Kharazmi University

Mathematical Research
Year 2026, Volume 11, Issue 4, pp. 57–65

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
DOI: xxxx

Maximal Subsets of Pairwise Non-Commuting Elements in Finite A_2-Groups

Reza Orfi[(1)] [1] and Shirin Fouladi[(2)]

[(1),(2)] Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Kharazmi University, Tehran, Iran.

Received: 10 December 2025 Accepted: 30 December 2025 Published online:25 February 2026

Abstract: Let G be a finite group. A subset $X \subseteq G$ is called a pairwise non-commuting set if $xy \neq yx$ for all distinct elements $x, y \in X$. If $|X| \geq |Y|$ for every other pairwise non-commuting set Y in G, then X is called a maximal pairwise non-commuting set. A p-group G is defined as an A_2-group if it contains a nonabelian subgroup of index p such that all subgroups of index p^2 are abelian. In this paper, we determine the exact maximum size of such sets in finite A_2-groups.

Keywords: A_2-groups , pairwise non-commuting elements.

©2026 Kharazmi University, Tehran, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[1]Corresponding author
E-mail addresses: (Reza Orfi) orfi@khu.ac.ir, (Shirin Fouladi) s_fouladi@khu.ac.ir

پژوهش‌های ریاضی

سال ۱۴۰۴، دوره ۱۱، شماره ۴، ص ۵۷–۶۵

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸

شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۲۸۸

DOI: xxxx

بزرگ‌ترین مجموعهٔ دوبه‌دو ناجابه‌جاشونده در A_2ـ گروه‌های متناهی

رضا عرفی (۱) [1] و شیرین فولادی (۲)

(۱)،(۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۹/۱۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۰/۹ تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۱۲/۷

چکیده: فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. زیرمجموعه‌ی X از G را مجموعه‌ای دوبه‌دو ناجابه‌جایی می‌نامیم هرگاه برای هر دو عضو متمایز x و y از X داشته باشیم $xy \neq yx$. اگر $|X| \geq |Y|$ برای هر مجموعه‌ی دیگر Y از عناصر دوبه‌دو ناجابه‌جایی در G برقرار باشد، آنگاه X را بزرگ‌ترین مجموعه‌ی دوبه‌دو ناجابه‌جایی می‌نامیم. یک pـ گروه G را A_2ـ گروه می‌گویند اگر دارای زیرگروهی ناآبلی از اندیس p باشد و همه‌ی زیرگروه‌های آن با اندیس p^2 آبلی باشند. در این مقاله، اندازه‌ی دقیق بزرگ‌ترین مجموعه‌ی دوبه‌دو ناجابه‌جایی را در A_2ـ گروه‌های متناهی به‌دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: A_2ـ گروه‌ها، اعضای دوبه‌دو ناجابه‌جایی.

۱ مقدمه

فرض کنیم G یک گروه ناآبلی باشد. زیرمجموعه X از G را یک زیرمجموعه دو به دو ناجابه‌جایی از عناصر می‌نامیم، هرگاه برای هر دو عنصر متمایز x و y در X داشته باشیم $xy \neq yx$. اگر برای هر زیرمجموعه دیگر از عناصر دو به دو ناجابه‌جایی مانند Y در G داشته باشیم $|X| \geq |Y|$، آنگاه X یک زیرمجموعه ماکسیمال ناجابه‌جایی نامیده می‌شود. اندازه چنین زیرمجموعه‌ای را با $\omega(G)$ نشان می‌دهیم و به آن عدد خوشه‌ای [2] گروه می‌گوییم. در حقیقت، $\omega(G)$ همان عدد خوشه‌ای گراف ناجابه‌جایی وابسته به گروه G می‌باشد. در این گراف، مجموعه رئوس $V = G \setminus Z(G)$ است و دو عنصر x و y با یک یال به هم متصل می‌شوند هرگاه $xy \neq yx$. مفهوم عدد خوشه‌ای اولین بار توسط اردوش [3] در سال ۱۹۷۵ معرفی گردید. عدد خوشه‌ای با پوشش‌های حذف‌ناشدنی

