Kharazmi University

Mathematical Research

Year 2026, Volume 11, Issue 4, pp. 45–56

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
DOI: xxxx

Median Quicksort Process

Ramin Imany Nabiyyi(1)[1] and Mehri Javanian(2)

(1) Department of Statistics, Faculty of mathematics, Statistics and Computer Sciences, University of Tabriz, Tabriz, Iran

(2) Department of Statistics, Faculty of Sciences, University of Zanjan, Zanjan, Iran

Received: 7 December 2024 Accepted: 2 November 2025 Published online: 25 February 2026

Abstract: The Quicksort algorithm sorts the data stored in an array. The Partial Quicksort algorithm sorts the l smallest numbers out of numbers stored in an array of length n. The Quicksort on the fly provides online first the smallest, then the second smallest and so on. If we stop at the l-th smallest, we obtain Partial Quicksort. In this paper, we analyze $Y_n(\frac{l}{n})$, a correctly normalized version of the number of comparisons needed to sort the l smallest numbers out of numbers stored in an array of length n, by the Median Quicksort algorithm. We show that whenever $l := \lceil nt \rceil$, $t \in [0, 1]$ and $n \longrightarrow \infty$, then the process $Y_n(t) := Y_n(\frac{\lceil nt \rceil}{n})$ converges to $Y(t)$ in the space of cadlag functions.

Keywords: Median Quicksort algorithm, weighted branching process, contraction method, space of cadlag function.

[1]Corresponding author

E-mail addresses: (Ramin Imany Nabiyyi) imany@tabrizu.ac.ir, (Mehri Javanian) javanian@znu.ac.ir

شاپا چاپی: ۲۵۸۸-۲۵۴۶
شاپا الکترونیکی: ۲۲۸۸-۲۵۵۴
DOI: xxxx

پژوهش‌های ریاضی

سال ۱۴۰۴، دوره ۱۱، شماره ۴، ص ۴۵—۵۶

فرآیند مرتب‌سازی سریع میانه‌ـ محور

رامین ایمانی نبیی[(۱)][۱] و مهری جوانیان[(۲)]

[(۱)]دانشگاه زنجان، دانشکده علوم، گروه آمار
[(۲)] دانشگاه تبریز، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، گروه آمار

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۹/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۸/۱۱ تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۱۲/۷

چکیده:
الگوریتم مرتب‌سازی سریع، داده‌های ذخیره شده در یک آرایه را مرتب می‌کند. الگوریتم مرتب‌سازی سریع جزئی، کوچکترین l عدد از n عدد ذخیره شده در یک آرایه را مرتب می‌کند. الگوریتم مرتب‌سازی سریع آنی، ابتدا کوچکترین داده، سپس دومین کوچکترین داده و به همین ترتیب تا آخرین دادهٔ یک آرایه را به ترتیب زمانی مرتب می‌کند که اگر در lـامین کوچکترین داده متوقف شویم، آنگاه همان نتیجهٔ کار الگوریتم مرتب‌سازی سریع جزئی را ارائه می‌کند. در این مقاله به تحلیل $Y_n(\frac{l}{n})$ یک نسخهٔ استاندارد شدهٔ تعداد مقایسه‌های مورد نیاز برای مرتب کردن کوچکترین l عدد از nعدد ذخیره شده در یک آرایه توسط الگوریتم مرتب‌سازی سریع آنی میانه‌ـ محور می‌پردازیم. ما نشان می‌دهیم که هرگاه $l := \lceil nt \rceil$، $t \in [0, 1]$ و $n \longrightarrow \infty$، آنگاه فرآیند $Y_n(t) := Y_n(\frac{\lceil nt \rceil}{n})$ به $Y(t)$در فضای توابع کدلگ همگرا است.

واژه‌هاي کليدي: الگوریتم مرتب‌سازی سریع میانه‌ـ محور، فرآیند شاخه‌ای وزن‌دار، روش انقباض، فضای توابع کدلگ.

۱ مقدمه و نتیجهٔ اصلی

در علوم کامپیوتر، الگوریتم مرتب‌سازی سریع یکی از روش‌های مرتب‌سازی داده‌های ذخیره شده در یک آرایه است که به‌دلیل مصرف حافظهٔ کم، سرعت اجرای مناسب و پیاده‌سازی ساده بسیار مورد قبول واقع شده است. این الگوریتم طی مراحل بازگشتی زیر یک روش تقسیم و غلبه برای مرتب کردن داده‌ها ارائه می‌نماید:

[۱]نویسنده مسئول مقاله
(Ramin Imany Nabiyyi) imany@tabrizu.ac.ir, (Mehri Javanian) javanian@znu.ac.ir

۱. انتخاب **دادهٔ محور**: یکی از داده‌های ذخیره شده در آرایهٔ $\mathcal{S}$ به عنوان دادهٔ محور انتخاب می‌شود.

۲. افراز آرایهٔ $\mathcal{S}$: چینش داده‌های ذخیره شده در آرایه به قسمی تغییر داده می‌شود که تمامی داده‌های کوچکتر از دادهٔ محور در سمت چپ آن (زیرآرایهٔ چپ) و تمامی داده‌های بزرگتر از دادهٔ محور در سمت راست آن (زیرآرایهٔ راست) قرار بگیرند. یعنی آرایهٔ $\mathcal{S}$ به سه قسمت $\mathcal{S}_<$ زیرآرایهٔ چپ، دادهٔ محور و $\mathcal{S}_>$ زیرآرایهٔ راست افراز می‌شود.

۳. مرتب‌سازی بازگشتی: زیرآرایه‌های چپ و راست به روش مرتب‌سازی سریع مرتب می‌شوند.

