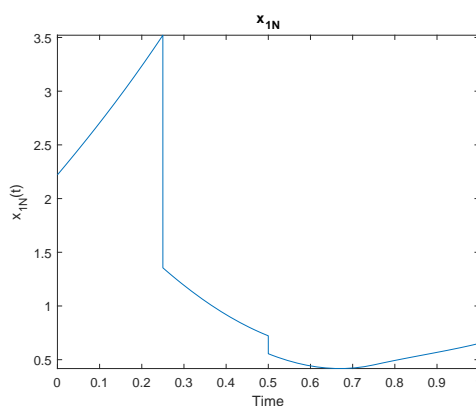
$$x_{2N} = \begin{cases} -۱.۴۱۳۸۶۹t^4 + ۲.۶۲۱۴۱۲t^3 + ۰.۴۶۶۰۸۹t^2 + ۰.۰۹۳۵۹۹t + ۰.۹۹۹۹۹۷, & 0 \leq t < \frac{1}{4}; \\ -۰.۸۱۹۷۴۲t^4 + ۱.۴۳۱۵۱۰t^3 + ۲.۳۵۶۳۸۷t^2 - ۴.۸۴۸۸۹۳t + ۲.۱۳۵۰۳۴, & \frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2}; \\ ۲.۴۵۱۰۹۰t^4 - ۴.۳۱۵۷۳۸t^3 + ۶.۱۴۲۶۶۲t^2 - ۵.۹۹۱۹۶۲t + ۲.۲۷۲۷۳۱, & \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4}; \\ ۲.۳۵۴۷۴۰t^4 - ۳.۶۰۳۶۶۶t^3 - ۱.۰۴۷۴۰۸t^2 + ۳.۷۵۴۶۳۶t - ۱.۲۶۲۶۸۳, & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$u_N = \begin{cases} 1.025562t^4 - 0.983652t^3 + 2.629176t^2 + 3.861948t - 29.06809, & 0 \leq t < \frac{1}{4}; \\ 1.0997355t^4 - 15.519683t^3 + 5.082233t^2 + 3.799844(t) - 2.934545, & \frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2}; \\ 8.649852t^4 - 19.159586t^3 + 16.346408t^2 - 3.563411t - 1.467228, & \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4}; \\ 3.216145t^4 - 11.313483t^3 + 15.251149t^2 - 8.157343t + 1.03524, & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

مقدار بهینه J برابر $1/562241$ است.

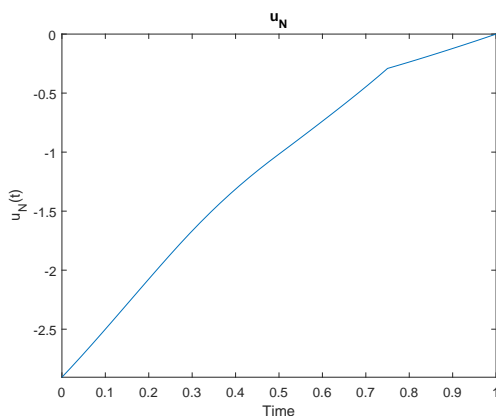


(ب) تابع حالت بهینه x_2 در مثال ۲.۶.



(آ) تابع حالت بهینه x_1 در مثال ۲.۶.

شکل ۳: تابع حالت بهینه در مثال ۲.۶.



شکل ۴: تابع کنترل بهینه در مثال ۲.۶.

مثال ۳.۶. مسأله کنترل بهینه تأخیری خطی زیر را در نظر بگیرید [۲۵]:

$$\min J = \frac{3}{4}x^2(1) + \frac{1}{4} \int_0^1 u^2(t)dt$$

$$S. to: \dot{x}(t) = x(t-h(t)) + u(t), \quad 0 < t < 1;$$

$$x(t) = 1, \quad t \leq 0$$

که در آن تابع تأخیر قطعه‌ای ثابت زیر در نظر گرفته شده است.

$$h(t) = \begin{cases} 0.2, & 0 \leq t < 0.4; \\ 0.5, & 0.4 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

مسأله را با کمک توابع چیبیشف انتقال یافته و $N = 5$ حل می‌کنیم؛ ابتدا بازه‌های $t - \tau_i$ را محاسبه می‌کنیم:

$$t - 0.2 \in [-0.2, 0.2); \quad t - 0.5 \in [-0.1, 0.5];$$

با توجه به اینکه در بازه $[0.2, 0.5]$ دو تأخیر متفاوت خواهیم داشت، این بازه‌ها به صورت زیر افراز می‌شوند:

$$[0, 0.2), \quad [0.2, 0.4), \quad [0.4, 0.5)$$

همچنین بازه $[0.5, 1]$ را به صورت $[0.5 - 0.5, 1 - 0.5]$ مجدداً تقسیم‌بندی کرده و سپس در بازه‌های جدید t را با $t + 0.5$ جایگزین می‌کنیم. بنابراین

