



Kharazmi  
University

## Mathematical Research

Year 2026, Volume 11, Issue 4, pp. 31–44

Print ISSN: 2588-2546

Online ISSN: 2588-2554

DOI: xxxx

# A Convergence Rate in Functional Linear Regression with Points of Impact

Alireza Shirvani<sup>(1)</sup> <sup>1</sup>, Omid Khademnoe<sup>(2)</sup> and Mohammad Hosseini-Nasab<sup>(3)</sup>

<sup>(1)</sup> Department of Statistics, Faculty of Basic Sciences, Velayat University, Iranshahr, Iran

<sup>(2)</sup> Department of Statistics, Faculty of Sciences, University of Zanjan, Zanjan, Iran

<sup>(3)</sup> Department of Statistics, Faculty of Mathematical Sciences, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

Received: 25 November 2024

Accepted: 2 November 2025

Published online: 25 February 2026

**Abstract:** The classical functional linear regression model with a scalar response has been widely used. However, the local effects of the predictor function on the response cannot be evaluated with this model, as it considers only a weighted average of the entire predictor trajectory in relation to the response. To address this issue, we propose a generalization of the classical functional linear regression model by adding an unknown number of points of impact, where the predictor values at these points have a significant effect on the response. The points of impact and their coefficients, the slope function, the eigenvalues, and the eigenfunctions of the covariance operator of the predictor are unknown and need to be estimated. In this paper, we derive the convergence rate of a quantity constructed based on these unknown parameters. This result can be used in future statistical inferences for this model, including the calculation of prediction intervals and bootstrap prediction intervals. Additionally, a simulation study has been conducted to evaluate the obtained results.

**Keywords:** Functional linear regression, Point of impact, Convergence rate.



©2026 Kharazmi University, Tehran, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

<sup>1</sup>Corresponding author

E-mail addresses: (Alireza Shirvani) [a.shirvani@velayat.ac.ir](mailto:a.shirvani@velayat.ac.ir), (Omid Khademnoe) [khademnoe@znu.ac.ir](mailto:khademnoe@znu.ac.ir), (Mohammad Hosseini-Nasab) [m\\_hosseininasab@sbu.ac.ir](mailto:m_hosseininasab@sbu.ac.ir)



## یک نرخ همگرایی در رگرسیون خطی تابعی با نقاط تأثیر

علیرضا شیروانی<sup>(۱)</sup>، امید خادم‌نوع<sup>(۲)</sup> و محمد حسینی‌نسب<sup>(۳)</sup>

<sup>(۱)</sup> گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ولایت، ایرانشهر، ایران

<sup>(۲)</sup> گروه آمار، دانشکده علوم، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

<sup>(۳)</sup> گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۱۲/۷

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۸/۱۱

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۹/۵

**چکیده:** مدل رگرسیون خطی تابعی کلاسیک با پاسخ اسکالر به‌طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته است. با این حال، اثرات موضعی تابع پیشگو روی پاسخ را نمی‌توان با این مدل ارزیابی کرد، زیرا این مدل فقط یک میانگین وزنی از کل مسیر پیشگو روی پاسخ را در نظر می‌گیرد. برای رفع این مشکل تعمیمی از مدل رگرسیون خطی تابعی کلاسیک را با افزودن تعداد نامعلومی از نقاط تأثیر در نظر می‌گیریم، با این ویژگی که مقادیر پیشگو به ازای این نقاط، تأثیر معنی‌داری روی پاسخ دارند. نقاط تأثیر و ضرایب آن‌ها، تابع شیب، ویژه‌مقدارها و ویژه‌تابع‌های عملگر کوواریانس پیشگو نامعلوم هستند و باید برآورد شوند. در این مقاله نرخ همگرایی یک کمیت ساخته شده بر پایه‌ی این پارامترهای نامعلوم را به‌دست آورده‌ایم. از این نتیجه می‌توان در استنباط‌های آماری آینده برای این مدل از جمله یافتن بازه‌های پیش‌گویی و بازه‌های بوت استرپی پیش‌گویی استفاده کرد. علاوه بر این، یک مطالعه‌ی شبیه‌سازی نیز برای ارزیابی نتیجه‌ی به‌دست آمده انجام داده‌ایم.

**واژه‌های کلیدی:** رگرسیون خطی تابعی، نقطه‌ی تأثیر، نرخ همگرایی.

### ۱ مقدمه

با پیشرفت فن‌آوری، جمع‌آوری داده‌هایی که ماهیت آن‌ها به‌صورت تابعی از یک متغیر دیگر مانند زمان، فرکانس و ... است امکان‌پذیر شده است. این‌گونه داده‌ها را که تعمیمی از داده‌های چندمتغیره هستند، داده‌های تابعی می‌نامند. در

<sup>۱</sup> نویسنده مسئول

(Alireza Shirvani) [a.shirvani@velayat.ac.ir](mailto:a.shirvani@velayat.ac.ir), (Omid Khademnoe) [khademnoe@znu.ac.ir](mailto:khademnoe@znu.ac.ir),

(Mohammad Hosseini-Nasab) [m\\_hosseininasab@sbu.ac.ir](mailto:m_hosseininasab@sbu.ac.ir).

عمل داده‌های تابعی را می‌توان در یک تعداد متناهی از نقاط زمانی اندازه‌گیری کرد، لذا ممکن است روش‌های تحلیل داده‌های چندمتغیره را برای تحلیل آنها به کار گرفت. اما با توجه به ماهیت داده‌های تابعی، استفاده از روش‌های تحلیل داده‌های چندمتغیره برای تحلیل آنها مشکلاتی به همراه خواهد داشت. بنابراین باید تعریف‌ها و روش‌های سازگاری برای تحلیل داده‌های تابعی ارائه شود. [۱۰] بحث‌های نظری تحلیل داده‌های تابعی را مرور کرده‌اند. [۳] نیز به برخی از روش‌های ناپارامتری تحلیل داده‌های تابعی پرداخته‌اند.

یکی از مسائل مهم در تحلیل داده‌های تابعی، تحلیل رگرسیون تابعی با پاسخ اسکالر در مدلسازی یک متغیر پاسخ مورد علاقه بر اساس حداقل یک پیشگوی تابعی است. با افزودن نقاط تأثیر به این مدل، می‌توان مدل رگرسیون خطی تابعی با نقاط تأثیر را در نظر گرفت. نقطه‌ی تأثیر به نقطه‌های زمانی گفته می‌شود که مقادیر پیشگوی متناظر با آنها، تأثیر معنی‌داری روی متغیر پاسخ دارد. مدل رگرسیون خطی تابعی با نقاط تأثیر در بسیاری از حوزه‌های مطالعاتی کاربرد دارد. این نوع فرایند تصمیم‌گیری را بهینه کرده و دقت پیش‌گویی را در مدل‌هایی که با داده‌های تابعی سر و کار دارند، افزایش می‌دهد. به‌عنوان مثال، در حوزه‌ی سلامت، با تحلیل نقاط تأثیر می‌توان زمان‌های مشخصی (مانند بعد از وعده‌های غذایی) را تشخیص داد که این زمان‌ها نقش انکارناپذیر در پیش‌گویی و توصیه‌های رژیمی دارند. در حوزه‌ی ژنومیک تابعی، با مطالعه‌ی رابطه‌ی بین پروفایل‌های بیان ژنی و ویژگی‌های فنوتیپی در طول زمان یا در شرایط مختلف می‌توان ژن‌ها یا زمان‌های کلیدی برای پیشرفت بیماری را تشخیص داد و به توسعه‌ی درمان‌های هدفمند کمک کرد. همچنین، در تحلیل بازار، بررسی نمودارهای قیمت درون‌روزی ابزارهای مالی در پیش‌گویی حرکت‌های بازار مؤثر است. با تحلیل نقاط تأثیر می‌توان زمان‌های خاصی از روز که تأثیر بیشتری در پیش‌گویی قیمت‌های آینده دارند، مانند زمان‌های باز و بسته شدن بازار، را شناسایی کرد. [۶] و [۷] مدل‌های رگرسیون خطی تابعی با یک نقطه‌ی تأثیر را در نظر گرفتند. در زمینه‌ی تحلیل بقا نیز، [۱۲] مدلی با یک نقطه‌ی تأثیر برای مدل‌های رگرسیون کاکس معرفی کرد. [۱] یک چارچوب رگرسیون خطی با چندین نقطه‌ی تأثیر را مطالعه کردند.