[1] نویسنده مسئول مقاله

(Reza Orfi) orfi@khu.ac.ir, (Shirin Fouladi) s_fouladi@khu.ac.ir

[2] Clique Number

[3] Erdös

گروه‌های متناهی توسط زیرگروه‌های سره آبلی آن ارتباط مستقیم دارد. نویمن [۱] شرط لازم و کافی برای متناهی بودن $\omega(G)$ را به دست آورد و پرسش اردوش را پاسخ داد. او ثابت کرد که شرط لازم و کافی برای این که $\omega(G)$ متناهی باشد، این است که $\frac{G}{Z(G)}$ متناهی باشد. با توجه به اهمیت تعداد پوشش‌های گروه‌های متناهی، محاسبه عدد خوشه‌ای توسط ریاضی‌دانان بسیاری مورد توجه قرار گرفت و آن را برای خانواده‌های زیادی از گروه‌های متناهی محاسبه کردند.
pـ گروه G را فراخاص می‌نامند، هرگاه مرکز گروه، زیرگروه مشتق و زیرگروه فراتینی آن برابر و از مرتبه p باشند. یام‌چین [۲] در مقاله [۴] ثابت کرد که اگر p عددی فرد باشد و G یک گروه فراخاص از مرتبه $p^{۲n+۱}$ باشد، آنگاه

$$np + ۱ \leqslant \omega(G) \leqslant \frac{p(p-۱)^n - ۲}{p-۱}$$

و اگر $p = ۲$، آنگاه $\omega(G) = ۲n+۱$. همچنین نویسنده مقاله‌ی [۷] به محاسبه‌ی عدد خوشه‌ای برای pـ گروه‌های مرتبه‌ی p^n، که $n \leqslant ۵$، پرداخته است.
pـ گروه G را $A_۲$ـ گروه می‌نامند هرگاه داراي يک زيرگروه ناآبلي از انديس p باشد و کليه زيرگروه‌هاي آن با انديس $p^۲$ آبلي باشند. هدف اصلي اين مقاله، محاسبه عدد خوشه‌اي در $A_۲$ـ گروه‌هاي متناهي است و در ادامه قضيه زير را اثبات مي‌کنيم:

قضیه ۱.۱. *فرض کنید G یک $A_۲$ـ گروه از مرتبه p^n باشد. در این صورت:*

۱. *اگر G غیر فرادوری باشد و $|G/Z(G)| = p^۲$، آنگاه $\omega(G) = p + ۱$.*

۲. *اگر G غیر فرادوری باشد و $|G/Z(G)| = p^۳$ و G دارای یک زیرگروه ماکسیمال آبلی باشد، آنگاه $\omega(G) = p^۲ + ۱$.*

۳. *اگر G غیر فرادوری باشد و $|G/Z(G)| = p^۳$ و G فاقد زیرگروه ماکسیمال آبلی باشد، آنگاه $\omega(G) = p^۲ + p + ۱$.*

۴. *اگر G فرادوری باشد و $p > ۲$، آنگاه $\omega(G) = p(۱ + p)$.*

۵. *اگر G یک ۲ـ گروه فرادوری باشد و دارای زیرگروه ماکسیمال آبلی باشد، آنگاه $\omega(G) = ۵$.*

۶. *اگر G یک ۲ـ گروه فرادوری باشد و فاقد زیرگروه ماکسیمال آبلی باشد، آنگاه $\omega(G) = ۶$.*

در سرتاسر اين مقاله از نمادگذاري زير استفاده مي‌شود. تمام گروه‌ها متناهي فرض مي‌شوند. حرف p نشان‌دهنده يك عدد اول است. $C_G(x)$ مركزساز يك عنصر x در گروه G است. جمله‌هاي سري مركزي پاييني G با $\gamma_i = \gamma_i(G)$ نشان داده مي‌شوند. حداقل تعداد مولدهاي G با $d(G)$ نمايش مي‌يابد. نماد $[a, b]$ را براي $a^{-۱}b^{-۱}ab$ به كار مي‌بريم. همچنين $SmallGroup(n, m)$ را براي mـ امين گروه از مرتبه n مطابق با كتابخانه "گروه‌هاي كوچك" در نرم‌افزار GAP [۸] به كار مي‌بريم. تمام نمادهاي تعريف‌نشده، استاندارد و مطابق با [۳] هستند.

۲ تعاریف و مقدمات

ددر این بخش، به بررسی مبانی نظری و نتایج پایه‌ای می‌پردازیم که برای درک نتایج اصلی مقاله ضروری هستند. مطابق با مرجع [؟]، ابتدا به معرفی و مطالعهٔ ویژگی‌های A_nـ گروه‌های متناهی پرداخته می‌شود.

