Mathematical Research

Year 2025, Volume 11, Issue 3, pp. 104–122

Print ISSN: 2588-2546

Online ISSN: 2588-2554

DOI: xxxx

Representation of discrete functions using mean of weighted discrete white noise WSS random processes

Mahdi Mahmoudi[(1)] and Jafar Pourrostam[(2)] [1]

[(1)],[(2)] Faculty of Electrical and Computer Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

Received: 15 November 2022 Accepted: 27 November 2025 Published online: 17 December 2025

Abstract: There are several ways of representing functions using some other basis functions. One way is using methods like Fourier series. Basis functions in these methods are deterministic and don't have any random parameters. In another way, we can use a linear combination of some know basis functions to determine an approximation to a known function, such that the basis functions have some random parameters chosen from a probability space. In this paper we use discrete WSS (Wide Sense Stationary) random processes (or equivalently sequences of i.i.d. random variables) as a basis to represent deterministic discrete functions. In this method for each random process a coefficient is related, and the mean of these weighted random processes are calculated. It is shown that this mean of weighted random processes converges to the deterministic function with probability 1 and also in MS sense. If we consider the mean of only a finite number of random processes, we obtain an approximation to the function. The mean of the error of this approximation is calculated. A formula relating the energy of the deterministic function and the power of the coefficients, similar to the Parseval's theorem in Fourier analysis is obtained. There is some characteristics like linearity in this representation.

Keywords: discrete random processes, random basis, random series, series expansion.

[1]Corresponding author

E-mail addresses: (Mahdi Mahmoudi) 77m.mahmoudi@gmail.com, (Jafar Pourrostam) j.pourrostam@tabrizu.ac.ir

پژوهش‌های ریاضی

سال ۱۴۰۴، دوره ۱۱، شماره ۳، ص ۱۰۴–۱۲۲

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸

شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۲۸۸

DOI: xxxx

دانشگاه خوارزمی

نمایش توابع گسسته بر حسب میانگین فرایندهای تصادفی نوفه سفید WSS گسسته وزن‌دهی‌شده

مهدی محمودی [(۱)] و جعفر پوررستم [(۲)] [۱]

[(۱)],[(۲)] دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۸/۲۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۹/۶ تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۹/۲۶

چکیده: روش‌های متنوعی برای نمایش توابع بر حسب توابع پایه وجود دارد. عمدتا در این روش‌ها توابع پایه از میان توابع با تعریف معین انتخاب می‌شوند که برای مثال سری فوریه را می‌توان نام برد. در این روش‌ها به هر تابع پایه ضریبی نسبت می‌دهیم و این ترکیب خطی از توابع پایه را به عنوان نمایشی برای تابع اولیه در نظر می‌گیریم. در این مقاله روشی را برای نمایش یک تابع گسسته بیان می‌کنیم که در آن توابع پایه را نه از میان توابع با تعریف معین، بلکه از میان فرایندهای تصادفی برمی‌گزینیم. روش کار بدین صورت است که به هر فرایند تصادفی وزن یا ضریبی نسبت می‌دهیم و سپس میانگین این فرایندهای تصادفی وزن‌دار را به عنوان نمایشی برای تابع در نظر می‌گیریم. در واقع از فرایندهای تصادفی به عنوان پایه‌ای تصادفی برای نمایش توابع استفاده می‌کنیم. همانند سایر روش‌های نمایش توابع، همگرایی این نحوه نمایش به تابع اصلی بررسی شده و نشان داده می‌شود که این نمایش با احتمال مساوی ۱ به تابع اصلی همگراست. برخی خواص مربوط به این نحوه نمایش نیز در این مقاله ارائه خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: فرایندهای تصادفی گسسته، پایه‌های تصادفی سری‌های تصادفی، بسط توابع.