[۴] مدل با یک نقطه‌ی تأثیر اولیه‌ی ارائه شده توسط [۷] را تعمیم دادند. آن‌ها علاوه بر این که تعداد نقاط تأثیر را نامعلوم در نظر گرفتند، اثر یک میانگین وزنی از کل مسیر پیشگو روی پاسخ را نیز با استفاده از یک عبارت انتگرالی به مدل افزودند. در واقع آن‌ها به مدل رگرسیون خطی تابعی کلاسیک با پاسخ اسکالر و پیشگوی تابعی، تعداد نامعلومی نقطه‌ی تأثیر اضافه کردند، پارامترهای نامعلوم مدل را با استفاده از روش کمترین توان‌های دوم خطاها برآورد کردند و سازگاری برآوردگرها را نشان دادند. بر اساس کار [۴]، به‌عنوان نمونه، [۹] مدل رگرسیون تابعی ناپارامتری با نقاط تأثیر و پاسخ اسکالر را بررسی کردند. [۵] بر اساس روش اسپلاین ارائه شده توسط [۲]، تابع شیب و پارامترهای ضریب را در مدل رگرسیون خطی تابعی با نقاط تأثیر برآورد کرده و با یک مطالعه‌ی شبیه‌سازی، کارایی روش خود را نشان دادند. [۱۱] آماره‌ای برای آزمون فرض معناداری نقاط تأثیر در مدل رگرسیون خطی تابعی با پاسخ اسکالر ارائه دادند.

در این مقاله مدل رگرسیون خطی تابعی با نقاط تأثیر ارائه شده توسط [۴] را در نظر گرفته و نرخ همگرایی یک کمیت ساخته شده بر اساس پارامترهای نامعلوم را به‌دست آورده‌ایم. این نرخ همگرایی در استنباط‌های بعدی در مورد این مدل از جمله یافتن بازه‌های پیش‌گویی و بازه‌های بوت استرپی پیش‌گویی که اهداف کارهای آینده‌ی ما هستند، به کار خواهد رفت. مطالب این مقاله به این ترتیب ارائه شده است: در بخش ۲ به معرفی مدل و فرض‌های مورد نیاز پرداخته‌ایم. در بخش ۳ نتیجه‌ی اصلی مقاله، یعنی نرخ همگرایی مورد نظر را به‌دست آورده‌ایم. در نهایت بخش ۴ را به مطالعه‌ی شبیه‌سازی برای ارزیابی نتیجه‌ی به‌دست آمده در بخش ۳ اختصاص داده‌ایم.

## ۲ مدل و فرضیات مورد نیاز

مدل مورد بررسی شامل یک متغیر پاسخ اسکالر  $Y$  و یک پیشگوی تابعی  $X \in L^2(I)$  است، که در آن  $I = [a, b]$  یک بازه‌ی کران‌دار متعلق به  $\mathbb{R}$  و  $L^2(I)$  فضای تمام تابع‌های توان دوم انتگرال پذیر روی  $I$  است. فرض می‌کنیم

که داده‌ها از مشاهدات مستقل  $(X_i, Y_i); i = 1, \dots, n$ ، هم‌توزیع با زوج  $(X, Y)$  تشکیل شده و تابع  $X$  روی  $I$  به‌گونه‌ای تعریف شده است که  $E[\int_I X^\lambda(t) dt] < \infty$ . بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم که متغیرها مرکزی شده‌اند، یعنی  $E(Y) = 0$  و برای  $t \in [a, b]$   $E[X(t)] = 0$ ، به‌عنوان مثال می‌تواند زمان‌هایی که اندازه‌گیری‌ها باید انجام شوند را نشان دهد).  $Y_i$ ‌ها با استفاده از مدل رگرسیون خطی تابعی با نقاط تأثیر زیر تولید می‌شوند:

$$Y_i = \int_I \beta(t) X_i(t) dt + \sum_{r=1}^S \beta_r X_i(\tau_r) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

خطاهای  $\varepsilon_i$  متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با میانگین صفر و واریانس متناهی  $\sigma^2$  هستند. تابع شیب  $\beta$  یک تابع نامعلوم، کران‌دار و توان دوم انتگرال پذیر روی بازه  $I$  است و همچنین خطاهای  $\varepsilon_i$  از  $X_i$ ‌ها مستقل هستند. در مدل (۱.۲)، اثر عمومی منحنی  $X_i(\cdot)$  بر  $Y_i$  توسط عبارت  $\int_I \beta(t) X_i(t) dt$  نمایش داده می‌شود. این مدل همچنین تعداد نامشخص  $S \in \mathbb{N}$  از نقاط تأثیر را به‌صورت  $\tau_1, \dots, \tau_S$  در نظر می‌گیرد که متغیر پاسخ  $Y_i$  به‌طور قابل توجهی تحت تأثیر مقدارهای تابعی متناظر آن‌ها یعنی  $X_i(\tau_1), \dots, X_i(\tau_S)$  قرار دارد. مدل (۱.۲) شامل پارامترهای نامعلوم  $\beta(t)$ ،  $S \geq 0$ ،  $\beta_r$  و  $\tau_r$ ،  $r = 1, \dots, S$  است که باید با استفاده از داده‌ها برآورد شوند. شرط لازم برای شناساپذیری پارامترهای مدل (۱.۲) وجود ویژگی «تغییرات موضعی خاص» است، به این معنا که حداقل بخشی از نوسانات موضعی فرآیند پیشگوی  $X_i(t)$  در مجاورت هر نقطه‌ی تأثیر با منحنی‌های خارج از این ناحیه‌ی محدود، همبستگی نداشته باشد (به ۴ مراجعه کنید). از میان فرآیندهای تصادفی که این ویژگی را دارند می‌توان به حرکت براونی، حرکت براونی کسری و فرآیند ارنشتاین-اولنک اشاره کرد (برای جزئیات بیشتر درباره ویژگی تغییرات موضعی خاص، به ۴ مراجعه کنید). علاوه بر این، فرض می‌کنیم که هر نقطه‌ی تأثیر درون بازه قرار دارد،  $\tau_r \in (a, b); r = 1, \dots, S$ . همچنین فرض می‌کنیم که برای هر  $t, s \in I$  دارای تابع همبستگی پیوسته‌ی  $\Gamma(t, s)$  باشد و این‌که ویژه‌مقدارهای  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  و ویژه‌تابع‌های  $\psi_1, \psi_2, \dots$  مربوط به عملگر همبستگی با هسته‌ی  $\Gamma(\cdot, \cdot)$ ، به ترتیب یک دنباله‌ی نزولی اکید و یک پایه‌ی یکامتعامل برای  $L^2(I)$  تشکیل می‌دهند. به همین ترتیب، ویژه‌مقدارها و ویژه‌تابع‌های عملگر همبستگی نمونه‌ای با هسته‌ی  $\hat{\Gamma}(\cdot, \cdot)$  به ترتیب با  $\hat{\lambda}_j$  و  $\hat{\psi}_j$ ،  $j \geq 1$ ، نمایش داده می‌شوند.

