Kharazmi University

Mathematical Research

Year 2026, Volume 11, Issue 4, pp. 1–7

Print ISSN: 2588-2546

Online ISSN: 2588-2554

DOI: xxxx

A study of the Furstenberg Boundary for Pair of Groups

M. B. Asadi[(1)] [1] and Z. Hassanpour Yakhdani[(2)]

[(1,2)] School of Mathematics, Statistics and Computer Science, Colledge of Science, University of Tehran, Tehran, Iran

Received: 27 December 2025 Accepted: 4 January 2026 Published online: 19 January 2026

Abstract: In this paper, assuming that G is a discrete topological group and H is a subgroup of G, we introduce the notion of a (G, H)-operator system and define the Hamana boundary for pairs of groups (G, H). In fact, we show that the Furstenberg boundary for pairs of groups is isomorphic to the Hamana boundary for pairs of groups. In other words, the natural extension of the classical theory of Furstenberg boundaries remains valid for the Furstenberg boundary associated with pairs of groups (G, H).

Keywords: Furstenberg boundary, Hamana boundary, Injective envelope.

[1]Corresponding author

E-mail addresses: (M. B. Asadi) mb.asadi@ut.ac.ir, (Z. Hassanpour-Yakhdani) zhassanpour91@gmail.com

پژوهش‌های ریاضی

شاپا چاپی: ۲۵۸۸-۲۵۴۶
شاپا الکترونیکی: ۲۲۸۸-۲۵۵۴
DOI: xxxx

سال ۱۴۰۴، دوره ۱۱، شماره ۴، ص ۱–۷

دانشگاه خوارزمی

مطالعهٔ مرز فرستنبرگ برای زوج گروه‌ها

محمدباقر اسدی [(۱)] [۱] و زهرا حسن پور یخدانی [(۲)]

[(۱),(۲)] دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشکدگان علوم، دانشگاه تهران، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱۰/۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۰/۱۴ تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۱۰/۲۹

چکیده: در این مقاله، با فرض آنکه G گروه توپولوژیک گسسته و H یک زیرگروه آن است، به بیان مفهوم (G,H) سیستم عملگری پرداخته و مرز هامانا برای زوج گروه‌های (G,H) را تعریف نموده‌ایم. درواقع، نشان داده‌ایم که مرز فرستنبرگ برای زوج گروه‌ها با مرز هامانا برای زوج گروه‌ها همریخت است. به بیان دیگر، تعمیم طبیعی نظریهٔ کلاسیک مرزهای فرستنبرگ برای مرز فرستنبرگ برای زوج گروه‌های (G,H) نیز برقرار است.

واژه‌هاي کلیدي: مرز فرستنبرگ، مرز هامانا، پوشش انژکتیو

۱ مقدمه

مرز فرستنبرگ ابزار کلیدی در دینامیک توپولوژیک، تحلیل هارمونیک و نظریهٔ اندازه است، زیرا رفتار بلندمدت شارش‌های گروهی، مسیرهای تصادفی نامتناهی و ساختارهای هارمونیک مرتبط با گروه‌ها را به‌صورت یکتا و جهان‌شمول توصیف می‌کند [۱، ۲]. از سوی دیگر، هامانا [۲] نشان داد که جبر تمام توابع پیوسته روی مرز فرستنبرگ، به‌طور طبیعی با پوشش انژکتیو Gـعملگری اعداد مختلط هم‌ارز است. این هم‌ارزی، پیوندی بنیادین میان دیدگاه‌های دینامیکی و چارچوب عملگری برقرار می‌کند؛ به گونه‌ای که ویژگی‌های دینامیکی مرز فرستنبرگ، از جمله مینیمال بودن شارش‌ها و خاصیت قویاً مجانب‌شونده بودن، به‌طور کامل در قالب ساختار جبری و پوشش انژکتیو Gـعملگری قابل تفسیر و تحلیل است. این همریختی امکان بهره‌گیری همزمان از ابزارهای دینامیک توپولوژیک، تحلیل هارمونیک و نظریهٔ عملگرها را فراهم می‌آورد و اهمیت مرز فرستنبرگ را از دیدگاه جبری نیز روشن می‌سازد [۱، ۲، ۵].