در حالت کلی می‌توان دادهٔ اول، دادهٔ آخر، یا هر دادهٔ دیگری را به عنوان دادهٔ محور انتخاب کرد.
یکی از روش‌های رایج برای انتخاب دادهٔ محور، انتخاب یک دادهٔ تصادفی به عنوان دادهٔ محور است. انتخاب دادهٔ محور مناسب باعث بالا رفتن کارایی الگوریتم می‌شود. یعنی زمان کمتری برای مرتب‌سازی داده‌ها صرف می‌شود.
برای بسیاری از نسخه‌های مرتب‌سازی سریع، تعداد مقایسه‌های لازم برای مرتب‌سازی داده‌ها که ارتباط مستقیم با زمان صرف شده برای مرتب‌سازی داده‌ها دارد، در مقالات متعددی به‌طور گسترده مورد بررسی قرار گرفته است.
برای محاسبهٔ میانگین و واریانس تعداد مقایسه‌ها به [۳] و برای مشخصه‌سازی توزیع مجانبی تعداد مقایسه‌ها به [۵، ۹، ۱۴، ۱۵] و مراجع موجود در آن‌ها مراجعه کنید.
در مرتب‌سازی سریع استاندارد یکی از داده‌ها به تصادف و به‌طور یکنواخت به عنوان دادهٔ محور انتخاب می‌شود.
در مرتب‌سازی سریع kـ میانه‌ـ محور [۱۱]، به‌ازای عدد طبیعی و ثابت k، از بین داده‌های ذخیره شده در آرایهٔ $\mathcal{S}$، به تعداد $۲k + ۱$ داده به تصادف و به‌طور یکنواخت انتخاب می‌شود و میانهٔ $۲k + ۱$ دادهٔ انتخاب‌شده به عنوان دادهٔ محور در نظر گرفته می‌شود [۶]. درتعمیم مرتب‌سازی سریع kـ میانه‌ـ محور، عدد k یک متغیر تصادفی است [۹].
الگوریتم مرتب‌سازی جزئی که اولین بار توسط [۸] پیشنهاد و تحلیل شد، کوچکترین l عدد از n عدد ذخیره شده در یک آرایه را مرتب می‌کند. مرتب‌سازی آنی یک تعمیم الگوریتم مرتب‌سازی جزئی است که در صورت لزوم همیشه لیست سمت چپ را مرتب می‌کند [۲، ۷، ۱۰، ۱۳]. مرتب‌سازی سریع آنی، ابتدا کوچکترین داده، سپس دومین کوچکترین داده و به همین ترتیب تا بزرگترین دادهٔ موجود در یک آرایه را تحویل می‌دهد.
در این مقاله، به‌ازای عدد طبیعی و ثابت k، مرتب‌سازی سریع آنی kـ میانه‌ـ محور را در نظر می‌گیریم. به این‌صورت که ابتدا فرض می‌کنیم n داده در آرایهٔ $\mathcal{S}$ با اندازهٔ $n := |\mathcal{S}|$ ذخیره شده‌اند. اگر $|\mathcal{S}| < ۲k + ۱$ باشد، آنگاه $\mathcal{S}$ را با مرتب‌سازی سریع استاندارد مرتب می‌کنیم. اگر $|\mathcal{S}| \geq ۲k + ۱$ باشد، آنگاه $۲k + ۱$ داده در $\mathcal{S}$ را به تصادف و به‌طور یکنواخت انتخاب می‌کنیم و میانهٔ آنها را به عنوان دادهٔ محور در نظر می‌گیریم. با مقایسهٔ هر یک از داده‌ها در آرایهٔ $\mathcal{S}$ با دادهٔ محور، آنگاه داده‌هایی که اکیداً کوچکتر (بزرگتر) از دادهٔ محور است در $\mathcal{S}_<$ زیرآرایهٔ چپ ($\mathcal{S}_>$ زیرآرایهٔ راست) قرار می‌گیرند. سپس در صورت لزوم، الگوریتم مذکور را برای $\mathcal{S}_<$ فراخوانی می‌کنیم و بعد از آن در صورت لزوم، الگوریتم مذکور را برای $\mathcal{S}_>$ نیز فراخوانی می‌کنیم. خروجی نهایی الگوریتم به این‌صورت است که مرتب شدهٔ داده‌ها در آرایهٔ $\mathcal{S}$ را به ترتیب زمانی ارائه می‌دهد. یعنی ابتدا کوچکترین داده، سپس دومین کوچکترین داده و به همین ترتیب تا آخرین دادهٔ یک آرایه را به ترتیب زمانی مرتب می‌کند.
فرض کنید به‌ازای هر آرایهٔ $\mathcal{S}$ و $l = ۱, \ldots, |\mathcal{S}|$ ، متغیر تصادفی $X(\mathcal{S}, l)$ تعداد مقایسه‌های انجام شده توسط الگوریتم مرتب‌سازی سریع آنی kـ میانه‌ـ محور باشد که به محض ارائهٔ lـ امین کوچکترین داده، متوقف شود. پس $X(\mathcal{S}, ۰) = ۰$. اگر $W(\mathcal{S})$ تعداد مقایسه‌های لازم برای تعیین دادهٔ محور و یافتن داده‌های اکیدا کوچکتر و اکیدا بزرگتر از دادهٔ محور باشد که به ترتیب در آرایه‌های $\mathcal{S}_<$ و $\mathcal{S}_>$ ذخیره می‌شوند آنگاه فرض $-۱ \leq W(\mathcal{S}) - |\mathcal{S}| \leq (۲k + ۱)^۲$ معقول است:

- برای تعیین دادهٔ محور، اگر $۲k + ۱$ دادهٔ انتخاب‌شده مرتب شده باشند (بهترین حالت)، دادهٔ محور (میانهٔ آنها) برابر با دادهٔ وسط است. بنابراین برای تعیین دادهٔ محور، مقایسه‌ای انجام نمی‌شود. در نتیجه کمترین مقدار $W(\mathcal{S})$ فقط برابر تعداد مقایسه‌های هر داده در آرایه‌های $\mathcal{S}_<$ و $\mathcal{S}_>$ با دادهٔ محور است

$$(|\mathcal{S}_>| + |\mathcal{S}_<| = |\mathcal{S}| - ۱).$$

- برای تعیین دادهٔ محور، اگر هیچ دو دادهٔ متوالی از $۲k + ۱$ دادهٔ انتخاب‌شده به ترتیب نباشند (بدترین حالت)، آنگاه دادهٔ محور (میانهٔ آنها) با $k(۲k + ۱)$ مقایسه به دست می‌آید. درنتیجه بیشترین مقدار $W(\mathcal{S})$ برابر با $|\mathcal{S}| - ۱ + k(۲k + ۱)$ است که حداکثر از مرتبهٔ $|\mathcal{S}| + (۲k + ۱)^۲$ می‌شود.

اگر تابع نشانگر پیشامد A را با علامت $\mathbb{I}_A$ نشان دهیم، آنگاه به‌ازای $|\mathcal{S}| \geq ۲k+۱$ و $l = ۱,۲,\ldots,|\mathcal{S}|$، متغیرهای تصادفی $X(\mathcal{S},l)$ ، در رابطهٔ بازگشتی به‌صورت

$$\big(X(\mathcal{S},l)\big)_{l=۱}^{|\mathcal{S}|} = \Big(\mathbb{I}_{l\geq Z(\mathcal{S})}\Big(X^{(۱)}(\mathcal{S}_<, Z(\mathcal{S})-۱) + X^{(۲)}(\mathcal{S}_>, l-Z(\mathcal{S}))\Big) + \mathbb{I}_{l<Z(\mathcal{S})}X^{(۱)}(\mathcal{S}_<, l) + W(\mathcal{S})\Big)_{l=۱}^{|\mathcal{S}|}, \tag{۱.۱}$$

صدق می‌کنند که در آن $Z(\mathcal{S}) := |\mathcal{S}_<|+۱$ رتبهٔ دادهٔ محور است و تعداد مقایسه‌های انجام شده در آرایه‌های $\mathcal{S}_<$ و $\mathcal{S}_>$ به ترتیب با متغیرهای تصادفی $X^{(۱)}$ و $X^{(۲)}$ نشان داده می‌شوند. توجه داشته باشید که به‌ازای یک آرایهٔ $\mathcal{S}$ داده شده و مشخص، متغیرهای تصادفی $\big(W(\mathcal{S}), Z(\mathcal{S})\big)$، $X^{(۱)}(\mathcal{S}_<, Z(\mathcal{S})-۱)$ و $X^{(۲)}(\mathcal{S}_>, l-Z(\mathcal{S}))$ مستقل هستند.
توزیع احتمال متغیرهای تصادفی $X(\mathcal{S},l)$، $W(\mathcal{S})$ و $Z(\mathcal{S})$ فقط به $n := |\mathcal{S}|$، یعنی اندازهٔ آرایهٔ $\mathcal{S}$ بستگی دارد و نه محتوی داده‌های ذخیره شده در $\mathcal{S}$. بنابراین اگر $X(n,l) \stackrel{d}{=} X(\mathcal{S},l)$، $W_n \stackrel{d}{=} W(\mathcal{S})$ و $Z_n \stackrel{d}{=} Z(\mathcal{S})$ باشند که در آن علامت $\stackrel{d}{=}$ نشان دهندهٔ برابری در توزیع است، آنگاه به‌ازای $n \geqslant ۲k+۱$ و با توجه به رابطهٔ (۱.۱) داریم

$$\big(X(n,l)\big)_{l=۱}^{n} \stackrel{d}{=} \Big(\mathbb{I}_{l\geq Z_n}\Big(X^{(۱)}(Z_n-۱, Z_n-۱) + X^{(۲)}(n-Z_n, l-Z_n)\Big) + \mathbb{I}_{l<Z_n}X^{(۱)}(Z_n-۱, l) + W_n\Big)_{l=۱}^{n}, \tag{۲.۱}$$