تعریف ۱.۲. *pـ گروه G را A_nـ گروه می‌نامند اگر دارای یک زیرگروه ناآبلی از اندیس $p^{n-۱}$ باشد، اما تمام زیرگروه‌های آن از اندیس p^n آبلی باشند.*

[1]Neumann
[2]Chin

تعریف ۲.۲. یك گروه را ناآبلی مینیمال می‌نامند اگر خود ناآبلی باشد، ولي تمام زیرگروه‌هاي سره آن آبلي باشند. با توجه به تعریف قبل هر pـ گروه ناآبلی مینیمال یک A_1 ـ گروه است.

مثال ۳.۲. هر گروه ناآبلي از مرتبه p^3، یك A_1 ـ گروه است. همچنین هر گروه ناآبلي از مرتبه p^4، یك A_1 ـ گروه یا A_2 ـ گروه است.

لم ۴.۲. فرض کنید G یک pـ گروه ناآبلی مینیمال باشد. در این صورت $\omega(G) = 1+p$ و می‌توان G را به صورت اجتماع $p+1$ زیرگروه آبلی سره نوشت.

اثبات. با توجه به مینیمال ناآبلی بودن گروه، داریم $|G/Z(G)| = p^2$. حال با به‌کارگیری لم ۳.۲ از مرجع [۶]، نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید. □

لم ۵.۲. فرض کنید G یک گروه ناآبلی از مرتبه p^4 باشد.

۱. اگر G از رده پوچتوانی ماکسیمال باشد، آنگاه $\omega(G) = 1 + p^2$.

۲. اگر G از رده پوچتوانی دو باشد، آنگاه $\omega(G) = 1 + p$.

اثبات. به [Corollary 3.4 ،۱] مراجعه شود. □

ملاحظه ۶.۲. با توجه به لم ۵.۲، برای مطالعه‌ی عدد خوشه‌ای A_2ـ گروه‌ها، از این پس تا پایان مقاله مرتبه‌ی گروه را p^n در نظر می‌گیریم که در آن $n > 4$.

لم ۷.۲. فرض کنیم G یک pـ گروه ناآبلی باشد. در این صورت:

۱. اگر A و B دو زیرگروه ماکسیمال متمایز G باشند، آنگاه $|G' : A'B'| \leq p$.

۲. اگر $|G : \Phi(G)| = p^2$ آنگاه تعداد زیرگروه‌های ماکسیمال G برابر با $p + 1$ می‌باشد.

اثبات. برای اثبات قسمت اول به تمرین شماره ۶۹ صفحه‌ی ۴۵ کتاب [۳] مراجعه شود. قسمت دوم واضح است. □

ملاحظه ۸.۲. فرض کنید G یک pـ گروه فرادوری متناهی باشد. مطابق تعریف، زیرگروه نرمال دوری $\langle a\rangle \trianglelefteq G$ وجود دارد که $G/\langle a\rangle$ نیز دوری است. در نتیجه، می‌توان عضو b از گروه و عدد $1 \leq k < |a|$ را به گونه‌ای انتخاب کرد که:

$$G = \langle b, a\rangle \quad \text{و} \quad b^{-1}ab = a^k$$

واضح است هر عضو G به صورت $b^j a^i$ قابل نمایش است که در آن i و j اعداد صحیح نامنفی می باشند. در ادامه‌ی مقاله، این نمادگذاری را ثابت فرض می‌کنیم.

لم ۹.۲. فرض کنید G یک pـ گروه فرادوری ناآبلی باشد. آن‌گاه:

۱. $k \equiv 1 \pmod p$؛

۲. برای هر $i, j \geq 1$ داریم $[a^i, b^j] = [a, b]^{i(1+k+\cdots+k^{j-1})}$؛

۳. $G' = \langle [a, b]\rangle$؛

۴. دو عضو دلخواه $x = b^j a^i$ و $y = b^s a^r$ در G با هم جابه‌جا می‌شوند اگر و تنها اگر

$$(1 + k + \cdots + k^{s-1})i \equiv (1 + k + \cdots + k^{j-1})r \pmod{|G'|}$$

که در آن $i, j, r, s \geq 0$ و به ازای $m = 0$، مقدار $1 + k + \cdots + k^{m-1}$ برابر صفر تعریف می‌شود.

۵. $\Phi(G) = \langle b^p, a^p\rangle$.

۶. برای هر $i, n \geq 1$، داریم $(ba^i)^n = b^n a^{i(1+k+\cdots+k^{n-1})}$.

اثبات. به لم ۱.۲ در منبع [۵] مراجعه کنید. □

ملاحظه ۱۰.۲. با توجه به قسمت (۱) لم ۹.۲، اگر $p = 2$، آنگاه می‌توان نوشت $k+1 = 2^n\ell$، که در آن $n \geq 1$ و ℓ عددی فرد است. در سرتاسر این مقاله، از این نمادگذاری یکسان استفاده می‌کنیم.