در این مقاله، از روش پیشنهاد شده توسط [۴] برای برآورد تعداد و موقعیت نقاط تأثیر استفاده می‌کنیم. سپس، با استفاده از تحلیل مؤلفه‌های اصلی تابعی و روش کمترین توان‌های دوم خطاها، تابع شیب و ضرایب رگرسیون را برآورد می‌کنیم. برای هر  $i$  و  $j$  تعریف می‌کنیم  $\theta_{ij} = \langle X_i, \psi_j \rangle$ ،  $\hat{\theta}_{ij} = \langle X_i, \hat{\psi}_j \rangle$ ،  $\alpha_j = \langle \beta, \psi_j \rangle$  و  $\hat{\alpha}_j = \langle \beta, \hat{\psi}_j \rangle$ . بسط کارهونن-لوئه و  $X_i$  و بسط سری فوریه  $\beta$  به‌ترتیب عبارتند از  $\sum_{j=1}^{\infty} \theta_{ij} \psi_j$  و  $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \psi_j$ . می‌توان نشان داد که

$$\int_a^b \beta(t) X_i(t) dt = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \theta_{ij},$$

(به ۴ مراجعه کنید). با داشتن برآوردهای  $\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_k$  و یک نقطه‌ی برش مناسب  $k$ ، به‌دست می‌آوریم (اصطلاح نقطه‌ی برش به تعداد مؤلفه‌های اصلی تابعی اشاره دارد که بر اساس درصد واریانس یا معیارهای انتخاب مدل تعیین شده است):

$$Y_i = \sum_{j=1}^k \alpha_j \hat{\theta}_{ij} + \sum_{r=1}^{\hat{S}} \beta_r X_i(\hat{\tau}_r) + \varepsilon_i^*, \quad i = 1, \dots, n,$$

که در آن

$$\varepsilon_i^* = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \theta_{ij} - \sum_{j=1}^k \alpha_j \hat{\theta}_{ij} + \sum_{r=1}^S \beta_r X_i(\tau_r) - \sum_{r=1}^{\hat{S}} \beta_r X_i(\hat{\tau}_r) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

حال مجموع توان‌های دوم  $\sum_{i=1}^n (Y_i - \sum_{j=1}^k \alpha_j \hat{\theta}_{ij} - \sum_{r=1}^{\hat{S}} \beta_r X_i(\hat{\tau}_r))^2$  را برای هر  $\alpha_j, \beta_r, \alpha_j$  و  $j = 1, \dots, k, \beta_r$  برآوردگر  $r = 1, \dots, \hat{S}$  و کمینه کرده، برآوردگر  $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_{\hat{S}})^T$  را برای  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_S)^T$  و برآوردگر  $\hat{\beta}(t) = \sum_{j=1}^k \hat{\alpha}_j \hat{\psi}_j(t)$  را برای  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  به دست می‌آوریم. در نهایت برآوردگر تابع شیب به صورت  $\hat{\beta}(t) = \sum_{j=1}^k \hat{\alpha}_j \hat{\psi}_j(t)$  محاسبه می‌شود.

**فرض ۱.۲.** فرآیند  $X$  گاوسی و خطاهای  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  متغیرهای تصادفی نرمال مستقل و هم توزیع هستند.

قرار می‌دهیم  $\Gamma^{[k]}(t, s) = \sum_{j=k+1}^{\infty} \lambda_j \psi_j(t) \psi_j(s)$  (همان نقطه‌ای برش است). فرض می‌کنیم  $M_k$  یک ماتریس  $S \times S$  با عناصر  $\Gamma^{[k]}(\tau_r, \tau_s)$  باشد. کوچک‌ترین ویژه مقدار ماتریس  $M_k$  را با نماد  $\lambda_{\min}(M_k)$  نشان می‌دهیم.

**فرض ۲.۲ الف -** ثابت‌های  $\mu > 1$  و  $C_0$  وجود دارند، به طوری که  $C_0 < \infty$  و  $\sigma^2 < C_0$  و برای هر  $j \geq 1$ ،  $\lambda_j - \lambda_{j+1} \geq C_0^{-1} j^{-\mu-1}$  و  $\lambda_j \leq C_0 j^{-\mu}$ .

**ب -**  $\beta(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \psi_j(t)$  برای هر  $t$ ، و  $|\alpha_j| \leq C_1 j^{-\nu}$  برای یک  $0 < C_1 < \infty$  و یک  $\nu > 1 + \frac{1}{\mu}$ .

**پ -** مقدار ثابت  $C_\psi < \infty$  وجود دارد، به طوری که  $\sup_t \sup_j \psi_j(t)^2 \leq C_\psi$ .

**ت -** یک ثابت  $0 < D < \infty$  وجود دارد، به طوری که برای هر  $k$ ،  $\lambda_{\min}(M_k) \geq D k^{-\mu+1}$ .

تحت فرض‌های ۱.۲ و ۲.۲، [۴] نشان دادند که در صورت برقرار بودن شرایطی، اگر  $n \rightarrow \infty$ ، آن‌گاه

$$P(\hat{S} = S) \rightarrow 1, \quad (2.2)$$

و برای هر  $r = 1, \dots, S$ ،

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i(\tau_r) - X_i(\hat{\tau}_r))^2 = O_p(n^{-1}), \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i(\tau_r) - X_i(\hat{\tau}_r)) \varepsilon_i = O_p(n^{-1}), \quad (4.2)$$

(برای مشاهده جزئیات بیشتر به قضیه ۴ و گزاره ۴۲ مراجعه کنید) که در آن  $\hat{\tau}_r$  و  $\hat{S}$ ، به ترتیب برآوردهای پیشنهادی [۴] برای  $\tau_r$  و  $S$  هستند.

### ۳ نتیجه‌ی اصلی

در این بخش ابتدا نرخ همگرایی مورد نظر را در قضیه ۱.۳ به دست آورده و سپس در ادامه‌ی بخش جزئیات برهان را ارائه کرده‌ایم.