که در آن برای nای ثابت و با این شرط که $Z_n = i$ باشد، آنگاه به‌ازای $j = ۱,۲$، متغیرهای تصادفی W_n، $X^{(۱)}(i,\cdot)$ و $X^{(۲)}(i,\cdot)$ مستقل هستند، $X(i,\cdot) \stackrel{d}{=} X^{(۱)}(i,\cdot) \stackrel{d}{=} X^{(۲)}(i,\cdot)$، $X(n,\circ)=\circ$ و $X(\circ,\cdot) = X(۱,\cdot) \equiv \circ$.
همچنین توزیع Z_n عبارت است از

$$\mu_n(i) := \mathbb{P}(Z_n = i) = \frac{\binom{i-۱}{k}\binom{n-i}{k}}{\binom{n}{۲k+۱}}\mathbb{I}_{\{k+۱,\ldots,n-k\}}(i) \tag{۳.۱}$$

هرگاه $n \longrightarrow \infty$، توزیع حدی $\frac{Z_n}{n}$ یک توزیع بتا $\circ < x < ۱$, $g(x) := \frac{(۲k)!}{k!k!}x^k(۱-x)^k$ است: برای $\circ < t < ۱$،

$$\sum_{i=(k+۱)/n}^{\lceil tn\rceil/n} \frac{\binom{i-۱}{k}\binom{n-i}{k}}{\binom{n}{۲k+۱}} = \frac{(۲k)!}{k!k!n}\sum_{i=(k+۱)/n}^{\lceil tn\rceil/n}(\frac{i-۱}{n-۱})^k(\frac{n-i}{n-k-۱})^k \sim \int_\circ^t \frac{(۲k)!}{k!k!}x^k(۱-x)^k dx.$$

در این مقاله، هرگاه $n \longrightarrow \infty$ و $l = \circ,۱,\ldots,n$ به بررسی توزیع حدی یک نسخهٔ نرمال شدهٔ $X(n,l)$،

$$\Big(Y_n(\frac{l}{n})\Big)_l = \Big(\frac{X(n,l)-a(n,l)}{n}\Big)_l,$$

می‌پردازیم و $a(n,l) := \mathbb{E}(X(n,l))$ (برای محاسبهٔ $a(n,l)$ به [۴] مراجعه کنید)، به‌صورت

$$a(n,l) = \alpha l \ln n + nb(\frac{l}{n}) + o(n),$$

است که در آن (در بالا تابع $\circ < x < ۱$, $g(x) := \frac{(۲k)!}{k!k!}x^k(۱-x)^k$ معرفی شد)،

$$\alpha := \Big(-۲\int_\circ^۱ (x\ln x)g(x)dx\Big)^{-۱}, \tag{۴.۱}$$

و به‌ازای عدد ثابت βای، تابع $b(\cdot)$ تنها جواب معادلهٔ بازگشتی زیر

$$b(t) = \int_t^{1} xb(\frac{t}{x})g(x)dx + \int_0^t (1-x)b(\frac{t-x}{1-x})g(x)dx + c^*(t), \tag{۵.۱}$$

$$c^*(t) := \alpha \int_0^t \Big(x\ln x + (t-x)\ln(t-x) + \frac{\beta}{\alpha}x - t\ln t \Big) g(x)dx + 1,$$

است. تابع $b(\cdot)$ از راست پیوسته و دارای حد چپ بر بازهٔ $[0,1]$ است. یعنی تابع $b(\cdot)$ یک تابع کدلگ $(cadlag)$ است. مجموعهٔ توابع کدلگ بر بازهٔ $[0,1]$ را با D نشان می‌دهیم. هرگاه $l = n$، $a(n,l) = a(n,n)$ برابر با امیدریاضی تعداد مقایسه‌ها در مرتب‌سازی سریع kـ میانه محور است که در [۱] و تعمیم آن در [۱۱] مورد بررسی قرار گرفته و نتیجه به‌صورت زیر است:

$$a(n,n) = \alpha n \ln n + \beta n + o(n).$$

به ازای هر $t \in [0,1]$، فرآیند $Y_n(t) := Y_n\left(\frac{\lceil nt \rceil}{n}\right)$ تعمیم فرآیند $Y_n\left(\frac{l}{n}\right)$ (تعریف شده در بالا) و تابعی کدلگ است که در آن علامت $\lceil x \rceil$ کمترین عدد صحیح بزرگتر از x را می‌دهد. با توجه به رابطهٔ (۲.۱)، به‌ازای $n \geq 2k+1$ داریم

$$\Big(Y_n(t)\Big)_t \stackrel{d}{=} \Big(\mathbb{I}_{t>\frac{Z_n}{n}} (\frac{Z_n - 1}{n} Y^{(1)}_{Z_n - 1}(1) + \frac{n - Z_n}{n} Y^{(2)}_{n - Z_n}(\frac{\lceil nt \rceil - Z_n}{n - Z_n})) + \mathbb{I}_{t \leq \frac{Z_n}{n}} \frac{Z_n - 1}{n} Y^{(1)}_{Z_n - 1}(\frac{\lceil nt \rceil}{Z_n - 1} \wedge 1) + \overline{\mathcal{C}}_n(\lceil nt \rceil, Z_n) \Big)_t, \tag{۶.۱}$$

$$\overline{\mathcal{C}}_n(l,i) := \frac{1}{n} \Big(W_n - a(n,l) + \mathbb{I}_{l<i} a(i-1,l) + \mathbb{I}_{l\geq i}\big(a(i-1,i-1) + a(n-i,l-i)\big) \Big), \tag{۷.۱}$$

که در آن برای nای ثابت و با این شرط که $Z_n = i$ باشد، آنگاه به‌ازای $i = 1,2$، متغیرهای تصادفی $\overline{\mathcal{C}}_n(\cdot,i)$، $Y^{(1)}_{i-1}$ و $Y^{(2)}_{n-i}$ مستقل هستند، $Y^{(1)}_i \stackrel{d}{=} Y^{(2)}_i \stackrel{d}{=} Y_i$، $\overline{\mathcal{C}}_n(0,i) = 0$ و $Y_i(\cdot)$، $Y^{(2)}_i(\cdot)$ و $Y^{(1)}_i(\cdot)$ توابع کدلگ در D با نُرم

$$\| f \|_{\infty,2} = \| \| f \|_\infty \|_2 = \| \sup_t |f(t)| \|_2 = \sqrt{\mathbb{E}\Big(\sup_t |f(t)|\Big)^2},$$