[۱] نویسنده مسئول مقاله

(M. B. Asadi) mb.asadi@gmail.com, (Z. Hassanpour-Yakhdani) mb.asadi@gmail.com

در ادامهٔ این مسیر پژوهشی، مونود [۴] مفهومِ *مرز فرستنبرگ برای زوج گروه‌های* (G,H) را برای گروه گسسته‌ی G و زیرگروه H تعریف نمود. این مفهوم که معمولاً با $\partial_F(G,H)$ نشان داده می‌شود، ساختار دینامیکی نسبی میان این دو گروه را در کانون توجه قرار داد.

با وجود پیشرفت‌های چشمگیر در بررسی جنبه‌های دینامیکی مرز فرستنبرگ برای زوج گروه‌های (G,H) بخش عملگری این ساختار هنوز به‌طور کامل مورد مطالعه قرار نگرفته است. هدف این مقاله روشن‌سازی همین جنبه و ارائهٔ چارچوبی عملگری برای مرز فرستنبرگ برای زوج گروه‌هاست. ما نشان می‌دهیم که *مرز هامانا برای زوج گروه‌های* (G,H) را می‌توان مشابه حالت کلاسیک از طریق نظریهٔ پوشش انژکتیو (G,H)ـ سیستم عملگری ساخت و این مرز دقیقاً با مرز فرستنبرگ برای زوج گروه‌های (G,H) هم‌ارز است. به‌طور دقیق ثابت می‌کنیم که

$$C\big(\partial_H(G,H)\big)=I_{G,H}(\mathbb{C}),$$

و این فضا با $\partial_F(G,H)$ هم‌ریخت است. این نتیجه توسیعی طبیعی از نظریه‌های کلاسیک مرز هامانا و مرز فرستنبرگ است و با تحلیل‌های اخیر کلانتر و کندی [۵] هم‌راستا است.

۲ (G,H) ـ سیستم‌های عملگری و مرز هامانا برای زوج گروه‌های (G,H)

در این بخش ابتدا به یادآوری مفاهیم پایه‌ای در نظریهٔ سیستم‌های عملگری و پوشش‌های انژکتیو مجهز به کنش گروهی G می‌پردازیم. برای مطالعهٔ کامل‌تر، به [۲، ۳] مراجعه شود.

سیستم عملگری S یک زیرفضای خودالحاقی و دارای واحد از یک C^*ـ جبر یکدار است. منظور از Gـ *سیستم عملگری*، سیستم عملگری S است که همریختی گروهی $\alpha: G\longrightarrow \mathrm{Aut}(S)$ وجود دارد که به ازای عضو همانی $e\in G$ داشته باشیم $\alpha_e=\mathrm{id}_S$. این همریختی را *کنش* G *بر* S می‌نامیم. اگر T نیز یک Gـ سیستم عملگری باشد، نگاشت خطی $\varphi: S\longrightarrow T$ را Gـ *هموردا* می‌نامیم اگر برای هر $s\in G$ و $x\in S$،

$$\varphi(\alpha_s(x))=\beta_s(\varphi(x)),$$

که در آن $\beta: G\to \mathrm{Aut}(T)$ کنش G بر T است. Gـ سیستم عملگری U را Gـ *انژکتیو* می‌نامیم اگر برای هر نگاشت یکه، کاملاً ایزومتریک و Gـ هموردا $\iota: S\longrightarrow T$ و هر نگاشت یکه، کاملاً مثبت و Gـ هموردا $\psi: S\longrightarrow U$ نگاشت یکه، کاملاً مثبت و Gـ هموردا $\widehat{\psi}: T\longrightarrow U$ وجود داشته باشد که $\widehat{\psi}\circ\iota=\psi$.

طبق لم ۲.۲ هامانا [۲]، اگر S یک سیستم عملگری انژکتیو باشد، آنگاه Gـ سیستم عملگری $\ell^\infty(G,S)$ همواره Gـ انژکتیو است. منظور از Gـ گسترش از Gـ سیستم عملگری S زوج مرتب (T,ι) است که در آن T یک G-سیستم عملگری و $\iota: S\longrightarrow T$ یک نگاشت کاملاً ایزومتریک و Gـ هموردا باشد. در این حالت، تصویر $\iota(S)$ را یک نسخهٔ کاملاً ایزومتریک و Gـ هموردا از S در T می‌نامیم. Gـ گسترش (U,ι) را در نظر بگیرید.

- اگر U یک Gـ سیستم عملگری انژکتیو باشد، آن را Gـ *انژکتیو* گوییم.