قضیه ۱.۳. فرض کنید رابطه‌ی (۲.۲) و فرض‌های ۱.۲ و ۲.۲ برقرار باشند و  $k, \asymp O(n^{\frac{1}{a+2b}})$ ، اگر برای  $r = 1, \dots, S$  برآوردگر  $\hat{\tau}_r$  در رابطه‌های (۳.۲) و (۴.۲) صدق کند، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i^{[k]}(\hat{\tau}) \sum_{j=k+1}^n \tilde{\alpha}_j \hat{\theta}_{ij} \\ &= \sqrt{n} \left[ \sum_{j=k+1}^n \alpha_j \lambda_j \psi_j(\tau_1), \dots, \sum_{j=k+1}^n \alpha_j \lambda_j \psi_j(\tau_S) \right]^T + o_p(1), \end{aligned} \quad (1.3)$$

که در آن  $X_i^{[k]}(t) = X_i(t) - \sum_{j=1}^k \hat{\theta}_{ij} \hat{\psi}_j(t)$  و  $\mathbf{X}_i^{[k]}(\hat{\tau}) = [X_i^{[k]}(\hat{\tau}_1), \dots, X_i^{[k]}(\hat{\tau}_S)]^T$

اثبات. ابتدا فرض می‌کنیم  $\hat{S} = S$ . تحت این شرط اثبات خواهیم کرد که اگر شرایط قضیه‌ی ۱.۳ برقرار باشد، آنگاه برای  $r = 1, \dots, S$  داریم:

$$\sqrt{n} \sum_{j=k+1}^n \tilde{\alpha}_j \hat{\lambda}_j \hat{\psi}_j(\hat{\tau}_r) = \sqrt{n} \sum_{j=k+1}^n \tilde{\alpha}_j \lambda_j \psi_j(\tau_r) + O_p \left( n^{-\frac{\gamma(a+b)+\tau}{\gamma(a+2b)}} \right), \quad (2.3)$$

و همچنین

$$\sqrt{n} \sum_{j=k+1}^n \tilde{\alpha}_j \hat{\lambda}_j \hat{\psi}_j(\tau_r) = \sqrt{n} \sum_{j=k+1}^n \alpha_j \lambda_j \psi_j(\tau_r) + o_p(1). \quad (3.3)$$

از طرفی رابطه‌ی (A.۱۸) [۴] نتیجه می‌دهد که

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i^{[k]}(\hat{\tau}) \sum_{j=k+1}^n \tilde{\alpha}_j \hat{\theta}_{ij} = \sqrt{n} \left[ \sum_{j=k+1}^n \tilde{\alpha}_j \hat{\lambda}_j \hat{\psi}_j(\hat{\tau}_1), \dots, \sum_{j=k+1}^n \tilde{\alpha}_j \hat{\lambda}_j \hat{\psi}_j(\hat{\tau}_S) \right]^T. \quad (4.3)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که رابطه‌ی (۱.۳) از ترکیب (۲.۳) تا (۴.۳) نتیجه می‌شود، بنابراین، به شرط  $\hat{S} = S$ ، برهان قضیه‌ی ۱.۳ به پایان می‌رسد. حال با در نظر گرفتن رابطه‌ی (۲.۲) و استفاده از قانون احتمال کل می‌توان برهان شرطی را به حالت غیرشرطی تعمیم داد، بدین ترتیب برهان قضیه‌ی ۱.۳ کامل می‌شود.  $\square$

برهان رابطه‌ی (۲.۳): با استفاده از رابطه‌ی (۳۵) [۱۱] نتیجه می‌شود که

$$\sqrt{n} \sum_{j=k+1}^n \tilde{\alpha}_j \hat{\lambda}_j \hat{\psi}_j(\hat{\tau}_r) = \sqrt{n} \sum_{j=k+1}^n \tilde{\alpha}_j \lambda_j \psi_j(\tau_r) + \sum_{j=k+1}^n \tilde{\alpha}_j \hat{\lambda}_j O_p(j^{\frac{a}{\gamma}}), \quad (5.3)$$

و با اعمال نابرابری کوشی-شوارتز به دست می‌آوریم:

$$\left| \sum_{j=k+1}^n \tilde{\alpha}_j \hat{\lambda}_j O_p(j^{\frac{a}{\gamma}}) \right| \leq \sqrt{\sum_{j=k+1}^n \tilde{\alpha}_j^2} \times \sqrt{\sum_{j=k+1}^n \hat{\lambda}_j^2 O_p(j^a)}. \quad (6.3)$$

<sup>1</sup>  $m \asymp O(n) \iff m = O(n), n = O(m)$

به علاوه، با استفاده از مطالب پاراگراف قبل از رابطه‌ی (۱۸)  $A \cdot$  [۴] داریم که

$$\sqrt{\sum_{j=k+1}^n \tilde{\alpha}_j^2} = O_p\left(n^{\frac{-(rb-1)}{r(a+rb)}}\right), \quad (7.3)$$

و از ترکیب کردن رابطه‌ی (۲۸) و نابرابری (۳۰) [۱۱] با  $k = O(n^{\frac{1}{a+rb}})$  و قسمت (الف) فرض ۲.۲ به دست می‌آوریم:

$$\sqrt{\sum_{j=k+1}^n \hat{\lambda}_j^2} O_p(j^a) = O_p\left(n^{\frac{-a+1}{a+rb}}\right). \quad (8.3)$$

حال از (۶.۳)–(۸.۳) داریم:

$$\left| \sum_{j=k+1}^n \tilde{\alpha}_j \hat{\lambda}_j O_p(j^{\frac{a}{r}}) \right| = O_p\left(n^{\frac{-r(a+b)+r}{r(a+rb)}}\right), \quad (9.3)$$

□

و با کنار هم قرار دادن (۵.۳) و (۹.۳)، برهان رابطه‌ی (۲.۳) کامل می‌شود.

**برهان رابطه‌ی (۳.۳):** بر اساس رابطه‌ی (۲۸) [۱۱] می‌توان نوشت:

$$\sqrt{n} \sum_{j=k+1}^n \tilde{\alpha}_j \hat{\lambda}_j \hat{\psi}_j(\tau_r) = \sqrt{n} \sum_{j=k+1}^n \alpha_j \lambda_j \psi_j(\tau_r) + A + o_p(1), \quad (10.3)$$

که در آن

$$\begin{aligned} A = & \sum_{j=k+1}^n \lambda_j \psi_j(\tau_r) \sum_{l \neq j} \alpha_l (\lambda_j - \lambda_l)^{-1} \int \Delta \psi_j \psi_l + \sum_{j=k+1}^n \alpha_j \psi_j(\tau_r) \int \Delta \psi_j \psi_j, \\ & + \sum_{j=k+1}^n \alpha_j \lambda_j \sum_{l \neq j} (\lambda_j - \lambda_l)^{-1} \psi_l(\tau_r) \int \Delta \psi_j \psi_l. \end{aligned}$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} E[A] = & \sum_{j=k+1}^n \lambda_j \psi_j(\tau_r) \sum_{l \neq j} \alpha_l (\lambda_j - \lambda_l)^{-1} E\left[\int \Delta \psi_j \psi_l\right] \\ & + \sum_{j=k+1}^n \alpha_j \psi_j(\tau_r) E\left[\int \Delta \psi_j \psi_j\right] \\ & + \sum_{j=k+1}^n \alpha_j \lambda_j \sum_{l \neq j} (\lambda_j - \lambda_l)^{-1} \psi_l(\tau_r) E\left[\int \Delta \psi_j \psi_l\right]. \end{aligned} \quad (11.3)$$