۳ نتایج اصلی

در این بخش، به محاسبه‌ی عدد خوشه‌ای A_2 ــ گروه‌های متناهی می‌پردازیم. برای این منظور، A_2 ــ گروه‌ها را به دو رده‌ی A_2 ــ گروه‌های فرادوری و A_2 ــ گروه‌های غیر فرادوری تقسیم می‌کنیم و به مطالعه عددی خوشه ای در هر دسته می پردازیم.
ابتدا قضیه‌ی بنیادی زیر را درباره‌ی ساختار کلی A_2 ــ گروه‌ها از کتاب برکویچ [؟] ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۳ (Theorem 65.7 and Corollary 65.3 و [؟]). *فرض کنید G یک گروه از مرتبه p^n باشد که $n > 4$.*

۱. *اگر G یک A_2 ــ گروه غیر فرادوری باشد، آنگاه $|G/Z(G)| \leq p^3$.*

۲. *فرض کنید G فرادوری باشد. در این صورت G یک A_2 ــ گروه است اگر و تنها اگر $|G'| = p^2$.*

این فصل را به دو بخش تقسیم می‌کنیم: در بخش اول به مطالعهٔ عدد خوشه‌ای در A_2 ــ گروه‌های فرادوری می‌پردازیم و در بخش دوم، عدد خوشه‌ای در A_2 ــ گروه‌های غیر فرادوری را بررسی می‌کنیم.

۱.۳ A_2 ــ گروه‌های فرادوری

ددر این بخش، A_2 ــ گروه‌های فرادوری در دو حالت $p = 2$ و p فرد بررسی می‌شوند و مقدار دقیق عدد خوشه‌ای $\omega(G)$ برای هر حالت محاسبه می‌شود. برای نمایش این گروه‌ها از قراردادهای ارائه‌شده در ملاحظه‌ی ۸.۲ و ملاحظه‌ی ۱۰.۲ استفاده می‌کنیم.

لم ۲.۳. *فرض کنید G یک A_2 ــ گروه فرادوری از مرتبه 2^n باشد. در این صورت:*

۱. *G دارای سه زیرگروه ماکسیمال متمایز است.*

۲. *اگر G دارای یک زیرگروه ماکسیمال آبلی باشد، آنگاه دقیقاً یک زیرگروه ماکسیمال آبلی دارد و دو زیرگروه ماکسیمال دیگر ناآبلی هستند.*

۳. $|G'| = 4$ و $\Phi(G) = \langle a^2, b^2 \rangle$.

اثبات. ۱- با توجه به $d(G) = 2$، داریم $|G/\Phi(G)| = 2^2$، در نتیجه تعداد زیرگروه‌های ماکسیمال متمایز G برابر ۳ است.
۲- فرض کنید برخلاف حکم، گروه G دارای دو زیرگروه ماکسیمال آبلی متمایز A و B باشد. در این صورت، از لم ۷.۲ (i) داریم $|G'| \leq p|A'||B'| = p$. اما از آنجا که G یک A_2 ــ گروه است، با توجه به قضیه‌ی ۱.۳ (ii) باید $|G'| = p^2$ باشد که این یک تناقض است.
۳- با توجه به مطالب و قراردادهای مطرح‌شده در ملاحظه‌ی ۸.۲، داریم $G' = \langle [a,b] \rangle$ و $[a,b] = a^{k-1}$. با توجه به لم ۹.۲،(i) داریم $k \equiv 1 \pmod 2$. بنابراین $G' \leq \langle a^2 \rangle$. قرار می‌دهیم که $H = \langle a^2, b^2 \rangle$. واضح است که $H \leq G' \leq \Phi(G)$. با در نظر گرفتن نمایش گروه فرادوری معرفی‌شده در ملاحظه‌ی ۸.۲، داریم $|G/H| = 4$. از آن‌جا که $|G/\Phi(G)| = 4$، نتیجه می‌گیریم که $H = \Phi(G)$. □

لم ۳.۳. *فرض کنید G یک A_2 ــ گروه فرادوری از مرتبه 2^n باشد. در این صورت کل زیرگروه‌های ماکسیمال G عبارت‌اند از:*

$$H_1 = \langle a, b^2 \rangle, \quad H_2 = \langle a^2, b \rangle, \quad H_3 = \langle a^2, ba \rangle.$$