به ازای هر $f \in D$ هستند. فضای نُرم‌دار $(D, \| \cdot \|_{\infty,2})$ یک فضای باناخ است.
فرض کنید هرگاه $n \longrightarrow \infty$، فرآیند $Y_n(t)$ به فرآیند $Y(t)$ در فضای توابع کدلگ همگرا باشد. در قضیهٔ ۱، با استفاده از نشاندن فرآیند $Y(t)$ بر یک فرآیند شاخه‌ای وزن‌دار دودویی و روش انقباض نشان می‌دهیم که $Y(t)$ در معادلهٔ زیر

$$Y(t) \stackrel{d}{=} \Big(\overline{\mathcal{C}}(t,Z) + \mathbb{I}_{t\leq Z} Z Y^{(1)}(\frac{t}{Z}) + \mathbb{I}_{t>Z} \Big(Z Y^{(1)}(1) + (1-Z) Y^{(2)}(\frac{t-Z}{1-Z}) \Big) \Big)_t \tag{۸.۱}$$

$$\overline{\mathcal{C}}(t,x) := 1 + \mathbb{I}_{t>x} \Big(\alpha x \ln x + \beta x + \alpha(t-x)\ln(t-x) + (1-x) b\Big(\frac{t-x}{1-x}\Big) - \alpha t \ln t - b(t) \Big) + \mathbb{I}_{t\leq x} \Big(x b\Big(\frac{t}{x}\Big) - b(t) \Big) \tag{۹.۱}$$

صدق می‌کند و جوابی یکتا برای این معادله است که در آن Z دارای چگالی $g(x)$ (چگالی بتای معرفی شده در بالا) است، متغیرهای تصادفی Z، $Y^{(1)}$ و $Y^{(2)}$ مستقل هستند، $Y \overset{d}{=} Y^{(2)} \overset{d}{=} Y^{(1)}$، Y، $Y^{(2)}$ و $Y^{(1)}$ توابع کدلگ در فضای توابع کدلگ $(D, \|\cdot\|_{\infty,2})$ هستند و $\lim_{n\to\infty} \overline{\mathcal{C}}_n(l_n, i_n) = \overline{\mathcal{C}}(t,x)$، با $\frac{l_n}{n} \to t > 0$ و $\frac{i_n}{n} \to x > 0$.
در نهایت با نشاندن فرآیند $Y(t)$ بر یک فرآیند شاخه‌ای وزن‌دار دودویی و ساختن نسخه‌هایی از $Y_n(t)$ و $Y(t)$، نشان می‌دهیم که هرگاه $n \longrightarrow \infty$، آنگاه $\|Y_n - Y\|_{\infty,2} = \|\sup_t |Y_n(t) - Y(t)|\|_2 \longrightarrow 0$.

۲ فرآیند شاخه‌ای وزن‌دار

فرض کنید $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ یک فضای احتمال و H یک فضای اندازه‌پذیر باشد. اگر H^H فضای توابع $h : H \longrightarrow H$ باشد،

$$V = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{1,2\}^n = \{\emptyset, 1, 2, 11, 12, 21, 22, 111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222, \ldots\},$$

و برای $i = 1, 2$، توابع تصادفی $T_i : \Omega \longrightarrow H^H$ و $\mathcal{C} : \Omega \longrightarrow H$ اندازه‌پذیر باشند، آنگاه چهارتایی $(V, H, T, \mathcal{C})$ یک فرآیند شاخه‌ای وزن‌دار را تعریف می‌کند که در آن $T = (T_1, T_2) \in H^H \times H^H$ (تابع وزن) و مجموعهٔ V برچسب‌های گره‌های یک درخت دودویی ریشه‌دار است که $\emptyset$ برچسب ریشهٔ آن است و به ازای هر $v \in V$ و $i \in \{1,2\}$، (v, vi) یک یال این درخت دودویی است. هر گرهٔ با برچسب $v \in V$ که در فاصلهٔ n از ریشهٔ درخت باشد، آنگاه $v = v_1 v_2 \ldots v_n$ است که در آن برای هر i، $v_i \in \{1,2\}$ و طول v برابر $|v| = n$. فرزندهای چپ و راست گرهٔ با برچسب v به طول $n = |v|$، به ترتیب دارای برچسب‌های $v1 = v_1 \ldots v_n 1$ و $v2 = v_1 \ldots v_n 2$ هستند. طبق [12]،

$$V_n := \{v \in V; |v| = n\}, \qquad V_{\leq n} := \{v \in V; |v| \leq n\}, \qquad V_{<n} := \{v \in V; |v| < n\}.$$

فرض کنید به‌ازای $v \in V$، $(T^v, \mathcal{C}^v) \overset{iid}{=} (T, \mathcal{C})$ باشند، که $T = (T_1, T_2)$ و $T^v = (T_1^v, T_2^v)$. برای $i = 1, 2$، وزن روی یالی که گرهٔ با برچسب v و فرزندش با برچسب vi را به هم متصل می‌کند را با $L_{vi}^v := T_i^v$ تعریف می‌کنیم. برای مثال شکل 1 را ملاحظه نمایید. برای $i = 1, 2$ و $v, w \in V$، وزن مسیر بین دو گرهٔ با برچسب‌های v و wi از رابطهٔ بازگشتی $L_{wi}^v = L_w^v(T_i^{vw})$ با $L_v := L_v^{\emptyset}$، حاصل می‌شود که اگر $w = w_1 w_2 \ldots w_m$ داریم

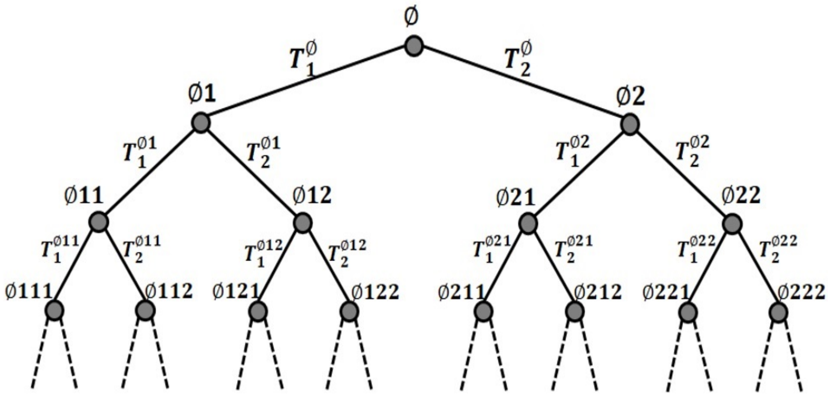
$$L_w^v = T_{w_1}^v T_{w_2}^{vw_1} T_{w_3}^{vw_1w_2} \ldots T_{w_m}^{vw_1w_2\ldots w_{m-1}},$$