می‌توان نشان داد که

$$E\left[\int \Delta\psi_j\psi_l\right] = -n^{-\frac{1}{\nu}}\lambda_j\delta_{jl}, \tag{۱۲.۳}$$

به طوری که  $\delta_{jk}$ ، دلتای کرونه‌کر است. با استفاده از (۱۱.۳)، (۱۲.۳)، فرض ۲.۲، همچنین رابطه‌ی (۲۹) و نابرابری (۳۰) [۱۱] داریم:

$$|E[A]| = n^{-\frac{1}{\nu}}\left|\sum_{j=k+1}^n \alpha_j\lambda_j\psi_j(\tau_r)\right| \leq const.n^{-\frac{1}{\nu}}k^{-(a+b)+1},$$

به گونه‌ای که  $const$  یک مقدار ثابت است. بنابراین،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[A] = 0. \tag{۱۳.۳}$$

علاوه بر این، از رابطه‌ی (۲۸) [۱۱] نتیجه می‌شود که

$$E[A]^\nu = B_1 + \dots + B_9, \tag{۱۴.۳}$$

به طوری که

$$\begin{aligned} B_1 &= \sum_{j=k+1}^n \lambda_j^\nu \psi_j^\nu(\tau_r) \sum_{l_1 \neq j} \sum_{l_2 \neq j} \alpha_{l_1} \alpha_{l_2} (\lambda_j - \lambda_{l_1})^{-1} (\lambda_j - \lambda_{l_2})^{-1} E[Z_j^\nu Z_{l_1} Z_{l_2}] \\ &\quad + O(n^{-1}), \\ B_2 &= \sum_{j_1=k+1}^n \sum_{j_2=k+1, \neq j_1}^n \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \psi_{j_1}(\tau_r) \psi_{j_2}(\tau_r) \sum_{l_1 \neq j_1} \sum_{l_2 \neq j_2} \alpha_{l_1} \alpha_{l_2} (\lambda_{j_1} - \lambda_{l_1})^{-1} \\ &\quad \times (\lambda_{j_2} - \lambda_{l_2})^{-1} E[Z_{j_1} Z_{j_2} Z_{l_1} Z_{l_2}] + O(n^{-1}), \\ B_3 &= \sum_{j_1=k+1}^n \sum_{j_2=k+1, \neq j_1}^n \alpha_{j_1} \alpha_{j_2} \psi_{j_1}(\tau_r) \psi_{j_2}(\tau_r) \left( E[Z_{j_1}^\nu Z_{j_2}^\nu] - E[Z_{j_1}^\nu] E[Z_{j_2}^\nu] \right) \\ &\quad + \sum_{j=k+1}^n \alpha_j^\nu \psi_j^\nu(\tau_r) var(Z_j^\nu) + O(n^{-1}), \\ B_4 &= \sum_{j=k+1}^n \alpha_j^\nu \lambda_j^\nu \sum_{l_1 \neq j} \sum_{l_2 \neq j} (\lambda_j - \lambda_{l_1})^{-1} (\lambda_j - \lambda_{l_2})^{-1} \psi_{l_1}(\tau_r) \psi_{l_2}(\tau_r) E[Z_j^\nu Z_{l_1} Z_{l_2}] \\ &\quad + O(n^{-1}), \\ B_5 &= \sum_{j_1=k+1}^n \sum_{j_2=k+1, \neq j_1}^n \alpha_{j_1} \alpha_{j_2} \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \sum_{l_1 \neq j_1} \sum_{l_2 \neq j_2} (\lambda_{j_1} - \lambda_{l_1})^{-1} (\lambda_{j_2} - \lambda_{l_2})^{-1} \\ &\quad \times \psi_{l_1}(\tau_r) \psi_{l_2}(\tau_r) E[Z_{j_1} Z_{j_2} Z_{l_1} Z_{l_2}] + O(n^{-1}), \\ B_6 &= 2 \sum_{j_1=k+1}^n \sum_{j_2=k+1, \neq j_1}^n \alpha_{j_2} \lambda_{j_1} \psi_{j_1}(\tau_r) \psi_{j_2}(\tau_r) \sum_{l \neq j_1} \alpha_l (\lambda_{j_1} - \lambda_l)^{-1} E[Z_{j_1} Z_l Z_{j_2}^\nu] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \sum_{j=k+1}^n \alpha_j \lambda_j \psi_j^\dagger(\tau_r) \sum_{l \neq j} \alpha_l (\lambda_j - \lambda_l)^{-1} E[Z_j^\dagger Z_l] + O(n^{-1}), \\
 B_V & = 2 \sum_{j=k+1}^n \alpha_j \lambda_j^\dagger \psi_j(\tau_r) \sum_{l_1 \neq j} \sum_{l_2 \neq j} \alpha_{l_1} \psi_{l_2}(\tau_r) (\lambda_j - \lambda_{l_1})^{-1} (\lambda_j - \lambda_{l_2})^{-1} \\
 & \times E[Z_j^\dagger Z_{l_1} Z_{l_2}] + O(n^{-1}), \\
 B_\lambda & = 2 \sum_{j_1=k+1}^n \sum_{j_2=k+1, \neq j_1}^n \alpha_{j_1} \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \psi_{j_1}(\tau_r) \sum_{l_1 \neq j_1} \sum_{l_2 \neq j_2} \alpha_{l_1} \psi_{l_2}(\tau_r) (\lambda_{j_1} - \lambda_{l_1})^{-1} \\
 & \times (\lambda_{j_2} - \lambda_{l_2})^{-1} E[Z_{j_1} Z_{j_2} Z_{l_1} Z_{l_2}] + O(n^{-1}), \\
 B_a & = 2 \sum_{j_1=k+1}^n \sum_{j_2=k+1, \neq j_1}^n \alpha_{j_1} \alpha_{j_2} \lambda_{j_2} \psi_{j_1}(\tau_r) \sum_{l \neq j_2} \psi_l(\tau_r) (\lambda_{j_2} - \lambda_l)^{-1} E[Z_{j_1}^\dagger Z_{j_2} Z_l] \\
 & + 2 \sum_{j=k+1}^n \alpha_j^\dagger \lambda_j \psi_j(\tau_r) \sum_{l \neq j} \psi_l(\tau_r) (\lambda_j - \lambda_l)^{-1} E[Z_j^\dagger Z_l] + O(n^{-1}),
 \end{aligned}$$