اثبات. با توجه به اینکه $G' = \langle a^{k-1} \rangle$ و $2 \mid k-1$، نتیجه می‌گیریم که $G' \leq \langle a^2 \rangle$. بنابراین، $G' \leq H_i$ برای $1 \leq i \leq 3$. همچنین، از آنجا که $\Phi(G) = \langle a^2, b^2 \rangle$، داریم $\Phi(G) \leq H_i$ برای $i = 1, 2$. با توجه به لم ۹.۲ قسمت ششم، داریم $(ba)^2 = b^2 a^{k+1}$. با توجه به اینکه $2 \mid k+1$، $a^2 \in H_3$ و $(ba)^2 \in H_3$، پس $b^2 \in H_3$ و در نتیجه $\Phi(G) \leq H_3$. با توجه به نمایش گروه‌های فرادوری و نرمال بودن H_i، داریم $|G/H_i| = 2$ برای $1 \leq i \leq 3$. در نتیجه، $\Phi(G) < H_i$ برای $1 \leq i \leq 3$. به آسانی می‌توان دید که H_iها زیرگروه‌های دو به دو متمایز هستند. لذا، با در نظر گرفتن اینکه G دارای سه زیرگروه ماکسیمال است، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.
□

لم ۴.۳. *فرض کنید G یک $A_{۲}$ـ گروه فرادوری از مرتبه ۲^n باشد به طوری که تمامی زیرگروه‌های ماکسیمال G ناآبلی هستند. در این صورت:*

۱. $۴ \nmid k+۱$.

۲. $۱۶ \mid |a|$.

۳. G یک ۲ـ گروه توانمند است.

اثبات. ۱- با توجه به فرض مساله $H_{۱} = \langle a, b^{۲} \rangle$ زیرگروه ماکسیمال ناآبلی است، نتیجه می‌گیریم $[a, b^{۲}] \neq ۱$. با به‌کارگیری لم ۹.۲،(ii) داریم $[a, b^{۲}] = [a, b]^{k+۱}$. از آن‌جا که $G' = \langle [a, b] \rangle$ و $|G'| = ۴$ (بر اساس قضیهٔ ۲.۳)، نتیجه می‌شود که $۴ \nmid k+۱$.
۲ـ داریم $\langle a \rangle \gneqq \langle a^{k-۱} \rangle = G'$ و $|G'| = ۴$؛ در نتیجه $۸ \mid |a|$. اگر $|a| = ۸$، آنگاه با توجه به مرتبهٔ G' خواهیم داشت $G' = \langle a^{k-۱} \rangle = \langle a^{۲} \rangle$. از آنجا که $k \equiv ۱ \pmod{۲}$، لذا $۲ \mid k-۱$. اما واضح است که $۴ \nmid k-۱$، زیرا در غیر این صورت $|G'| < ۴$. بنابراین می‌توان فرض کرد $k-۱ = ۲t$ که در آن t عددی فرد است. در این صورت $۴ \mid k+۱$. این نتیجه با قسمت اول در تناقض است؛ بنابراین $۱۶ \mid |a|$.
۳- فرض کنیم $|a| = ۲^n$. با توجه به قسمت دوم، داریم $n \geq ۴$. از آنجا که $\langle a \rangle \gneqq \langle a^{k-۱} \rangle = G'$، نتیجه می‌گیریم

$$G' = \langle a^{۲^{n-۲}} \rangle \leq \langle a^{۴} \rangle \leq \mho_{۲}(G).$$

پس $G/\mho_{۲}(G)$ آبلی است و بنابراین، طبق تعریف، G یک ـ گروه توانمند است. □

لم ۵.۳. *فرض کنید G یک $A_{۲}$ـ گروه فرادوری از مرتبه ۲^n باشد. در این صورت:*

۱. *اگر H یک زیرگروه ماکسیمال ناآبلی از G باشد، آنگاه $|H'| = ۲$.*

۲. *اگر تمام زیرگروه‌های ماکسیمال G ناآبلی باشند و H_i برای $۱ \leq i \leq ۳$ زیرگروه‌های ماکسیمال G باشند، آنگاه*

$$\Phi(G) = \Phi(H_{۱}) \cup \Phi(H_{۲}) \cup \Phi(H_{۳}).$$

اثبات. ۱- با توجه به ناآبلی بودن H و $A_{۲}$ـ گروه بودن G، هر زیرگروه از G با اندیس $p^{۲}$ آبلی است. در نتیجه، همهٔ زیرگروه‌های سرهٔ H آبلی هستند، بنابراین H یک گروه مینیمال ناآبلی است و در نتیجه $|H'| = ۲$.