۱ مقدمه

نمایش توابع بر حسب تعدادی تابع دیگر دارای پیشینه‌ای طولانی است و روش‌های متنوعی را برای آن می‌توان برشمرد. یک نحوه نمایش توابع، استفاده از سری‌های فوریه و توابع مثلثاتی برای نمایش توابع است. روش‌های

[۱] نویسنده مسئول مقاله

(Mahdi Mahmoudi) 77m.mahmoudi@gmail.com, (Jafar Pourrostam) j.pourrostam@tabrizu.ac.ir

دیگری که می‌توان نام برد عبارتند از سری‌های توانی، سری‌های لوران، بسط به توابع بسل و بسط به سری لژاندر [۱] [۲] . در این روش‌ها توابع پایه‌ای که مورد استفاده قرار می‌گیرند دارای تعاریف مشخصی هستند و هیچگونه مولفه تصادفی در خود ندارند. از این نظر این نمایش‌ها را می‌توان در یک دسته‌بندی قرار داد.

در یک دسته‌بندی دیگر، برای تقریب یک تابع از تعدادی تابع پایه دیگر استفاده می‌شود. این توابع پایه تعاریف مشخصی دارند ولی دارای یک یا چند پارامتر تصادفی هستند. برای مثال یک تابع را می‌توان با ترکیب خطی تعداد محدودی تابع سینوسی تقریب زد که فاز آن‌ها متغیرهایی تصادفی هستند که به طور یکنواخت از بازه $[-\pi, \pi]$ انتخاب می‌شوند. در مراجع [۳] [۴] مثال‌هایی از این تقریبات و خطای مربوط به آن‌ها بررسی شده است.

آنچه که در این نوشتار مورد بررسی قرار می‌گیرد، استفاده از فرایندهای تصادفی به عنوان پایه‌ای برای نمایش توابع معین است. توابعی که مورد بررسی قرار می‌گیرند، توابعی حقیقی با دامنه اعداد صحیح هستند. فرایندهای تصادفی مورد استفاده از نوع گسسته WSS[۱] یا به عبارتی دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی .i.i.d هستند. در این روش به هر فرایند تصادفی ضریبی نسبت می‌دهیم، سپس میانگین این فرایندهای تصادفی وزن‌دار را به عنوان نمایشی برای تابع مورد بررسی در نظر می‌گیریم. نشان داده می‌شود که میانگین وزن‌دار فرایندهای تصادفی نوفه سفید با احتمال مساوی یک به تابع مورد نظر همگراست. همچنین این نمایش دارای همگرایی از نوع مربع میانگین به تابع مورد نظر است.

در این روش اگر از تعداد محدودی از فرایندهای تصادفی میانگین بگیریم، یک تقریب به تابع مورد نظر بدست خواهیم آورد. لذا بخشی از این مقاله به محاسبه خطای این تقریب اختصاص یافته است. رابطه‌ای مشابه با اتحاد پارسوال در آنالیز فوریه و نیز خواصی مانند خاصیت خطی بودن در این نحوه نمایش وجود دارد.

ترتیب مطالب بدین گونه است: در بخش اول فرایندهای تصادفی که مورد استفاده قرار می‌گیرند با نمادگذاری‌های مناسب تعریف شده‌اند. بخش بعدی به بررسی نمایش توابع بر حسب میانگین فرایندهای تصادفی وزن‌دار، نحوه بدست آوردن ضرایب و محاسبه خطای تقریب می‌پردازد. سپس به بررسی خواص این نحوه نمایش پرداخته می‌شود و پس از آن یک نمونه شبیه‌سازی رایانه‌ای از مطالب بیان شده ارائه خواهد شد. نهایتا یک نتیجه‌گیری ارائه خواهد شد.