که در آن  $\theta_j = \langle X, \psi_j \rangle$ . با توجه به (۱۰.۳)، (۱۳.۳) و (۱۴.۳)، برای کامل کردن برهان رابطه‌ی (۳.۳)، کافی است نشان دهیم که اگر  $n \rightarrow \infty$ ، آن‌گاه  $B_1, \dots, B_a$  به صفر میل می‌کنند. با استفاده از فرض ۲.۲، قسمت (e) [۱۱] و نابرابری کوشی-شوارتز، داریم:

$$\begin{aligned}
 |B_1| & \leq \text{const.} \sum_{j=k+1}^n j^{-2a} \sum_{l_1 \neq j} l_1^{-b} |\lambda_j - \lambda_{l_1}|^{-1} \lambda_{l_1}^{\frac{1}{2}} \lambda_j^{\frac{1}{2}} \sum_{l_2 \neq j} l_2^{-b} |\lambda_j - \lambda_{l_2}|^{-1} \lambda_{l_2}^{\frac{1}{2}} \lambda_j^{\frac{1}{2}} \\
 & + O(n^{-1}) \\
 & \leq \text{const.} \sum_{j=k+1}^n j^{-2a} + \text{const.} \sum_{j=k+1}^n j^{-2a-b+1} \log j \\
 & + \text{const.} \sum_{j=k+1}^n j^{-2(a+b-1)} \log^2 j + O(n^{-1}), \tag{۱۵.۳}
 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
 |B_2| & \leq \text{const.} \sum_{j_1=k+1}^n \sum_{j_2=k+1, \neq j_1}^n j_1^{-a} j_2^{-a} \sum_{l_1 \neq j_1} l_1^{-b} |\lambda_{j_1} - \lambda_{l_1}|^{-1} \lambda_{l_1}^{\frac{1}{2}} \lambda_{j_1}^{\frac{1}{2}} \\
 & \times \sum_{l_2 \neq j_2} l_2^{-b} |\lambda_{j_2} - \lambda_{l_2}|^{-1} \lambda_{l_2}^{\frac{1}{2}} \lambda_{j_2}^{\frac{1}{2}} + O(n^{-1}) \\
 & \leq \text{const.} \left( \sum_{j_1=k+1}^n j_1^{-a} + \sum_{j_1=k+1}^n j_1^{-a-b+1} \log j_1 \right) \\
 & \times \left( \sum_{j_2=k+1, \neq j_1}^n j_2^{-a} + \sum_{j_2=k+1, \neq j_1}^n j_2^{-a-b+1} \log j_2 \right) + O(n^{-1}). \tag{۱۶.۳}
 \end{aligned}$$

از طرفی (۱۵.۳)، (۱۶.۳) و نابرابری‌های (۳۰) تا (۳۲) [۱۱] نتیجه می‌دهند که

$$|B_1| \leq \text{const.} k^{-2a+1} + \text{const.} k^{-2a-b+2} \log k + \text{const.} k^{-2(a+b)+3} \log^2 k + O(n^{-1}),$$

و

$$|B_2| \leq \text{const.} (k^{-a+1} + k^{-a-b+2} \log k)^2 + O(n^{-1}).$$

بنابراین،  $B_1$  و  $B_2$  به صفر میل می‌کنند. به صورت مشابه ثابت می‌شود که  $B_3, \dots, B_9$  نیز به صفر میل می‌کنند و به این ترتیب برهان رابطه‌ی (۳.۳) به پایان می‌رسد.  $\square$

## ۴ شبیه‌سازی

در این بخش با استفاده از شبیه‌سازی به ارزیابی رابطه‌ی (۱.۳) پرداخته‌ایم. الگوریتم‌ها در نرم افزار  $R$  کدنویسی شده و نتایج بر اساس ۲۰۰۰ تکرار شبیه‌سازی ارائه شده است.  $X_1, \dots, X_n$  مسیرهای مستقل از فرآیند حرکت براونی استاندارد  $X$  را نشان می‌دهند و پاسخ‌های  $Y_i$  با استفاده از مدل رگرسیون خطی تابعی با نقاط تأثیر زیر تولید شده‌اند:

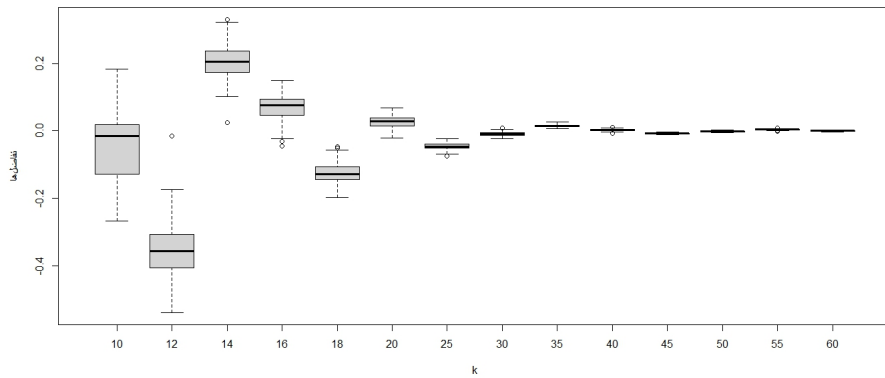
$$Y_i = \int_0^1 \beta(t) X_i(t) dt + \beta_1 X_i(\tau_1) + \beta_2 X_i(\tau_2) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

که در آن  $\tau_1 = 0.3$ ،  $\tau_2 = 0.6$ ،  $\beta_1 = -3$ ،  $\beta_2 = 3$ ،  $\varepsilon_i$ ‌ها متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد هستند و  $\beta(t)$  به صورت  $\beta(t) = \sum_{j=1}^{10} j^{-2} \psi_j(t)$  محاسبه شده، طوری که برای  $j \geq 1$   $\psi_j$ ‌ها ویژه تابع‌های یکامتعامل عملگر کوواریانس  $X$  به صورت  $\psi_j(t) = \sqrt{2} \sin((j - \frac{1}{4})\pi t)$  هستند. نقاط تأثیر را با استفاده از روش ارائه شده توسط [۴] برآورد کرده و با استفاده از بسته‌ی  $bestglm$  در نرم افزار  $R$  (به ۸ مراجعه کنید)، تعداد بهینه‌ی نقاط تأثیر ( $\tilde{S}$ ) و همچنین تعداد مؤلفه‌های اصلی ( $k$ ) را با انتخاب بهترین زیرمجموعه بر اساس معیار  $BIC$  روی مدل زیر به دست آورده‌ایم:

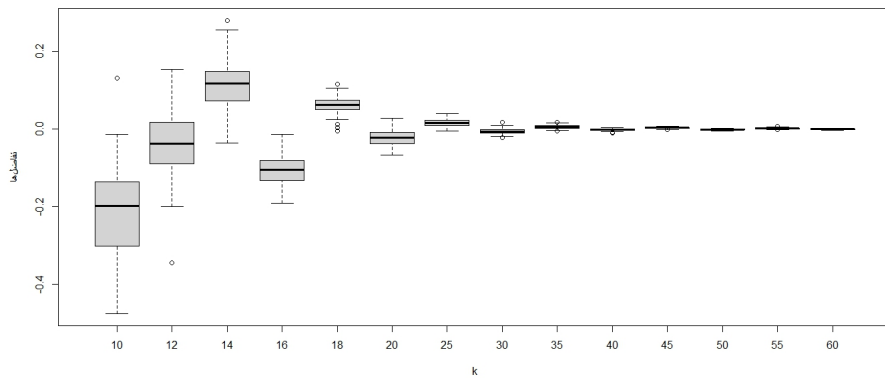
$$Y_i = \sum_{j=1}^k \alpha_j \tilde{Z}_{ij} + \sum_{r=1}^{\tilde{S}} \beta_r X_i(\hat{\tau}_r) + \varepsilon_i^*, \quad i = 1, \dots, n,$$