۲- مطابق قراردادهای لم ۳.۳، زیرگروه‌های ماکسیمال G را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$H_{۱} = \langle a, b^{۲} \rangle, \quad H_{۲} = \langle a^{۲}, b \rangle, \quad H_{۳} = \langle a^{۲}, ba \rangle.$$

از آنجا که هر یک از H_iها (برای $۱ \leq i \leq ۳$) فرادوری هستند، با به‌کارگیری لم ۲.۳ (iii) داریم:

$$\Phi(H_{۱}) = \langle a^{۲}, b^{۴} \rangle, \quad \Phi(H_{۲}) = \langle a^{۴}, b^{۲} \rangle, \quad \Phi(H_{۳}) = \langle a^{۴}, (ba)^{۲} \rangle.$$

با توجه به فرادوری بودن G و H_iها، داریم $d(G) = d(H_i) = ۲$ برای $۱ \leq i \leq ۳$. بنابراین

$$|G : \Phi(G)| = ۴, \qquad |H_i : \Phi(H_i)| = ۴, \qquad \Phi(H_i) \leq \Phi(G).$$

در نتیجه، $\Phi(H_i) < \Phi(G) < H_i$ و لذا $\Phi(H_i)$ یک زیرگروه ماکسیمال از $\Phi(G)$ است. با بررسی مستقیم مشاهده می‌شود که $\Phi(H_{۱})$، $\Phi(H_{۲})$ و $\Phi(H_{۳})$ زیرگروه‌های ماکسیمال دو به دو متمایز از $\Phi(G)$ هستند. از آن‌جا که $\Phi(G)$ یک گروه فرادوری است، دقیقاً سه زیرگروه ماکسیمال دارد. در نتیجه، برهان تکمیل می گردد . □

لم ۶.۳. *فرض کنید G یک $A_{۲}$ـ گروه فرادوری از مرتبه ۲^n باشد به طوری که شامل یک زیرگروه ماکسیمال آبلی باشد. در این صورت $\omega(G) = ۵$.*

اثبات. قرار می‌دهیم
$$A = \{a,\ b,\ ba,\ ba^{۲},\ ba^{۳}\}.$$
ابتدا نشان می‌دهیم که مجموعهٔ A یک مجموعه دوبه‌دو ناجابه‌جایی است. برای این منظور، اگر $۰ \leq i < j \leq ۳$ آنگاه با توجه به $G' < \langle a \rangle$ محاسبهٔ زیر را داریم:
$$[ba^i,\ ba^j] = [b,\ ba^j]^{a^i}[a^i,\ ba^j] = [a,\ b]^{i-j}.$$
اگر $[ba^i,\ ba^j] = ۱$، آنگاه با توجه به $|G'| = ۴$ داریم $۴ \mid (i-j)$ که با شرط $۰ \leq i < j \leq ۳$ در تناقض است. از طرفی، چون G ناآبلی است، $[a,b] \neq ۱$. بنابراین اعضای مجموعهٔ A دوبه‌دو ناجابه‌جایی هستند در نتیجه $۵ \leq \omega(G)$. فرض کنیم H، K و L زیرگروه‌های ماکسیمال متمایز G باشند و H یک زیرگروه آبلی باشد. مطابق لم ۲.۳(ii)، زیرگروه‌های ماکسیمال K و L ناآبلی هستند. از آنجا که هر زیرگروه از G با اندیس ۴ آبلی است، K و L ناآبلی مینیمال هستند. طبق لم ۴.۲، هر یک از K و L را می‌توان به صورت اجتماع سه زیرگروه آبلی ماکسیمال آنها نوشت. چون $\Phi(G)$ زیرگروه ماکسیمال K و L است، $K \cup H$ را می‌توان به صورت اجتماع پنج زیرگروه آبلی ماکسیمال نوشت که یکی از آنها $\Phi(G)$ است. با توجه به $G = H \cup K \cup L$ و آبلی بودن H که شامل $\Phi(G)$ است، G را می‌توان به صورت اجتماع پنج زیرگروه آبلی بیان کرد. در نتیجه $\omega(G) \leq ۵$ و برهان کامل می‌شود. $\square$

لم ۷.۳. *فرض کنید G یک $A_۲$ـ گروه فرادوری از مرتبه ۲^n باشد به طوری که فاقد زیرگروه ماکسیمال آبلی باشد. در این صورت $\omega(G) = ۶$.*