$$[0.5, 1] = [0.5, 0.7) \cup [0.7, 0.9) \cup [0.9, 1]$$

و

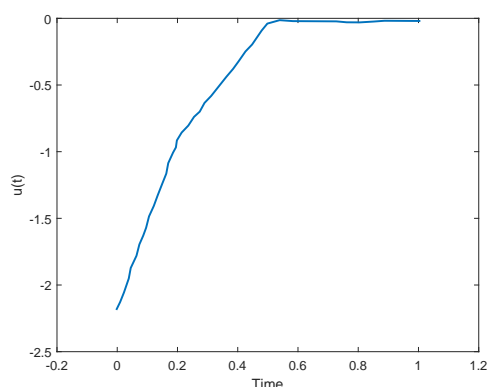
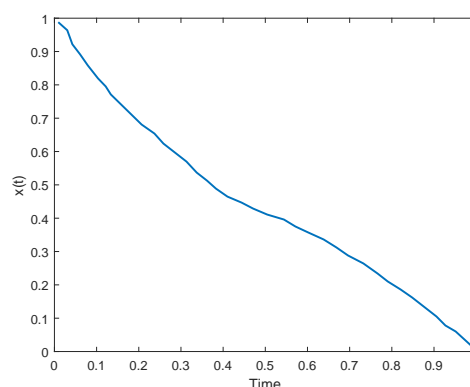
$$\begin{cases} [I_0, I_1) = [0, 0.2), & [I_1, I_2) = [0.2, 0.4), & [I_2, I_3) = [0.4, 0.5), \\ [I_3, I_4) = [0.5, 0.7), & [I_4, I_5) = [0.7, 0.9), & [I_5, I_6) = [0.9, 1] \end{cases}$$

لازم به ذکر است که برای تابع $u(t)$ بازه‌های یکسان با بازه‌های $x(t)$ در نظر گرفته می‌شود. در این صورت در برخی از بازه‌ها توابع $u(t)$ یکسان بدست می‌آید.

$$u_N(t) = \begin{cases} -0.633496t^2 + 2.814084t - 2.204568, & 0 \leq t < 0.2; \\ 1.266993t - 1.900489, & 0.2 \leq t < 0.5; \\ -1.2670, & 0.5 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$x_N(t) = \begin{cases} 0.211165t^3 + 1.4570418t^2 - 1.204568t + 1, & 0 \leq t < 0.2; \\ -0.52791t^4 + 0.527914t^3 - 0.272866t^2 - 0.599605t + 0.942376, & 0.2 \leq t < 0.4; \\ 0.633496t^2 - 0.900489t + 0.950146, & 0.4 \leq t < 0.5; \\ -0.52791t^4 + 0.591263t^3 - 1.409992t^2 + 0.725947t + 0.577192, & 0.5 \leq t < 0.7; \\ -0.10558t^5 + 0.158374t^4 - 0.381308t^3 + 0.47796t^2 - 0.162320t + 0.769328, & 0.7 \leq t < 0.9; \\ 0.211165t^3 - 0.766993t^2 + 0.291772t + 0.686386, & 0.9 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

در جدول ۴، مقدار تابع هدف برای تمام مثال‌ها با مقادیر تابع هدف در مراجع [۴۳] و [۲۵] مقایسه شده است. در مرجع [۴۳]، از ترکیب بلاک‌پالس و چیبیشف استفاده شده است. مقدار گزارش شده به جواب روش ما نزدیک است، و نتایج را در جدول ۴ گزارش کردیم. در مرجع [۲۵]، از روش بلاک‌پالس استفاده شده است. مقدار گزارش شده با روش ما یکسان است، زیرا سیستم ساده‌تر است.

شکل ۲.۶: تابع حالت بهینه x_2 در مثال ۲.۶.

شکل ۳.۶: تابع حالت بهینه در مثال ۳.۶.

شکل ۵: تابع کنترل بهینه در مثال ۳.۶.

جدول ۴: مقایسه مقادیر تابع هدف

شماره مثال	مقدار J^* با روش پیشنهادی	مقدار J^* با استفاده از توابع بلاک-پالس	مرجع
۱.۶	۰.۳۷۳۲۱۰	۵۱۹ ۱۳۹۱	[۴۳]
۲.۶	۱.۵۶۲۲۴۱	۷۵۳ ۴۸۲	[۴۳]
۳.۶	۰.۳۲۶۹۷۹۸۱	۰.۳۲۶۹۷۹۸۱	[۲۵]