بنابراین فرآیند شاخه‌ای وزن‌دار $\{R_m^{\emptyset}\}_{m\geq 1}$ به این‌صورت تشکیل می‌شود که:

$$\begin{aligned}
R_1^{\emptyset} :&= \mathcal{C}^{\emptyset} = L_{\emptyset},\\
R_2^{\emptyset} :&= \mathcal{C}^{\emptyset} + T_1^{\emptyset}(\mathcal{C}^{\emptyset 1}) + T_2^{\emptyset}(\mathcal{C}^{\emptyset 2}) = \mathcal{C}^{\emptyset} + T_1^{\emptyset}(R_1^{\emptyset 1}) + T_2^{\emptyset}(R_1^{\emptyset 2})\\
&= L_{\emptyset} + L_1(\mathcal{C}^{\emptyset 1}) + L_2(\mathcal{C}^{\emptyset 2}),\\
R_3^{\emptyset} :&= \mathcal{C}^{\emptyset} + T_1^{\emptyset}\mathcal{C}^{\emptyset 1} + T_2^{\emptyset}\mathcal{C}^{\emptyset 2} + T_1^{\emptyset}T_1^{\emptyset 1}\mathcal{C}^{\emptyset 11} + T_1^{\emptyset}T_2^{\emptyset 1}\mathcal{C}^{\emptyset 12} + T_2^{\emptyset}T_1^{\emptyset 2}\mathcal{C}^{\emptyset 21} + T_2^{\emptyset}T_2^{\emptyset 2}\mathcal{C}^{\emptyset 22}\\
&= L_{\emptyset} + L_1\mathcal{C}^{\emptyset 1} + L_2\mathcal{C}^{\emptyset 2} + L_{11}\mathcal{C}^{\emptyset 11} + L_{12}\mathcal{C}^{\emptyset 12} + L_{21}\mathcal{C}^{\emptyset 21} + L_{22}\mathcal{C}^{\emptyset 22}\\
&= \mathcal{C}^{\emptyset} + T_1^{\emptyset}(\mathcal{C}^{\emptyset 1} + T_1^{\emptyset 1}\mathcal{C}^{\emptyset 11} + T_2^{\emptyset 1}\mathcal{C}^{\emptyset 12}) + T_2^{\emptyset}(\mathcal{C}^{\emptyset 2} + T_1^{\emptyset 2}\mathcal{C}^{\emptyset 21} + T_2^{\emptyset 2}\mathcal{C}^{\emptyset 22})\\
&= \mathcal{C}^{\emptyset} + T_1^{\emptyset}(R_2^{\emptyset 1}) + T_2^{\emptyset}(R_2^{\emptyset 2}),
\end{aligned}$$

و به همین ترتیب، به ازای $m \geq 1$،

$$R_m^{\emptyset} := \sum_{w\in V_{<m}} L_v\big(\mathcal{C}^{\emptyset v}\big) = \mathcal{C}^{\emptyset} + T_1^{\emptyset}(R_{m-1}^{\emptyset 1}) + T_2^{\emptyset}(R_{m-1}^{\emptyset 2}).$$



شکل ۱: نمایش درخت متناظر یک فرآیند شاخه‌ای وزن‌دار دودویی .

در حالت کلی، هرگاه فرآیند شاخه‌ای وزن‌دار به جای گرهٔ با برچسب $\emptyset$(ریشه)، از گرهٔ با برچسب $v \in V$ آغاز شود، آنگاه

$$R_m^v := \sum_{w \in V_{<m}} L_w^v\big(\mathcal{C}^{vw}\big) = \mathcal{C}^v + T_{۱}^v(R_{m-۱}^{v۱}) + T_{۲}^v(R_{m-۱}^{v۲}) \qquad (۱.۲)$$

فرض کنید $\mathcal{A}_n$ سیگما میدان تولید شده توسط $\mathcal{C}^v$، T_i^v به‌ازای $v \in V_{<n}$ و $i = ۱,۲$ باشد. بنابراین L_w^v و $\mathcal{C}^{vw}$ مستقل از یکدیگر هستند و نسبت به سیگما میدان $\mathcal{A}_{|vw|}$ اندازه‌پذیر هستند.

۳ وجود و یکتایی فرآیند حدی

در این بخش، با استفاده از نشاندن یک فرآیند شاخه‌ای وزن‌دار بر روی فرآیند $Y(t)$ و با استفاده از روش انقباض، به اثبات وجود و یکتایی فرآیند $Y(t)$ در فضای توابع کدلگ D به عنوان نقطهٔ ثابت معادلهٔ (۸.۱) می‌پردازیم.
ابتدا یک فرآیند شاخه‌ای وزن‌دار توسط چهارتایی $(V, D, \tilde{T}, \tilde{\mathcal{C}})$ تعریف می‌کنیم به طوری که برای هر تابع $h(t) \in D$، تابع وزن $\tilde{T} = (\tilde{T}_{۱}, \tilde{T}_{۲}) \in D^D \times D^D$ با مولفه‌های $\tilde{T}_{۱} : D \longrightarrow D$ و $\tilde{T}_{۲} : D \longrightarrow D$ به صورت

$$\tilde{T}_{۱}(h(t)) := \mathbb{I}_{]۰,Z]}(t) Z h\Big(۱ \wedge \frac{t}{Z}\Big),$$
$$\tilde{T}_{۲}(h(t)) := \mathbb{I}_{]Z,۱]}(t)(۱ - Z) h\Big(۰ \vee \frac{t - Z}{۱ - Z}\Big),$$

است که در آن Z با تابع چگالی $g(x)$ تعریف شده در معادلهٔ (۸.۱) باشد و به ازای تابع $\overline{\mathcal{C}}$ تعریف شده در (۹.۱)،

$$\tilde{\mathcal{C}} := \overline{\mathcal{C}}(t, Z) + \mathbb{I}_{]Z,۱]}(t) Z Q, \qquad (۱.۳)$$

که در آن $Q =: Y(۱) \xrightarrow{d} \dfrac{X(n,n) - a(n,n)}{n} = Y_n(۱)$ است (برهان این همگرایی در توزیع را در [۱۱] ملاحظه کنید). بنابراین اگر به‌ازای $v \in V$، $((\tilde{T}, \tilde{\mathcal{C}}), Z, Q) \overset{iid}{=} ((\tilde{T}^v, \tilde{\mathcal{C}}^v), Z^v, Q^v)$ باشد، که $\tilde{T}^v = (\tilde{T}_{۱}^v, \tilde{T}_{۲}^v)$، آنگاه از چهارتایی $(V, D, \tilde{T}, \tilde{\mathcal{C}})$ و همانند (۱.۲)، به‌ازای هر $v \in V$، فرآیند شاخه‌ای وزن‌دار زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{R}_m^v := \sum_{w \in V_{<m}} L_w^v\big(\tilde{\mathcal{C}}^{vw}\big) = \tilde{\mathcal{C}}^v + \tilde{T}_{۱}^v(\tilde{R}_{m-۱}^{v۱}) + \tilde{T}_{۲}^v(\tilde{R}_{m-۱}^{v۲}). \qquad (۲.۳)$$

قضیه ۱.۳. *به‌ازای هر $t \in [۰,۱]$، برای امیدریاضی و واریانس تابع $\tilde{C}(t)$ تعریف شده در (۱.۳)، داریم*

$$\mathbb{E}\Big(\tilde{C}(t)\Big) = ۰, \qquad \sup_{۰ \leq t \leq ۱} \mathbb{V}\Big(\tilde{C}(t)\Big) < \infty.$$

اثبات. در [۱۱] نشان داده شده است که $\mathbb{E}(Q) = ۰$ و $\mathbb{E}(Q^۲) < \infty$. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\tilde{C}(t)\Big) &= \mathbb{E}\Big(\overline{C}(t,Z)\Big) + \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\mathbb{I}_{]Z,۱]}(t) ZQ \mid Z)\Big) = \mathbb{E}\Big(\overline{C}(t,Z)\Big) + ۰ \\
&= \int_t^۱ xb\Big(\frac{t}{x}\Big) g(x)dx + \int_۰^t (۱-x) b\Big(\frac{t-x}{۱-x}\Big) g(x)dx - b(t) \\
&\quad + ۱ + \alpha \int_۰^t \Big(x \ln x + (t-x)\ln(t-x) + \frac{\beta}{\alpha} x - t \ln t\Big) g(x)dx = ۰
\end{aligned}$$