که در آن برآوردهای  $\beta_r$ ،  $\tilde{S}$ ،  $r = 1, \dots, \tilde{S}$  و  $\alpha_j$  و  $j = 1, \dots, k$ ، با استفاده از روش کمترین توان‌های دوم خطاها به دست آمده‌اند. با در نظر گرفتن این که مقدار  $k$  حین شبیه‌سازی محاسبه می‌شود و در هر تکرار ممکن است متفاوت با تکرارهای دیگر باشد، مقادیر ممکن ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۶، ۱۸، ۲۰، ۲۵، ۳۰، ۳۵، ۴۰، ۴۵، ۵۰، ۵۵ و ۶۰ را برای  $k$  در نظر گرفته‌ایم. از آن جا که دو نقطه‌ی تأثیر داریم، سمت چپ و سمت راست رابطه‌ی (۱.۳) بردارهایی دوبعدی خواهند بود. برای ارزیابی رابطه‌ی (۱.۳)، تفاضل مؤلفه‌های نظیر به نظیر دو طرف رابطه را محاسبه کرده‌ایم. شکل‌های ۱ و ۲ به ترتیب نمودارهای جعبه‌ای تفاضل‌های مربوط به نقطه‌ی تأثیر اول و نقطه‌ی تأثیر دوم را برای  $k$ ‌های مختلف و اندازه نمونه‌ی ۲۰۰ نشان می‌دهد.

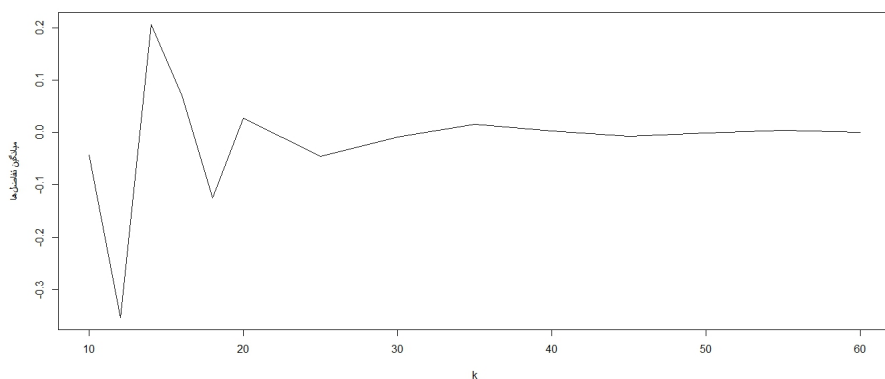
همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، با بزرگتر شدن مقدار  $k$  تفاضل‌ها به صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شوند. برای



شکل ۱: نمودارهای جعبه‌ای تفاضل‌های مربوط به نقطه‌ی تأثیر اول برای  $k$  های مختلف و اندازه نمونه‌ی ۲۰۰

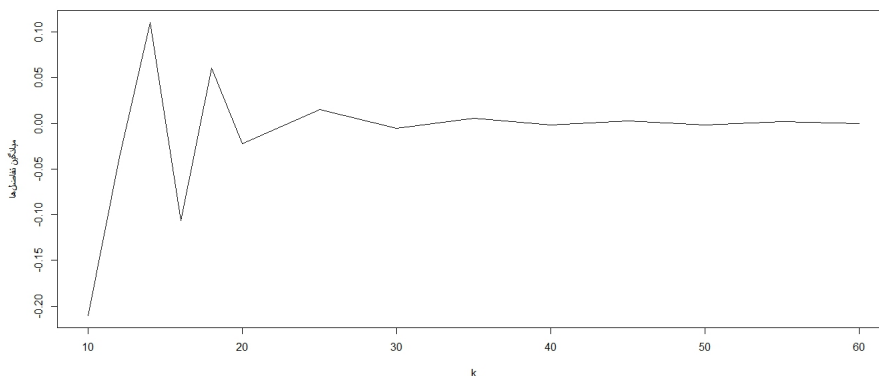


شکل ۲: نمودارهای جعبه‌ای تفاضل‌های مربوط به نقطه‌ی تأثیر دوم برای  $k$  های مختلف و اندازه نمونه‌ی ۲۰۰

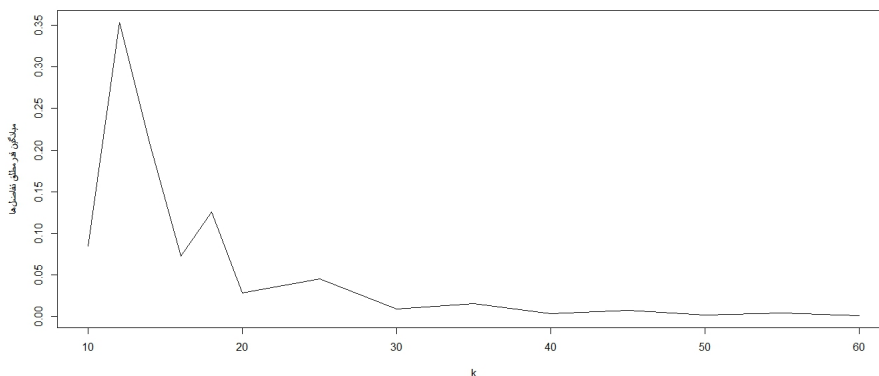


شکل ۳: میانگین تفاضل‌های مربوط به نقطه‌ی تأثیر اول برای  $k$  های مختلف و اندازه نمونه‌ی ۲۰۰

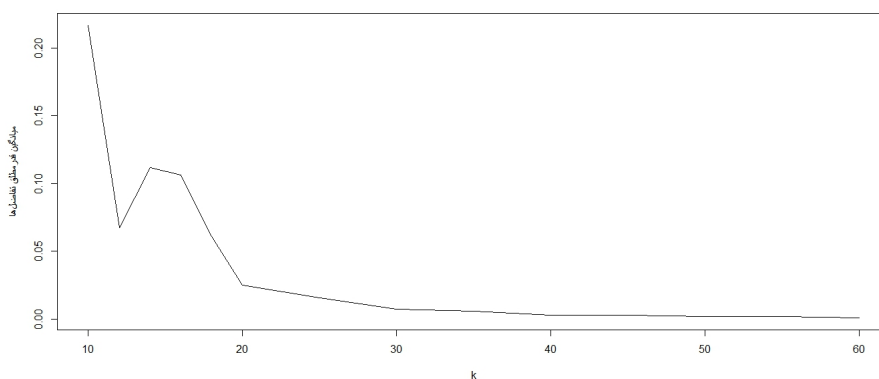
بررسی بیشتر، نمودارهای مربوط به میانگین تفاضل‌ها، میانگین قدرمطلق تفاضل‌ها و واریانس تفاضل‌ها را نیز در شکل‌های ۳ تا ۸ ترسیم کرده‌ایم. با توجه به شکل‌ها واضح است که میانگین تفاضل‌ها، میانگین قدرمطلق تفاضل‌ها و واریانس تفاضل‌های مربوط به هر دو نقطه‌ی تأثیر، با افزایش  $k$  به صفر میل می‌کنند. بنابراین نتایج شبیه‌سازی نیز برقراری رابطه‌ی (۱.۳) را تایید می‌کنند.