۷ نتیجه گیری

در این مقاله، ما یک روش کارآمد برای حل مسایل کنترل تأخیری با تأخیر قطعه‌ای ثابت معرفی کردیم. این روش بر اساس استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف انتقال یافته است. چندجمله‌ای‌های چبیشف توابعی هستند که به صورت بازگشتی محاسبه می‌شوند و می‌توانند دقت بالایی را در تقریب توابع بدست آورند، حتی اگر تعداد آن‌ها کم باشد. بنابراین، می‌توانیم تقریبی کارآمد از توابع پیچیده‌تر بدست آوریم. همچنین، با افزایش تعداد این توابع، می‌توان دقت جواب تقریبی را افزایش داده و خطای حاصل را کاهش داد. در طی این تحقیق، همگرایی جواب تقریبی مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور نمایش کارایی و کاربرد روش پیشنهادی، چند مثال عددی در این مقاله ارائه شده است. این مثال‌ها نشان می‌دهند که روش پیشنهادی چگونه می‌تواند در حل مسایل کنترل تأخیری با تأخیر قطعه‌ای ثابت موثر باشد. روش پیشنهادی با ترکیب پایه‌های چبیشف انتقال یافته و بهینه‌سازی عددی، راه‌حلی کارآمد و پایدار برای مسائل کنترل بهینه سیستم‌های تأخیری ارائه می‌دهد. مزایای آن شامل دقت بالا با تعداد کمی از توابع پایه، پایداری عددی در بازه‌های دلخواه، قابلیت تعمیم به سیستم‌های پیچیده‌تر است.

تحقیقات آتی بر اساس نتایج این مقاله، می‌تواند در موارد زیر باشد:

تحقیق در مورد نوع دیگر تأخیر: در حالی که این مقاله بر روی تأخیرهای قطعه‌ای ثابت تمرکز داشته است، تحقیقات آتی می‌توانند بر روی نوع دیگر تأخیرها، تمرکز داشته باشند تا ببینند چگونه روش پیشنهادی تحت شرایط مختلف عمل می‌کند.

بررسی سیستم‌های متفاوت: چگونه روش پیشنهادی بر روی سیستم‌های دیگر، مانند سیستم‌های غیرخطی یا سیستم‌هایی که محدودیت‌های اضافی دارند، عمل می‌کند.

بهبود تقریب: این مقاله از چندجمله‌ای‌های چبیشف برای تقریب استفاده کرده است. آیا روش‌های تقریب دیگر می‌توانند نتایج دقیق‌تری را ارائه دهند یا خیر.

مراجع

- [1] Alimorad H., "Solution of optimal control problems using shifted Chebyshev polynomial," Iranian Journal of Optimization, 12 (2020) 233–239.
- [2] Bell W. W., "Special Functions for Scientists and Engineers," Van Nostrand, New Jersey, 1968.
- [3] Boyd J. P., "Chebyshev and Fourier Spectral Methods," University of Michigan, New York, 2000.
- [4] Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., and Zang T. A., "Spectral Methods. Fundamentals in Single Domains," Springer, 2006.
- [5] Chen C. F. and Hsiao C. H., "Design of piecewise constant gains for optimal control via Walsh functions," IEEE Transactions on Automatic Control, 20 (1975) 596–603.
- [6] Chen W. L. and Shih Y. P., "Parameter estimation of bilinear systems via Walsh function," Journal of the Franklin Institute, 305 (1978) 249–257.
- [7] Chen W. L. and Shih Y. P., "Analysis and optimal control of time-varying linear systems via Walsh functions," International Journal of Control, 27 (1978) 917–932.
- [8] Chen W. L. and Jeng B. S., "Analysis of piecewise constant delay systems via block-pulse functions," International Journal of Control, 12 (1981) 625–633.
- [9] Chen W., "Block pulse series analysis of scaled systems," International Journal of Systems Science, 12 (1981) 885–891.
- [10] Chen W. L. and Lee C. L., "On the convergence of the block-pulse series solution of a linear time-invariant system," Journal of Systems Science and Systems Engineering, 13 (1982) 591–598.
- [11] Cheng B. and Hsu N. S., "Single-input single-output systems identification via block-pulse functions," International Journal of Control, 13 (1982) 697–702.
- [12] Cheng B. and Hsu N. S., "Analysis and parameter estimation of bilinear systems via block-pulse functions," International Journal of Control, 36 (1982) 53–65.
- [13] Clement P. R., "Laguerre functions in signal analysis and parameter identification," Journal of the Franklin Institute, 313 (1982) 85–95.
- [14] Gottlieb D. and Orszag S. A., "Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications," SIAM, Philadelphia, (1977). <http://dx.doi.org/10.1137/1.9781611970425>
- [15] Hsu N. S. and Cheng B., "Analysis and optimal control of time-varying linear systems via block-pulse functions," International Journal of Control, 33 (1981) 1107–1122.
- [16] Hsu N. S. and Cheng B., "Identification of non-linear distributed systems via block-pulse functions," International Journal of Control, 36 (1982) 281–291.
- [17] Karanam V. R., Frick P. A., and Mohler R. R., "Bilinear system identification by Walsh function," IEEE Transactions on Automatic Control, 23 (1978) 709–713.
- [18] King R. E. and Paraskevopoulos P. N., "Parametric identification of discrete-time SISO systems," International Journal of Control, 30 (1979) 1023–1029.