۲ فرایندهای تصادفی نوفه سفید WSS گسسته و نمادگذاری‌ها

تابع گسسته $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ با طول محدود را در نظر می‌گیریم که در خارج از بازه‌ی $0 \le n \le N_0$ مقدار صفر دارد. به منظور نمایش این تابع گسسته بر حسب میانگین وزن‌دار فرایندهای تصادفی، ابتدا لازم است که این فرایندهای تصادفی را به نحو مناسبی تعریف نماییم. به این منظور، متغیرهای تصادفی $\mathbf{v}(n,m)$ با دو پارامتر $n\in\mathbb{Z}$ و $m\in\mathbb{Z}$ را در نظر می‌گیریم که دارای ویژگی‌های زیر هستند:

الف) متغیرهای تصادفی $\mathbf{v}(n,m)$ مستقل و دارای توزیع همانند (i.i.d) هستند.

ب) میانگین متغیر تصادفی $\mathbf{v}(n,m)$ مساوی صفر است ($E\{\mathbf{v}(n,m)\}=0$).

پ) واریانس متغیر تصادفی $\mathbf{v}(n,m)$ محدود و مساوی σ^2 است ($E\{\mathbf{v}^2(n,m)\}=\sigma^2$).

از ویژگی (الف) و (ب) می‌توان چنین نتیجه گرفت که کوواریانس دو متغیر متمایز $\mathbf{v}(n,m)$ و $\mathbf{v}(p,q)$ همواره صفر است، لذا تابع کوواریانس این متغیرها را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$C(\mathbf{v}(n,m),\mathbf{v}(p,q)) = E\{\mathbf{v}(n,m)\times\mathbf{v}(p,q)\} = \sigma^2\Delta(n-p,m-q) \qquad (۲.۱)$$

[۱] مخفف Wide Sense Stationary

که در آن تابع دو متغیره Δ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Delta(r,s)=\begin{cases} ۱ & , \quad r=s=۰ \\ ۰ & , \quad o.w. \end{cases} \tag{۲.۲}$$

در مجموعه متغیرهای تصادفی $\mathbf{v}(n,m)$، با ثابت در نظر گرفتن یکی از پارامترهای m یا n، یک مجموعه متغیر تصادفی بدست می‌آید که می‌توان آنها را به عنوان یک فرایند تصادفی گسسته در نظر گرفت. برای مثال به ازای $m=m_۰\in\mathbb{N}$، متغیرهای تصادفی $\mathbf{v}(n,m_۰)$، $n\in\mathbb{Z}$ یک فرایند تصادفی تشکیل می‌دهند. این فرایند از نوع نوفه سفید و WSS است، زیرا متغیرهای تصادفی $\mathbf{v}(n,m_۰)$ طبق فرض (الف) .i.i.d در نظر گرفته شده‌اند [۵]. همچنین به ازای $n=n_۰$، متغیرهای تصادفی $\mathbf{v}(n_۰,m)$، $m\in\mathbb{N}$ نیز یک فرایند تصادفی نوفه سفید WSS تشکیل می‌دهند.

در این مقاله از مفاهیم *همگرایی با احتمال مساوی با یک* و *قانون قوی اعداد بزرگ* استفاده خواهیم کرد. لذا مناسب است یک بار دیگر این مفاهیم را مرور کنیم [۵][۶]:

تعریف ۱.۲. همگرایی با احتمال مساوی با ۱: *دنباله‌ی متغیرهای تصادفی $\mathbf{X}_n$، $n=۱,۲,\ldots$ را در نظر می‌گیریم که در یک فضای نمونه S با پیشامدهای ζ_i تعریف شده‌اند. فرضا یک مجموعه از پیشامدهای S وجود داشته باشند به طوری که به ازای هر پیشامد ζ_i عضو این مجموعه حد زیر برقرار باشد:*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{X}_n(\zeta_i)=\mathbf{X}(\zeta_i) \tag{۳.۲}$$

اگر احتمال رخ دادن این مجموعه از پیشامدها یک باشد، آنگاه گوییم که دنباله $\mathbf{X}_n$ با احتمال مساوی ۱ به متغیر تصادفی $\mathbf{X}(\zeta_i)$ همگراست.