اثبات. قرار می‌دهیم
$$A = \{a,\ b,\ ba,\ ba^{۲},\ ba^{۳},\ b^{۲}a\}.$$
ابتدا نشان می‌دهیم که مجموعهٔ A یک مجموعه دوبه‌دو ناجابه‌جایی است. مطابق برهان لم ۶.۳، مجموعه $\{a,\ b,\ ba,\ ba^{۲},\ ba^{۳}\}$ یک مجموعه دوبه‌دو ناجابه‌جایی از اعضای G است. طبق قراردادهای لم ۳.۳، زیرگروه‌های ماکسیمال G به صورت زیر هستند:
$$H_۱ = \langle a, b^{۲}\rangle, \quad H_۲ = \langle a^{۲}, b\rangle, \quad H_۳ = \langle a^{۲}, ba\rangle.$$
از آنجا که تمام زیرگروه‌های ماکسیمال G ناآبلی هستند، $H_۱$ ناآبلی است و در نتیجه $[a, b^{۲}] \neq ۱$. با به‌کارگیری لم ۹.۲(ii) و با توجه به $|G'| = ۴$، می‌توان نتیجه گرفت $۴ \nmid (k+۱)$. با توجه به روابط جابجاگری، برای هر $۰ \leq i \leq ۳$ داریم:
$$[b^{۲}a,\ ba^i] = [b^{۲},\ ba^i]\,[a,\ ba^i] = [a,\ b]^{-i(k+۱)+۱}.$$
اگر $[b^{۲}a,\ ba^i] = ۱$، آنگاه با توجه به $|G'| = ۴$ و $G' = \langle [a,b]\rangle$، نتیجه می‌شود $۴ \mid \big(۱ - i(k+۱)\big)$. اما از $k \equiv ۱ \pmod{۲}$ تناقضی حاصل می‌شود. بنابراین تمام اعضای مجموعه A دوبه‌دو ناجابجا هستند و در نتیجه $۶ \leq \omega(G)$. با به‌کارگیری لم ۵.۳، داریم $|H'_۱| = |H'_۲| = |H'_۳| = ۲$ و
$$\Phi(G) = \Phi(H_۱) \cup \Phi(H_۲) \cup \Phi(H_۳).$$
طبق لم ۴.۲، هر یک از زیرگروه‌های H_i (برای $۱ \leq i \leq ۳$) را می‌توان به صورت اجتماع سه زیرگروه آبلی ماکسیمال آن نوشت. از آنجا که $\Phi(G)$ زیرگروه ماکسیمال H_i برای هر $۱ \leq i \leq ۳$ است، زیرگروه‌های آبلی M_j، N_j و L_j از G موجودند به‌طوری که
$$H_۱ = M_۱ \cup M_۲ \cup \Phi(G), \qquad H_۲ = N_۱ \cup N_۲ \cup \Phi(G), \qquad H_۳ = L_۱ \cup L_۲ \cup \Phi(G),$$
که در آن $۱ \leq j \leq ۲$. با توجه به اینکه $\Phi(H_۱) \leq M_۱$، $\Phi(H_۲) \leq N_۱$ و $\Phi(H_۳) \leq L_۱$، داریم
$$\Phi(G) = \Phi(H_۱) \cup \Phi(H_۲) \cup \Phi(H_۳) \subseteq M_۱ \cup N_۱ \cup L_۱.$$
بنابراین
$$G = M_۱ \cup M_۲ \cup N_۱ \cup N_۲ \cup L_۱ \cup L_۲,$$
که در آن تمام زیرگروه‌های ظاهر شده در این اجتماع آبلی هستند. در نتیجه $\omega(G) \leq ۶$ و برهان کامل می‌شود. $\square$

با توجه به مطالب و نتایج به دست آمده در این قسمت، نتیجه زیر را داریم:

نتیجه ۸.۳. *فرض کنید G یک A_2 ـ گروه فرادوری از مرتبه 2^n باشد. در این صورت:*

۱. *اگر G شامل یک زیرگروه ماکسیمال آبلی باشد، آنگاه $\omega(G) = 5$.*

۲. *اگر G فاقد زیرگروه ماکسیمال آبلی باشد، آنگاه $\omega(G) = 6$.*

قضیه ۹.۳ ([۶]). *فرض کنید G یک p ـ گروه فرادوری از مرتبه p^n که $p > 2$ باشد. در این صورت*

$$\omega(G) = \frac{|G'|}{p}(1 + p).$$

در انتهای این بخش، با توجه به نتایج به‌دست‌آمده در مورد عدد خوشه‌ای در p ـ گروه‌های فرادوری، قضیه‌ی زیر را نتیجه می‌گیریم.