با استفاده از $\sup_{۰ \leq t \leq ۱} |x \ln x| < \infty$ ، به‌ازای هر $t \in [۰,۱]$، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\big(\tilde{C}(t)\big)^۲\Big) \leq \int_۰^t \Big(& ۱ + \alpha x \ln x + \beta x + \alpha(t-x)\ln(t-x) \\
&+ (۱-x) b\Big(\frac{t-x}{۱-x}\Big) - \alpha t \ln t - b(t)\Big)^۲ g(x)dx \\
&+ \int_t^۱ \Big(۱ + xb\Big(\frac{t}{x}\Big) - b(t)\Big)^۲ g(x)dx + \mathbb{E}(Q^۲) < \infty.
\end{aligned}$$

□

قضیه ۲.۳. *فرض کنید $\tilde{R}^v_m$ فرآیند شاخه‌ای وزن‌دار تعریف شده توسط چهارتایی $(V, D, \tilde{T}, \tilde{C})$ در (۲.۳) باشد. در این‌صورت، هرگاه $m \longrightarrow \infty$، آنگاه به‌ازای هر $v \in V$، متغیر تصادفی $\tilde{R}^v$ای یکتا در فضای توابع کدلگ $(D, \|\cdot\|_{\infty,۲})$ وجود دارد که $\tilde{R}^v_m \xrightarrow{a.s.} \tilde{R}^v$. یعنی $\tilde{R}^v_m$ تقریبا حتمی همگرا به $\tilde{R}^v$ است و $\tilde{R}^v$ در معادلهٔ بازگشتی زیر تقریبا حتمی صدق می‌کند:*

$$\tilde{R}^v := \sum_{i=۱}^{۲} \tilde{T}^v_i\big(\tilde{R}^{vi}\big) + \tilde{C}^v. \tag{۳.۳}$$

همچنین توزیع $\tilde{R}^v$ جواب یکتای معادلهٔ توزیعی (۸.۱) است.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{S}^v_۰ := \tilde{C}^v$ و به‌ازای هر $m \in \mathbb{N}$، $\mathcal{S}^v_m := \tilde{R}^v_{m+۱} - \tilde{R}^v_m$ و $q_m := \| \mathcal{S}^v_m \|_{\infty,۲}$. بر اساس (۲.۳) و به‌ازای هر $m \geq ۲$، داریم

$$\mathcal{S}^v_m := \sum_{i=۱}^{۲} \tilde{T}^v_i\big(\tilde{R}^{vi}_m\big) - \sum_{i=۱}^{۲} \tilde{T}^v_i\big(\tilde{R}^{vi}_{m-۱}\big) = \sum_{i=۱}^{۲} \tilde{T}^v_i\big(\tilde{R}^{vi}_m - \tilde{R}^{vi}_{m-۱}\big) = \sum_{i=۱}^{۲} \tilde{T}^v_i\big(\mathcal{S}^{vi}_{m-۱}\big).$$

بنابراین به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
q^۲_m =& \mathbb{E}\Bigg[\Bigg(\sup_t \Big(\mathbb{I}_{t<Z^v} Z^v \mathcal{S}^{v۱}_{m-۱}\big(\frac{t}{Z^v}\big) + \mathbb{I}_{t \geq Z^v}(۱-Z^v)\mathcal{S}^{v۲}_{m-۱}\big(\frac{t-Z^v}{۱-Z^v}\big)\Big)\Bigg)^۲\Bigg] \\
&\leq \mathbb{E}\Bigg[\Big(\max_{۱۱}\{Z^v \| \mathcal{S}^{v۱}_{m-۱} \|_\infty, (۱-Z^v) \| \mathcal{S}^{v۲}_{m-۱} \|_\infty\}\Big)^۲\Bigg] \\
&\leq \mathbb{E}\Big[Z^{v۲} \| \mathcal{S}^{v۱}_{m-۱} \|^۲_\infty + (۱-Z^v) \| \mathcal{S}^{v۲}_{m-۱} \|^۲_\infty\Big] \\
&\leq \mathbb{E}[Z^{v۲} \| \mathcal{S}^{v۱}_{m-۱} \|^۲_\infty] + \mathbb{E}[(۱-Z^v) \| \mathcal{S}^{v۲}_{m-۱} \|^۲_\infty] \\
&= ۲\mathbb{E}[Z^{v۲}]\mathbb{E}[\| \mathcal{S}^v_{m-۱} \|^۲_\infty] = r q^۲_{m-۱},
\end{aligned}$$

که در آن با استفاده از تعریف تابع گاما $\Gamma(\cdot)$،

$$r := \left(\frac{\Gamma(k+۱+۲)\Gamma(۲k+۲)}{\Gamma(۲k+۲+۲)\Gamma(k+۱)}\right)^{\frac{۱}{۲}} < ۱. \qquad (۴.۳)$$

با تکرار این نابرابری داریم

$$q_m \leq q_\circ r^{\frac{m+۱}{۲}}, \qquad q_\circ := \| \tilde{\mathcal{C}}^v \|_{\infty,۲}\,.$$

از طرفی هرگاه n ثابت و $m < n$ باشد، آنگاه

$$\| \tilde{R}^v_n - \tilde{R}^v_m \|_{\infty,۲} \leq \sum_{j\geq m+۱} \| \mathcal{S}^v_j \|_{\infty,۲} \leq q_\circ r^{\frac{m+۱}{۲}} \cdot \frac{۱}{۱-\sqrt{r}} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \circ.$$

بنابراین $\{\tilde{R}^v_m\}_{m\geq\circ}$ یک دنبالهٔ کوشی در فضای $(D, \| \cdot \|_{\infty,۲})$ است و اگر $\tilde{R}^v$ حد تقریبا حتمی این دنباله باشد، آنگاه

$$\tilde{R}^v(t) := \sum_{m=۱}^{\infty} \mathcal{S}^v_m(t), \qquad t \in [\circ, ۱].$$

طبق (۲.۳) و $\tilde{R}^v_m \xrightarrow{a.s} \tilde{R}^v$، معادلهٔ (۳.۳) به دست می‌آید که با استفاده از تعاریف $\tilde{T}^v_۱$، $\tilde{T}^v_۲$و $\tilde{\mathcal{C}}^v$، به ازای هر $t \in [\circ, ۱]$، معادلهٔ (۳.۳) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\left(\tilde{R}^v(t)\right)_t = \left(\mathbb{I}_{t\leq Z^v} Z^v \tilde{R}^{v۱}\left(\frac{t}{Z^v}\right) + \mathbb{I}_{t>Z^v}(۱-Z^v)\tilde{R}^{v۲}\left(\frac{t-Z^v}{۱-Z^v}\right) + \tilde{\mathcal{C}}^v(t)\right)_t. \qquad (۵.۳)$$