قضیه ۲.۲. قانون قوی اعداد بزرگ: *دنباله‌ی متغیرهای تصادفی $\mathbf{X}_۱$، $\mathbf{X}_۲$، ... را در نظر می‌گیریم که $i.i.d.$ بوده و دارای میانگین محدود $E\{\mathbf{X}_i\}=\mu<\infty$ هستند. متغیر تصادفی $\mathbf{M}_n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\mathbf{M}_n=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\mathbf{X}_i=\frac{\mathbf{X}_۱+\mathbf{X}_۲+\cdots+\mathbf{X}_n}{n} \tag{۴.۲}$$

قانون قوی اعداد بزرگ بیان می‌کند که اگر $n\to\infty$ میل کند، آنگاه $\mathbf{M}_n$ با احتمال مساوی ۱ به μ میل خواهد کرد.

با استفاده از قانون قوی اعداد بزرگ می‌توانیم واریانس و کوواریانس فرایندهای تصادفی $\mathbf{v}(n,m_۰)$ و $\mathbf{v}(n_۰,m)$ را بر حسب میانگین‌های زمانی بیان کنیم:

واریانس: ابتدا دسته متغیرهای تصادفی $\mathbf{v}(n,m_۰)$، $n\in\mathbb{Z}$ را در نظر می‌گیریم. از .i.i.d بودن این متغیرها، .i.i.d بودن متغیرهای $\mathbf{v}^۲(n,m_۰)$، $n\in\mathbb{Z}$ را می‌توانیم نتیجه بگیریم [۵]. میانگین متغیر تصادفی $\mathbf{v}^۲(n,m_۰)$ همان واریانس متغیر تصادفی $\mathbf{v}(n,m_۰)$ و برابر با $\sigma^۲$ است. حال از قانون قوی اعداد بزرگ نتیجه می‌گیریم که میانگین متغیرهای تصادفی $\mathbf{v}^۲(n,m_۰)$، $n\in\mathbb{Z}$ با احتمال مساوی ۱ به عدد $\sigma^۲$ همگرا است:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{۱}{N}\sum_{n=-\lfloor N/۲\rfloor-۱}^{\lfloor N/۲\rfloor}\mathbf{v}^۲(n,m_۰)=\sigma^۲ \tag{۵.۲}$$

که در آن علامت $\lfloor\rfloor$ بیانگر جزء صحیح عدد است. برای فرایند تصادفی $\mathbf{v}(n_۰,m)$، $m\in\mathbb{N}$ نیز می‌توان رابطه

مشابهی نوشت:

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \mathbf{v}^2(n_0, m) = \sigma^2 \tag{۶.۲}$$

کوواریانس: دو متغیر تصادفی $\mathbf{v}(n_1, m)$ و $\mathbf{v}(n_2, m)$ را در نظر می‌گیریم. به ازای هر $m \in \mathbb{N}$ کوواریانس این دو متغیر را با استفاده از رابطه ۱.۲ به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} C\big(\mathbf{v}(n_1, m), \mathbf{v}(n_2, m)\big) &= E\{\mathbf{v}(n_1, m) \times \mathbf{v}(n_2, m)\} && (۷.۲)\\ &= \sigma^2\, \Delta(n_1 - n_2, 0) && (۸.۲)\\ &= \sigma^2\, \delta(n_1 - n_2) && (۹.۲) \end{aligned}$$

که در آن تابع تک متغیره δ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & , \quad n = 0 \\ 0 & , \quad o.w. \end{cases} \tag{۱۰.۲}$$