قضیه ۱۰.۳. *فرض کنید G یک A_2 ـ گروه فرادوری از مرتبه p^n باشد. در این صورت:*

۱. *اگر $p > 2$، آنگاه $\omega(G) = p(1 + p)$.*

۲. *اگر $p = 2$ و G دارای یک زیرگروه ماکسیمال آبلی باشد، آنگاه $\omega(G) = 5$.*

۳. *اگر $p = 2$ و G فاقد زیرگروه ماکسیمال آبلی باشد، آنگاه $\omega(G) = 6$.*

۲.۳ A_2- گروههای غیر فرادوری

فرض کنیم G یک A_2 ـ گروه غیر فرادوری باشد. در این صورت، با توجه به قضیه‌ی ۱.۳، داریم $|G/Z(G)| \leq p^3$. عدد خوشه‌ای این گروه‌ها با استفاده از قضیه‌های زیر به‌دست می‌آید.

قضیه ۱۱.۳. *فرض کنید G یک A_2 ـ گروه غیر فرادوری از مرتبه p^n باشد.*

۱. *اگر $|G/Z(G)| = p^2$، آنگاه $\omega(G) = p + 1$.*

۲. *اگر $|G/Z(G)| = p^3$ و G دارای یک زیرگروه ماکسیمال آبلی باشد، آنگاه $\omega(G) = p^2 + 1$.*

۳. *اگر $|G/Z(G)| = p^3$ و G فاقد زیرگروه ماکسیمال آبلی باشد، آنگاه $\omega(G) = p^2 + p + 1$.*

اثبات. به لمی ۳.۲ از [۶] و قضیه‌ی ۳.۳ از [۱] مراجعه شود. □

بنابراین با توجه به مطالب بیان‌شده در این مقاله، قضیه‌ی بنیادی زیر را که نتیجهٔ اصلی این مقاله است، داریم:

قضیه ۱۲.۳. *فرض کنید G یک A_2 ـ گروه از مرتبه p^n باشد. در این صورت:*

۱. *اگر G غیر فرادوری باشد و $|G/Z(G)| = p^2$، آنگاه $\omega(G) = p + 1$.*

۲. *اگر G غیر فرادوری باشد و $|G/Z(G)| = p^3$ و G دارای یک زیرگروه ماکسیمال آبلی باشد، آنگاه $\omega(G) = p^2 + 1$.*

۳. *اگر G غیر فرادوری باشد و $|G/Z(G)| = p^3$ و G فاقد زیرگروه ماکسیمال آبلی باشد، آنگاه $\omega(G) = p^2 + p + 1$.*

۴. *اگر G فرادوری باشد و $p > 2$، آنگاه $\omega(G) = p(1 + p)$.*

۵. *اگر G یک ۲ ـ گروه فرادوری باشد و دارای زیرگروه ماکسیمال آبلی باشد، آنگاه $\omega(G) = 5$.*

۶. *اگر G یک ۲ ـ گروه فرادوری باشد و فاقد زیرگروه ماکسیمال آبلی باشد، آنگاه $\omega(G) = 6$.*

اثبات. با توجه به قضیه‌های ۱۱.۳ و ۱۰.۳، نتایج مربوط به عدد خوشه‌ای A_2 ـ گروه‌های متناهی جمع‌بندی می‌شود. □

مراجع

[1] A. Azad, S. Fauladi and R. Orfi., 2013. Maximal subsets of pairwise non-commuting elements of some finite p-groups, *Bull. Iran. Math. Soc.*, 39(1), pp.187-192·

[2] Y. Berkovich.,2008. Groups of prime power order. *Vol. 1, Walter de Gruyter*, Berlin.

[3] Y. Berkovich., 2008. Groups of prime power order. *Vol. 2, Walter de Gruyter*, Berlin.

[4] A. Y. M. Chin.,2005. On non-commuting sets in an extraspecial p-group, *J. Group Theory*, 8(2), pp. 189-194.

[5] S. Fouladi and R. Orfi., 2011. Maximal subsets of pairwise non-commuting elements of some finite p-groups of maximal class, *Bull. Aust. Math. Soc*84, pp. 447-451.

[6] S. Fouladi and R. Orfi., 2013. Maximal subsets of pairwise non-commuting elements of some finite metacyclic p-groups *Bull. Aust. Math. Soc*, 87, pp. 18-23.

[7] R. Orfi.,2014. Maximal Subsets of pairwise non-commuting elements of p-groups of order less than p^6, *Int. J. Group Theory* 3, pp.65-72.

[8] The GAP Group, GAP - - *Groups, Algorithms, and Programming,* Version 4.4.12., 2022(http://www.gap-system.org).