- اگر U یک Gـ سیستم عملگری باشد که برای هر نگاشت یکه، کاملاً مثبت و Gـ هموردا $\varphi: U\longrightarrow T$ که $\varphi\iota$ روی S کاملاً ایزومتریک باشد، خودِ φ نیز لزوماً کاملاً ایزومتریک باشد، آن را Gـ *اساسی* گوییم.

- اگر U یک Gـ سیستم عملگری باشد که برای هر نگاشت یکه، کاملاً مثبت و Gـ هموردا $\varphi: U\longrightarrow U$ که روی $\iota(S)$ همانی است، ناگزیر بر کل U همانی باشد. آن را Gـ *صلب* می‌گوییم.

فرض کنید G یک گروه گسسته و S یک Gــ سیستم عملگری باشد. یک Gــ گسترش (U, ι) از S که هم Gــ انژکتیو و هم Gــ اساسی باشد، G ــ *پوشش انژکتیو* S نامیده می‌شود. لازم به ذکر است که بنابر لم ۲.۴ [۳] ، هر G-پوشش انژکتیو لزوماً Gــ صلب است.

تعریف ۱.۲. *فرض کنید G گروه گسسته و H زیرگروه آن باشد. (G, H)ــ سیستم عملگری عبارت است از G-سیستم عملگری S که برای هر $h \in H$ و هر $x \in S$ داریم $h \cdot x = x$. نگاشت‌ها در این رسته، نگاشت‌های Gــ هم‌ریخت هستند، یعنی*

$$\phi(sT) = s\phi(T), \quad \forall s \in G,\, T \in S.$$

طبق نظریهٔ هامانا [۲، ۵]، هر Gــ سیستم عملگری S دارای Gــ *پوشش انژکتیو* است که با نماد $I_G(S)$ نمایش داده می‌شود. مشابه اثبات حالت کلاسیک، می‌توان نشان داد که گزاره زیر برقرار است.

گزاره ۲.۲. *فرض کنید S یک (G, H)ــ سیستم عملگری باشد. آنگاه S دارای یک (G, H)ــ پوشش انژکتیو $(I_{(G,H)}(S), \kappa)$ است. این پوشش انژکتیو از لحاظ یکتایی به این صورت مشخص می‌شود. برای هر پوشش انژکتیو (G, H) دیگری از S، مانند (U, i)، یک نگاشت کاملاً ایزومتریک و Gــ هم‌ارز*

$$\varphi\colon I_{(G,H)}(S) \longrightarrow U$$

وجود دارد به طوری که رابطه

$$\varphi \circ \kappa = i$$

برقرار باشد.

حال، اگر $\mathbb{C}$ را به عنوان ساده‌ترین سیستم عملگری در نظر بگیریم، آنگاه می‌توان آن را یک (G, H)ــ سیستم عملگری در نظر گرفت. به این ترتیب که عمل G روی $\mathbb{C}$ طبیعی و عمل H کاملاً ثابت در نظر گرفته شود. پوشش انژکتیو $I_{(G,H)}(\mathbb{C})$ را در نظر بگیرید. این فضا به عنوان یک زیرمجموعه $l^\infty(G, S)$ ، مجهز به ضرب چوی—افروس، یک C^*ــ جبر جابه‌جایی تشکیل می‌دهد. بنابراین با فضای توابع پیوسته روی یک فضای هاوسدورف فشرده هم‌ارز است. این فضای توپولوژیک را *مرز هامانا برای زوج* (G, H) می‌نامیم و آن را با $\partial_H(G, H)$ مشخص می‌کنیم؛ یعنی

$$C(\partial_H(G, H)) = I_{G,H}(\mathbb{C}).$$

این ساختار، نسخهٔ نسبی مفهوم کلاسیک هامانا است که پیش‌تر برای گروه تعریف شده بود و اکنون با افزودن شرط ثبات زیرگروه H، شکل گسترده‌تری به خود می‌گیرد. چنین تعریفی از مرز، ابزار دقیقی برای مطالعهٔ مرز فرستنبرگ برای زوج گروه‌های (G, H) را می‌دهد. به بیان دقیق‌تر، هر نگاشت هم‌ریخت (G, H)ــ عملگری از $C(\partial_H(G, H))$ به هر (G, H)ــ سیستم عملگری دیگر ناگزیر یک $*$ــ هومومورفیسم واحدی است و ساختار جبری و توپولوژیک آن را کاملاً حفظ می‌کند. بنابراین، مرز هامانا نه‌تنها از طریق پوشش انژکتیو تعریف می‌شود، بلکه از حیث خواص هم‌ریختی نیز توسط آن تعیین می‌گردد.