حال با استفاده از قانون قوی اعداد بزرگ، رابطه کوواریانس ۷.۲ را می‌توانیم بر حسب میانگین‌های زمانی بیان کنیم. ابتدا متغیرهای تصادفی $\mathcal{V}_{n_1,n_2}(m) = \mathbf{v}(n_1, m) \times \mathbf{v}(n_2, m)$، $m \in \mathbb{N}$ را در نظر می‌گیریم. از i.i.d. بودن متغیرهای تصادفی $\mathbf{v}(n, m)$، i.i.d. بودن متغیرهای $\mathcal{V}_{n_1,n_2}(m)$ را می‌توان نتیجه گرفت. همچنین از رابطه ۷.۲ می‌دانیم که میانگین همه متغیرهای تصادفی $\mathcal{V}_{n_1,n_2}(m)$، $m \in \mathbb{N}$ مساوی با $\sigma^2\delta(n_1 - n_2)$ است. پس از قانون اعداد بزرگ رابطه زیر را نتیجه می‌گیریم:

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \mathcal{V}_{n_1,n_2}(m) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \mathbf{v}(n_1, m)\, \mathbf{v}(n_2, m) = \sigma^2\delta(n_1 - n_2) \tag{۱۱.۲}$$

که در آن همگرایی با احتمال مساوی ۱ برقرار است.

۳ نمایش توابع گسسته بر حسب میانگین فرایندهای تصادفی

در این بخش نمایشی برای توابع گسسته با استفاده از فرایندهای تصادفی گسسته نوفه سفید ارائه می‌شود. تابع گسسته $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم که دارای طول محدود بوده و در خارج از بازه $0 \leq n \leq N_0$ مقدار صفر دارد. برای این تابع نمایشی بر حسب فرایندهای تصادفی $\mathbf{v}(n, 1)$، $\mathbf{v}(n, 2)$ و ... بدست خواهیم آورد. این نمایش را به صورت قضیه‌ای بیان کرده و در ادامه به اثبات آن می‌پردازیم.

قضیه ۱.۳. *تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ و فرایندهای تصادفی $\mathbf{v}(n, 1)$، $\mathbf{v}(n, 2)$ و ... را در نظر می‌گیریم. تابع $f(n)$ را می‌توان بر حسب میانگین وزن‌دار این فرایندهای تصادفی به شکل زیر نمایش داد؛ که در آن عبارت سمت راست با احتمال مساوی ۱ به $f(n)$ همگراست:*

$$f(n) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \mathbf{F}(m)\mathbf{v}(n, m) \tag{۱.۳}$$

که در آن ضریب $\mathbf{F}(m)$ *با رابطه زیر داده می‌شود:*

$$\mathbf{F}(m) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N_0} f(n)\mathbf{v}(n,m). \tag{۲.۳}$$

به منظور مراجعات آتی، رابطه ۱.۳ را *رابطه ترکیب* و رابطه ۲.۳ را *رابطه تحلیل* نامگذاری می‌کنیم. میانگین موجود در رابطه ترکیب را *میانگین وزن‌دار* فرایندهای تصادفی $\mathbf{v}(n,m)$ می‌نامیم. همچنین $\mathbf{F}(m)$ را *تبدیل* تابع $f(n)$ می‌نامیم.

اثبات. در رابطه ترکیب به جای $\mathbf{F}(m)$ مقدار آن از رابطه تحلیل را جاگذاری کرده و نشان می‌دهیم که حد حاصل با احتمال مساوی ۱ به $f(n)$ همگراست:

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\mathbf{F}(m)\mathbf{v}(n,m) = \lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{N_0} f(i)\mathbf{v}(i,m)\right)\mathbf{v}(n,m) \tag{۳.۳}$$

$$= \lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{N_0} f(i)\mathbf{v}(i,m)\mathbf{v}(n,m)\right) \tag{۴.۳}$$

متغیر تصادفی $\mathbf{z}_n(m)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{z}_n(m) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{N_0} f(i)\mathbf{v}(i,m)\mathbf{v}(n,m) \tag{۵.۳}$$

میانگین $\mathbf{z}_n(m)$ را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$E\left(\mathbf{z}_n(m)\right) = E\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{N_0} f(i)\mathbf{v}(i,m)\mathbf{v}(n,m)\right) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{N_0} f(i)E\left(\mathbf{v}(i,m)\mathbf{v}(n,m)\right) \tag{۶.۳}$$