- [19] Kung F. C. and Lee H., "Solution and parameter estimation of linear time-invariant delay systems using Laguerre polynomial expansion," *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 105 (1983) 297–301.
- [20] Kwong C. P. and Chen C. F., "Linear feedback system identification via block-pulse functions," *International Journal of Systems Science*, 12 (1981) 635–642.
- [21] Lee H. and Kung F. C., "Shifted Legendre series solution and parameter estimation of linear delayed systems," *International Journal of Systems Science*, 16 (1985) 1249–1256.
- [22] Maleknejad K. and Mahmoudi Y., "Numerical solution of linear Fredholm integral equation by using hybrid Taylor and block-pulse functions," *Applied Mathematics and Computation*, 149 (2004) 799–806.
- [23] Marzban H. R. and Razzaghi M., "Optimal control of linear delay systems via hybrid of block-pulse and Legendre polynomials," *Journal of the Franklin Institute*, 341 (2004) 279–293.
- [24] Marzban H. R. and Razzaghi M., "Solution of time-varying delay systems by hybrid functions," *Mathematics and Computers in Simulation*, 64 (2004) 597–607.
- [25] Marzban H. R. and Hoseini S. M., "Numerical treatment of non-linear optimal control problems involving piecewise constant delay," *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 33 (2016) 1103–1134.
- [26] Mason J. C. and Handscomb D. C., "Chebyshev Polynomials," Chapman and Hall/CRC, New York, 2003.
- [27] Palanisamy K. R. and Rao G. P., "Optimal control of linear systems with delays in state and control via Walsh function," *Proceedings of the IEEE*, 130 (1983) 300–312.
- [28] Paraskevopoulos P. N. and Bounas A. C., "Distributed parameter system identification via Walsh functions," *International Journal of Systems Science*, 9 (1978) 75–83.
- [29] Rao V. P. and Rao K. R., "Optimal feedback control via block-pulse functions," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24 (1979) 372–374.
- [30] Rao G. P. and Sivakumar L., "Identification of time-lag system via Walsh functions," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24 (1979) 806–808.
- [31] Rao G. P. and Sivakumar L., "Transfer function matrix identification in MIMO systems via Walsh functions," *Proceedings of the IEEE*, 69 (1981) 465–466.
- [32] Razzaghi M. and Razzaghi M., "Fourier series approach for the solution of linear two-point boundary value problems with time-varying coefficients," *International Journal of Systems Science*, 21 (1990) 1783–1794.
- [33] Razzaghi M. and Marzban H. R., "Direct method for variational problems via hybrid of block-pulse and Chebyshev functions," *Mathematical Problems in Engineering*, 6 (2000) 85–97.
- [34] Richard J. P., "Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems," *Automatica*, 39 (2003) 1667–1694.

- [35] Sabermahani S., Ordokhani Y., and Yousefi S. A., "Fractional-order Lagrange polynomials: An application for solving delay fractional optimal control problems," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 41 (2019) 2997–3009.
- [36] Sabermahani S., Ordokhani Y., and Yousefi S. A., "Fibonacci wavelets and their applications for solving two classes of time-varying delay problems," *Optimal Control Applications and Methods*, 41 (2020) 395–416.
- [37] Sabermahani S., Ordokhani Y., and Yousefi S. A., "Fractional-order Fibonacci-hybrid functions approach for solving fractional delay differential equations," *Engineering with Computers*, 36 (2020) 795–806.
- [38] Sabermahani S., Ordokhani Y., and Razzaghi M., "Ritz–Generalized Pell wavelet method: Application for two classes of fractional pantograph problems," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 119 (2023) 107138.
- [39] Sannuti P., "Analysis and synthesis of dynamic systems via block-pulse functions," *Proceedings of the IEEE*, 124 (1977) 569–571.
- [40] Sinha M. S. P., Rajamani V. S., and Sinha A. K., "Identification of non-linear distributed system using Walsh functions," *International Journal of Control*, 32 (1980) 669–676.
- [41] Tzafestas S. G., "Walsh series approach to lumped and distributed system identification," *Journal of the Franklin Institute*, 305 (1978) 199–220.
- [42] Trefethen L. N., "Spectral Methods in MATLAB," *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2000.
- [43] Wang X. T., "Numerical solutions of optimal control for linear time-varying systems with delays via hybrid functions," *Journal of the Franklin Institute*, 344 (2007) 941–953.