شکل ۴: میانگین تفاضل‌های مربوط به نقطه‌ی تأثیر دوم برای  $k$ ‌های مختلف و اندازه نمونه‌ی ۲۰۰



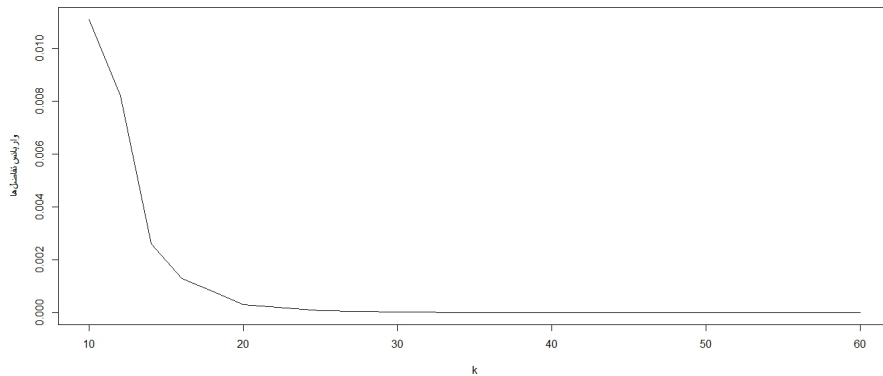
شکل ۵: میانگین قدرمطلق تفاضل‌های مربوط به نقطه‌ی تأثیر اول برای  $k$ ‌های مختلف و اندازه نمونه‌ی ۲۰۰



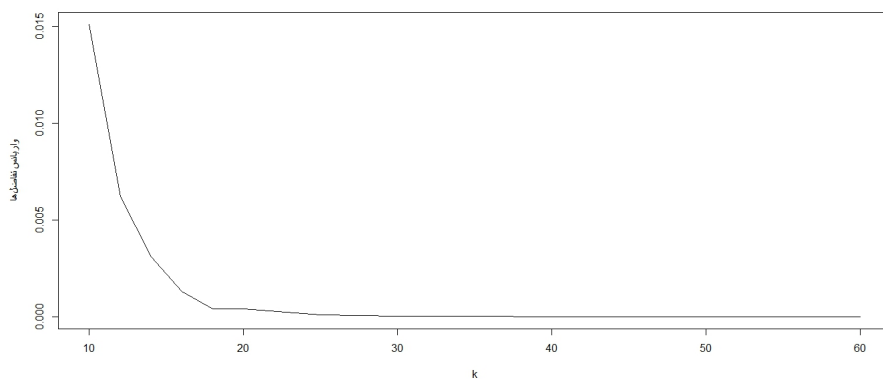
شکل ۶: میانگین قدرمطلق تفاضل‌های مربوط به نقطه‌ی تأثیر دوم برای  $k$ ‌های مختلف و اندازه نمونه‌ی ۲۰۰

### بحث و نتیجه‌گیری

بر اساس رابطه‌ی (۱.۳)، در مدل رگرسیون خطی تابعی با نقاط تأثیر (۱.۲)،  $\sum_{j=k+1}^n \bar{\alpha}_j \hat{\theta}_{ij}$ ،  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i^{[k]}(\hat{\tau})$  در احتمال به  $\sqrt{n} [\sum_{j=k+1}^n \alpha_j \lambda_j \psi_j(\tau_1), \dots, \sum_{j=k+1}^n \alpha_j \lambda_j \psi_j(\tau_S)]^T$  همگراست. این نتیجه بسیار کاربردی



شکل ۷: واریانس تفاضل‌های مربوط به نقطه‌ی تأثیر اول برای  $k$ ‌های مختلف و اندازه نمونه‌ی ۲۰۰



شکل ۸: واریانس تفاضل‌های مربوط به نقطه‌ی تأثیر دوم برای  $k$ ‌های مختلف و اندازه نمونه‌ی ۲۰۰

است، زیرا در عمل  $\tau_r$ ‌ها،  $\psi_j$ ‌ها،  $\lambda_j$ ‌ها و  $\alpha_j$ ‌ها را در اختیار نداریم و لازم است به جای آن‌ها از برآوردهایشان استفاده کنیم. رابطه‌ی به‌دست آمده را می‌توان در بسیاری از استنباط‌های آماری در مورد مدل رگرسیون خطی تابعی با نقاط تأثیر (۱.۲)، از جمله در یافتن بازه‌های پیش‌گویی و بازه‌های بوت استرپی پیش‌گویی به کار گرفت.

## تقدیر و تشکر

نویسندگان مراتب سپاس و قدردانی خود را از داوران محترم بابت نظرات دقیق و ارزشمندشان و از سردبیر گرامی مجله به‌دلیل توجه و مدیریت شایسته‌ی فرایند داوری ابراز می‌دارند. پیشنهادهای ارائه‌شده تأثیر بسزایی در ارتقای کیفیت نهایی این مقاله داشته است.

## مراجع

- [1] Aneiros, G. and Vieu, P., 2014. Variable selection in infinite-dimensional problems. *Statistics and Probability Letters*, 94, pp.12–20. doi: 10.1016/j.spl.2014.06.025

- [2] Crambes, C., Kneip, A. and Sarda, P., 2009. Smoothing splines estimators for functional linear regression. *Annals of Statistics*, 37(1), pp.35–72. doi: 10.1214/07-AOS563
- [3] Ferraty, F. and Vieu, p., 2006. *Nonparametric functional data analysis: theory and practice*. Springer Science, Business Media.
- [4] Kneip, A., Poss, D. and Sarda, P., 2016. Functional linear regression with points of impact. *Annals of Statistics*, 44(1), pp.1–30. doi: 10.1214/15-AOS1323
- [5] Liebl, D., Rameseder, S. and Rust, C., 2020. Improving estimation in functional linear regression with points of impact: Insights into Google AdWords. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 29(4), pp.814–826. doi: 10.1080/10618600.2020.1754224
- [6] Lindquist, M. A. and McKeague, I. W., 2009. Logistic regression with Brownian-like predictors. *Journal of the American Statistical Association*, 104 (488), pp.1575–1585. doi: 10.1198/jasa.2009.tm08496
- [7] McKeague, I. W. and Sen, B., 2010. Fractals with point impact in functional linear regression. *Annals of statistics*, 38 (4), pp.2559. doi: 10.1214/10-AOS791
- [8] McLeod, A. I., Xu, C. and Lai, Y., 2020. Best Subset GLM and Regression Utilities. R package version 0.37.3.
- [9] Poss, D., Liebl, D., Kneip, A., Eisenbarth, H., Wager, T. D. and Barrett, L. F., 2020. Superconsistent estimation of points of impact in non-parametric regression with functional predictors. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 82(4), pp.1115–1140. doi: 10.1111/rssb.12386
- [10] Ramsey, J. O. and Silverman, B.W., 2005. *Functional data analysis*. Springer Series in Statistics, New York.
- [11] Shirvani, A., Khademnoe, O. and Hosseini-Nasab, M., 2024. Hypothesis testing for points of impact in functional linear regression. *Computational and Applied Mathematics*, 43(4), pp.201. doi: 10.1007/s40314-024-02723-5
- [12] Zhang, Y., 2012. *Sparse selection in Cox models with functional predictors*. Columbia University.