۳ مرز فرستنبرگ برای زوج گروه‌های (G, H)

فرض کنید X یک فضای توپولوژیک فشرده به همراه با یک کنش پیوسته $G \times X \longrightarrow X$ باشد، که برای هر $g \in G$، نگاشت $x \longmapsto g \cdot x$ یک هم‌ریختی توپولوژیک از X به خودش است، در این صورت X یک G ــ شارش

نامیده می‌شود. منظور از یک Gـ *شارش آفین* مجموعه‌ای مانند K است که در آن K یک مجموعهٔ محدب و فشرده در یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً فشرده هاوسدورف بر روی $\mathbb{R}$ و دارای یک کنش پیوسته $G \times K \longrightarrow K$ است، به‌طوری که برای هر $g \in G$، نگاشت $x \longmapsto g \cdot x$ از K یک همریختی آفین و توپولوژیک از K به خودش است. همچنین، (G, H)ـ *شارش آفین*، به صورت یک Gـ شارش آفین تعریف می‌شود که دارای یک نقطهٔ ثابت تحت کنش H باشد.

تعریف ۱.۳. *منظور از یک شارش (G, H)ـ تحویل‌ناپذیر، (G, H)ـ شارش آفینی است که شامل هیچ (G, H)-شارش آفین کوچکتری نیست.*

بنابر گزاره ۲-۱ مقاله [۴] ، یک (G, H)ـ شارش آفین تحویل ناپذیر وجود دارد که *جهانی* است، به این معنا که برای هر (G, H)ـ شارش تحویل ناپذیرِ دیگر، یک Gـ همریختی از این شارش به آن وجود دارد. علاوه بر این، این شارش آفین جهانی تا Gـ همریختی یکتاست. این (G, H)- شارش آفین با چنین خاصیت جهانی را با $\Delta(G, H)$ نشان می‌دهیم.

مرز فرستنبرگ برای زوج (G, H) به مجموعهٔ نقاط اکسترمال $\Delta(G, H)$ گفته می‌شود:

$$\partial_F(G, H) = \mathrm{Ext}(\Delta(G, H)).$$

طبق گزاره ۱.۴ [۴] داریم:

$$P(\partial_F(G, H)) = \Delta(G, H),$$

که در آن $P(X)$ فضای اندازه‌های احتمال بر روی X است.

تعریف ۲.۳. *یک Gـ شارش X، (G, H)ـ مرز نامیده می‌شود اگر $P(X)$ یک (G, H)ـ شارش تحویل‌ناپذیر باشد.*

گزاره ۳.۳. [۴] *Gـ شارش X یک (G, H)ـ مرز است اگر و تنها اگر:*

۱. *H یک اندازه $\nu \in P(X)$ را ثابت نگه می‌دارد، یعنی $h \cdot \nu = \nu$ برای همه $h \in H$.*

۲. *هر اندازهٔ دیگری در $P(X)$ به هر نقطهٔ X توسط عمل G همگرا شود، یعنی:*

$$\delta_x \in \overline{G\nu}, \quad \forall x \in X.$$

ملاحظه ۴.۳. *برخی ویژگی‌های اصلی مرز فرستنبرگ برای زوج (G, H) عبارتند از:*

- *برای گروه گسسته G و زیرگروه H، لزوماً $\partial_F(G, H)$ خاصیت جهان شمولی را ندارد.*
- *برای هر (G, H)ـ مرز X، یک نگاشت Gـ همریخت $\Phi : \partial_F(G, H) \to P(X)$ وجود دارد، به‌طوری‌که اگر X را به‌صورت یک زیرفضای $P(X)$ در نظر بگیریم، $X \subseteq \Phi\big(\partial_F(G, H)\big)$.*
- *مرز فرستنبرگ تا حد همسانی یکتا است.*

مثال زیر از مقاله [۴] گرفته شده است.

مثال ۵.۳. *برای مرز فرستنبرگ نسبی $\partial_F(G, H)$، حالات خاص زیر برقرار است:*

۱. *اگر $H = \{e\}$ باشد، آنگاه $\partial(G, H) = \partial_F G$ که همان مرز فرستنبرگ کلاسیک گروه G است.*

۲. *اگر H یک زیرگروه هم‌نرمال در G باشد، آنگاه مرز فرستنبرگ نسبی $\partial_F(G,H)$ بدیهی بوده و یک فضای تک‌نقطه‌ای است.*

به این ترتیب، همان طور که در مثال قبل دیده می‌شود مرز فرستنبرگ برای زوج گروه‌های (G,H)، تعمیمی طبیعی از مرز کلاسیک فرستنبرگ است که امکان مطالعهٔ دینامیک گروه‌ها را برای زوج گروه‌های (G,H) را فراهم می‌کند. برای مطالعه بیشتر به [۴] مراجعه نمایید.