اگر به ازای هر $t \in [\circ, ۱]$، $Z^v \overset{d}{=} Z$ و مستقل از توابع $\tilde{\mathcal{C}}^v(t)$، $X^۱(t)$ و $X^۲(t)$ باشند، آنگاه طبق قضیهٔ نقطهٔ ثابت باناخ، توزیع $\tilde{R}^v(t)$، به عنوان نقطهٔ ثابت یکتای انقباض زیر با ثابت انقباض r در (۴.۳) است:

$$G : (\mathcal{M}, d_۲) \longrightarrow (\mathcal{M}, d_۲)$$
$$G(\lambda) := \mathcal{L}\left(\mathbb{I}_{t\leq Z} Z X^۱\left(\frac{t}{Z}\right) + \mathbb{I}_{t>Z}(۱-Z)X^۲\left(\frac{t-Z}{۱-Z}\right) + \tilde{\mathcal{C}}^v(t)\right),$$

که در آن $\mathcal{M}$ فضای همه توزیع‌هایی است که دارای میانگین صفر و واریانس متناهی است و $d_۲$ متر واسراشتاین با تعریف

$$d_۲(\mu, \lambda) = \inf_{\substack{X,Y\in\mathcal{M}\\ \mathcal{L}(X)=\lambda\\ \mathcal{L}(Y)=\mu}} \| X - Y \|_{\infty,۲},$$

است. همچنین توزیع متغیر تصادفی X را با علامت $\mathcal{L}(\cdot)$ نشان داده‌ایم و $\mathcal{L}(X^۱) = \mathcal{L}(X^۲) = \lambda$ پس با توجه به معادلهٔ (۵.۳)، نتیجه می‌گیریم که توزیع $\tilde{R}^v(t)$ جواب یکتای معادلهٔ توزیعی (۸.۱) برای فرآیند Y است. همانند کاربرد روش انقباض تحت متر واسراشتاین $d_۲$ در [۱۴]. □

۴ همگرایی فرآیند در فضای توابع کدلگ

در این بخش، با استفاده از نشاندن یک فرآیند شاخه‌ای وزن‌دار بر روی فرآیند $Y_n(t)$ و با استفاده از روش انقباض، به اثبات همگرایی فرآیند $Y_n(t)$ به فرآیند $Y(t)$ در فضای $(D, \| \cdot \|_{\infty,۲})$ می‌پردازیم.
ابتدا به‌ازای $n \geq ۱$ ثابت، یک فرآیند شاخه‌ای وزن‌دار توسط چهارتایی $(V, D, \hat{T}_n, \hat{\mathcal{C}}_n)$ تعریف می‌کنیم که برای

هر تابع D $h_n(t) \in D$، تابع وزن $\hat{T}_n = (\hat{T}_{1,n}, \hat{T}_{2,n}) \in D^D \times D^D$ با مولفه‌های $\hat{T}_{1,n} : D \longrightarrow D$ و $\hat{T}_{2,n} : D \longrightarrow D$ به صورت

$$\hat{T}_{1,n}(h_n(t)) : = \mathbb{I}_{n \geq 2k+1} \mathbb{I}_{]0, \frac{Z_n}{n}]}(t) \frac{Z_n - 1}{n} h_{Z_n - 1}\left(\frac{\lceil nt \rceil}{Z_n - 1} \wedge 1\right),$$
$$\hat{T}_{2,n}(h_n(t)) : = \mathbb{I}_{n \geq 2k+1} \mathbb{I}_{] \frac{Z_n}{n}, 1]}(t) \frac{n - Z_n}{n} h_{n - Z_n}\left(0 \vee \frac{\lceil nt \rceil - Z_n}{n - Z_n}\right),$$

باشد که در آن Z_n با تابع چگالی در (۳.۱) است و به ازای تابع $\overline{C}_n$ تعریف شده در (۷.۱)،

$$\hat{C}_n(t) := \overline{C}_n(\lceil nt \rceil, Z_n) + \mathbb{I}_{] \frac{Z_n}{n}, 1]}(t) \frac{Z_n - 1}{n} Q_{Z_n - 1},$$

که در آن $Q_n := Y_n(1) = \dfrac{X(n,n) - a(n,n)}{n}$ است. بنابراین اگر به ازای $v \in V$،

$$((\hat{T}_n^v, \hat{C}_n^v), Z_n^v, Q_n^v) \overset{iid}{=} ((\hat{T}_n, \hat{C}_n), Z_n, Q_n)$$

باشد که $\hat{T}_n^v = (\hat{T}_{1,n}^v, \hat{T}_{2,n}^v)$ ، آنگاه از چهارتایی $(V, D, \hat{T}_n, \hat{C}_n)$ و همانند (۱.۲)، به ازای هر $v \in V$، فرآیند شاخه‌ای وزن‌دار زیر به دست می‌آید:

$$\hat{R}_m^v(n) := \hat{C}_n^v + \hat{T}_{1,n}^v(\hat{R}_{m-1}^{v1}(n)) + \hat{T}_{2,n}^v(\hat{R}_{m-1}^{v2}(n)).$$

از طریق برهانی مشابه برهان قضیهٔ ۲.۳، نشان داده می‌شود که هرگاه $m \longrightarrow \infty$، آنگاه به ازای هر $v \in V$، متغیر تصادفی $\hat{R}^v(n)$ای یکتا در فضای توابع کدلگ $(D, \| \cdot \|_{\infty,2})$ وجود دارد که به ازای $n \geq 1$ ثابت، $\hat{R}_m^v \xrightarrow{a.s.} \hat{R}^v(n)$ و $\hat{R}^v(n)$ در معادلهٔ بازگشتی زیر تقریبا حتمی صدق می‌کند:

$$\hat{R}^v(n) := \sum_{i=1}^{2} \hat{T}_{i,n}^v\big(\hat{R}^{vi}(n)\big) + \hat{C}_n^v. \tag{۱.۴}$$

همچنین توزیع $\hat{R}^v(n)$ جواب یکتای معادلهٔ توزیعی (۶.۱) برای فرآیند Y_n است.

قضیه ۱.۴. *برای فرآیندهای $\hat{R}^v(n)$ و $\tilde{R}^v$ که به ترتیب در (۱.۴) و (۸.۱) تعریف شده‌اند، هرگاه $n \longrightarrow \infty$ ، آنگاه*

$$\| Y_n - Y \|_{\infty,2} = \| \hat{R}^v(n) - \tilde{R}^v \|_{\infty,2} \longrightarrow 0.$$

اثبات. ابتدا توابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$a_1(n, Z_n)(t) := \mathbb{I}_{n \geq 2k+1} \mathbb{I}_{]0, \frac{Z_n}{n}]}(t) \frac{Z_n - 1}{n},$$
$$b_1(n, Z_n)(t) := \frac{\lceil nt \rceil}{Z_n - 1} \wedge 1,$$
$$j_1(n, Z_n)(t) := Z_n - 1,$$
$$a_2(n, Z_n)(t) := \mathbb{I}_{n \geq 2k+1} \mathbb{I}_{] \frac{Z_n}{n}, 1]}(t) \frac{n - Z_n}{n},$$
$$b_2(n, Z_n)(t) := 0 \vee \frac{\lceil nt \rceil - Z_n}{n - Z_n},$$
$$j_2(n, Z_n)(t) := n - Z_n.$$