در ادامه نشان داده می‌شود که:

$$\partial_H(G,H) = \partial_F(G,H).$$

بنابراین داریم:

$$C(\partial_F(G,H)) = I_{G,H}(\mathbb{C}).$$

در واقع، نشان می‌دهیم تعمیم نظریه کلاسیک مرز هامانا و مرز فرستنبرگ [۵] برقرار است.

برای اثبات این نتایج، دو لم مهم مورد استفاده قرار می‌گیرند، که درواقع، توسیع گزاره ۴.۲ از مقاله [۱] و لم ۳.۲ مقاله [۵] هستند و اثبات آنها مشابه حالت کلاسیک [۴] است.

لم ۶.۳. *اگر M یک شارش آفین (G,H)ـ تحویل‌ناپذیر و B یک (G,H)ـ مرز باشد، هر نگاشت هم‌ارز از M به $P(B)$ باید محدودهٔ آن δ_M باشد. علاوه بر این، حداکثر یک نگاشت هم‌ارز از M به δ_M موجود است.*

لم ۷.۳. *اگر M یک شارش آفین (G,H)ـ تحویل‌ناپذیر و B یک (G,H)ـ مرز باشد، حداکثر یک نگاشت یکتایی مثبت (G,H)ـ هم‌ارز*

$$\varphi : C(B) \to C(M)$$

وجود دارد. اگر چنین نگاشتی موجود باشد، φ یک $*$ـ هومومورفیسم یکتا است.

قضیه ۸.۳. *اگر G یک گروه گسسته و $H \leq G$ باشد، آنگاه:*

$$P(\partial_H(G,H)) = \Delta(G,H),$$

به عبارتی:

۱. *$P(\partial_H(G,H))$ یک شارش آفین (G,H)ـ تحویل‌ناپذیر است و بنابراین $\partial_H(G,H)$ یک (G,H)ـ مرز محسوب می‌شود.*

۲. *$P(\partial_H(G,H))$ خاصیت جهان‌شمول بودن را داراست.*

اثبات. لازم است موارد زیر را اثبات کنیم:

- **گروه H یک اندازه را در $P(X)$ ثابت نگه می‌دارد.**

فرض کنید ν یک اندازه در $P(X)$ باشد. نشان می‌دهیم که H این اندازه را ثابت نگه می‌دارد؛ به بیان دیگر، برای هر $h \in H$ داریم $h\nu = \nu$. توجه کنید که برای هر تابع $f \in C(X)$،

$$(h\nu)(f) = \int f\, d(h\nu) = \nu(f \circ h) = \int f\, d\nu = \nu(f).$$

بنابراین، نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

- **هر اندازه در $P(X)$ توسط G به هر نقطه‌ای از X منقبض می‌شود.**
این واقعیت به‌صورت مشابه با حالت کلاسیک قابل اثبات است (نگاه کنید به [۵]).

- **$P(\partial_F(G,H))$ خاصیت جهان‌شمولی را داراست.**
به بیان دیگر، اگر X یک شارش آفین (G,H)ـ تحویل‌ناپذیر باشد، آنگاه یک (G,H)ـ ریختی

$$\varphi : P(\partial_F(G,H)) \to X$$

وجود دارد. این نتیجه با اعمال اندکی تغییر در برهانِ قضیه ۳.۱۱ [۴] و با استفاده از لم ۱ و لم ۲ به‌دست می‌آید.

□

مراجع

[۱] H. Furstenberg, *Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces*, Proc. Symp. Pure Math. 26 (1973).

[۲] M. Hamana, *Injective envelopes of operator systems*, Publ. RIMS 15 (1979), 773–785.

[۳] M. Hamana, *Injective envelopes of C^*-algebras*, J. Math. Soc. Japan, 37 (1985), 139-158.

[۴] N. Monod, *Furstenberg boundaries for pairs of groups*, arXiv:1301.7749.

[۵] B. Kalantar, M. Kennedy, *Boundaries of reduced C*-algebras of discrete groups*, J. Reine Angew. Math. 727 (2016), 247–267.