فرض کنید $l_n := \mathbb{E}\Big(\parallel \hat{R}^v(n) - \hat{R}^v(\infty) \parallel_\infty \Big)^۲$ و $l_n^* := \sup_{m\le n} l_m$. در این‌صورت چون $\lim_{n\to\infty} \overline{\mathcal{C}}_n = \overline{\mathcal{C}}$ داریم

$$\begin{aligned}
l_n &\le \sum_{i=۱}^{۲} \mathbb{E}\Big(\parallel \hat{T}^v_{i,n}\big(\hat{R}^{vi}\big(j_i(n,Z^v_n)\big)\big) - \hat{T}^v_{i,\infty}\big(\hat{R}^{vi}(\infty)\big) \parallel_\infty \Big)^۲ + \mathbb{E}\Big(\parallel \hat{\mathcal{C}}^v_n - \tilde{\mathcal{C}}^v \parallel_\infty \Big)^۲ \\
&\le \sum_{i=۱}^{۲} \mathbb{E}\Big(\parallel a_i(n,Z^v_n)\big(\hat{R}^{vi}\big(j_i(n,Z^v_n)\big)(b_i(n,Z^v_n)\big) - \hat{R}^{vi}(\infty)\big) \\
&+ (a_i(n,Z^v_n) - \hat{T}^v_{i,\infty})\hat{R}^{vi}(\infty) \parallel_\infty \Big)^۲ + o(۱) \\
&\le \sum_i \mathbb{E}\Big(\parallel a_i(n,Z^v_n) \parallel_\infty \Big)^۲ l_n^* + \sum_i \mathbb{E}\Big(\parallel a_i(n,Z^v_n) - \hat{T}^v_{i,\infty} \parallel_\infty \Big)^۲ \\
&\cdot \mathbb{E}\Big(\parallel \hat{R}^{vi}(\infty) \parallel_\infty \Big)^۲ + ۲\sum_i \mathbb{E}\Big(\parallel a_i(n,Z^v_n)(a_i(n,Z^v_n) - \hat{T}^v_{i,\infty}) \parallel_\infty \Big) \\
&\cdot \mathbb{E}\Big(\parallel \hat{R}^{vi}\big(j_i(n,Z^v_n)\big)(b_i(n,Z^v_n)) - \hat{R}^{vi}(\infty)\Big)\hat{R}^{vi}(\infty) \parallel_\infty \Big) + o(۱) \\
&\le l_n^* \sum_i \mathbb{E}\big(\parallel a_i(n,Z^v_n) \parallel_\infty \big)^۲ + o(۱) \\
&+ ۲\sum_i \mathbb{E}\Big(\parallel a_i(n,Z^v_n)(a_i(n,Z^v_n) - \hat{T}^v_{i,\infty}) \parallel_\infty \Big) \cdot \parallel \hat{R}^{vi}(\infty) \parallel_{\infty,۲} \cdot \sqrt{l_n^*} \\
&\le l_n^* \sum_i \mathbb{E}\big(\parallel a_i(n,Z^v_n) \parallel_\infty \big)^۲ + o(۱)
\end{aligned}$$

اگر $l_\infty := \limsup_n l_n$ آنگاه چون $\sum_i \mathbb{E}\big(\parallel a_i(n,Z^v_n) \parallel_\infty \big)^۲ < ۱$ است (طبق تعریف توابع a_i) داریم

$$\circ \le l_\infty \le l_\infty \limsup_n \sum_i \mathbb{E}\big(\parallel a_i(n,Z^v_n) \parallel_\infty \big)^۲ + o(۱) < l_\infty.$$

بنابراین باید $l_\infty = \circ$ تا این که نابرابری بالا برقرار باشد. □

۵ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، فرآیند مرتب‌سازی سریع آنی میانه‌ـ محور مورد مطالعه قرار دادیم. هدف اصلی، تحلیل رفتار مجانبی فرآیند نرمال‌شدهٔ تعداد مقایسه‌های لازم برای مرتب‌سازی lکوچک‌ترین عنصر از بین n عنصر، یعنی Y_n، بود. ما نشان دادیم که این فرآیند به یک فرآیند حدی Y در فضای توابع کدلگ همگرایی ضعیف دارد.
برای دستیابی به این نتیجه، از روش فرآیند شاخه‌ای وزن‌دار استفاده کردیم و یک معادله نقطه ثابت تصادفی برای فرآیند حدی استخراج شد. این معادله، ساختار بازگشتی الگوریتم مرتب‌سازی سریع میانه‌ـ محور را در حد بینهایت منعکس می‌کند. همچنین، با استفاده از روش‌های تحلیل تابعی و نظریهٔ مارتینگل، وجود و یکتایی جواب این معادله در فضای D توابع کدلگ بر بازهٔ $[\circ, ۱]$نشان داده شد.
نتایج به‌دست‌آمده نه تنها همگرایی فرآیند گسسته Y_n را به فرآیند حدی Y تأیید می‌کنند، بلکه نمایش صریحی از این فرآیند حدی به‌صورت یک سری تصادفی ارائه می‌دهند. این امر درک بهتری از ساختار تصادفی الگوریتم مرتب‌سازی سریع در حالت میانه‌ـ محور و آنی فراهم می‌کند.

مراجع

[1] Bruhn, V., 1996. Eine Methode zur asymptotischen Behandlung einer Klasse von Rekursionsgleichungen mit einer Anwendung in der stochastischen Analyse des Quicksort-Algorithmus. *Dissertation, Christian-Albrechts-Universitat, Kiel*.

[2] Hallmann, S., Roesler, U. and Wnuk, M., 2018. All solutions of the stochastic fixed point equation of the Quicksort process. *Advances in Applied Probability, 50*, pp. 131–140.

[3] Iliopoulos, V., 2013. The Quicksort algorithm and related topics. *Phd Thesis*.

[4] Javanian, M. and Roesler, U. 2024. Expectation of Partial Median Quicksort. *Mediterranean Journal of Mathematics, submitted*.

[5] Javanian, M. and Mosammam, A. M., 2022. Some results on asymptotic behavior of the recalls of random median Quicksort. *Mathematics Interdisciplinary Research, 7*, pp. 357–375.

[6] Knuth, D. E., 1973. The art of computer programming. *Vol.3: Sorting and Searching*.

[7] Martinez, C. and Roesler, U., 2010. Partial Quicksort and Quickpartitionsort. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 21*, pp. 505–512.

[8] Martinez, C., 2004. Partial Quicksort, Proceeding.*1st ACM-SIAM Workshop on Analytic Algorithmics and Combinatorics, 6*, pp. 224–228.

[9] Okasha, H. and Roesler, U., 2007. Asymptotic distribution for random median Quicksort. *Journal of Discrete Algorithms, 5*, pp. 592–608.

[10] Ragab, M. and Roesler, U., 2014. The Quicksort process. *Stochastic Processes and their Applications, 124*, pp. 1036–1054.

[11] Roesler, U., 2001. On the analysis of stochastic divide and conqure algorithms.*Algorithmica, 29*, pp. 238–261.

[12] Roesler, U., 2016. The weighted branching process. *Branching Processes and Their Applications, 219*, pp. 219–236.

[13] Roesler, U., 2020. Almost sure convergence to the Quicksort process. *Stochastic Processes and their Applications, 130*, pp. 5290–5309.

[14] Roesler, U., 1991. A limit theorem for Quicksort. *RAIRO - Theoretical Informatics and Applications, 25*, pp. 85–100.

[15] Wild, S.,Nebel, M. E. and Neininger, R., 2015. Average case and distributional analysis of dual-pivot Quicksort. *ACM Transactions on Algorithms, 11*, pp.1–42.