مقدار $E\left(\mathbf{v}(i,m)\mathbf{v}(n,m)\right)$ را از رابطه ۷.۲ جاگذاری می‌کنیم:

$$E\left(\mathbf{z}_n(m)\right) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{N_0} f(i)\sigma^2\delta(i-n) = f(n) \tag{۷.۳}$$

پس مشاهده نمودیم که میانگین متغیرهای $\mathbf{z}_n(m)$ مستقل از m و مساوی با $f(n)$ است. از طرفی از i.i.d. بودن متغیرهای $\mathbf{v}$، می‌توان i.i.d. بودن متغیرهای $\mathbf{z}_n(m)$، $m \in \mathbb{N}$ را نتیجه گرفت. پس از قانون قوی اعداد بزرگ نتیجه می‌گیریم که میانگین متغیرهای تصادفی $\mathbf{z}_n(m)$، $m \in \mathbb{N}$ با احتمال مساوی ۱ به میانگین تک تک آن‌ها یعنی $f(n)$ همگراست:

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\mathbf{z}_n(m) = f(n) \tag{۸.۳}$$

□

در ادامه این بخش ابتدا روشی برای بدست آوردن ضرایب $\mathbf{F}(m)$ بیان می‌گردد. سپس بحثی در رابطه با میانگین خطای رابطه ترکیب ۱.۳ ارائه خواهد شد.

۱.۳ محاسبه ضرایب $\mathbf{F}(m)$

برای محاسبه ضرایب $\mathbf{F}(m)$ از خاصیت خطی بودن همگرایی با احتمال مساوی ۱ استفاده می‌کنیم [۶]. در روابط زیر علامت $\xrightarrow{\text{a.s.}}$ نشان دهنده همگرایی با احتمال مساوی ۱ است.

خاصیت خطی بودن همگرایی: اگر $\mathbf{X}_M \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}_M \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbf{Y}$ آنگاه به ازای ثابت‌های $a, b \in \mathbb{R}$ داریم:

$$a\mathbf{X}_M + b\mathbf{Y}_M \xrightarrow{\text{a.s.}} a\mathbf{X} + b\mathbf{Y} \tag{۹.۳}$$

برای بدست آوردن $\mathbf{F}(m)$، از رابطه ۱۱.۲ مربوط به کوواریانس متغیرهای تصادفی $\mathbf{v}$ شروع می‌کنیم:

$$\sigma^2\delta(i-n) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \mathbf{v}(i,m)\mathbf{v}(n,m) \tag{۱۰.۳}$$

از خاصیت خطی بودن همگرایی استفاده کرده و طرفین رابطه بالا را در $f(i)$ ضرب می‌کنیم:

$$\sigma^2 f(i)\delta(i-n) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} f(i)\mathbf{v}(i,m)\mathbf{v}(n,m) \tag{۱۱.۳}$$

بار دیگر از خاصیت خطی بودن استفاده کرده و مجموع طرفین رابطه بالا را از $i=0$ تا $i=N_0$ محاسبه می‌کنیم:

$$\sigma^2 \sum_{i=0}^{N_0} f(i)\delta(i-n) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{N_0}\sum_{m=1}^{M} f(i)\mathbf{v}(i,m)\mathbf{v}(n,m) \tag{۱۲.۳}$$

در این تساوی ترتیب مجموع‌ها را در سمت راست معادله عوض می‌کنیم و ضریب σ^2 را به سمت راست معادله منتقل می‌کنیم:

$$\sum_{i=0}^{N_0} f(i)\delta(i-n) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{N_0} f(i)\mathbf{v}(i,m)\right)\mathbf{v}(n,m) \tag{۱۳.۳}$$

عبارت سمت چپ را با معادل آن یعنی $f(n)$ جایگزین می‌کنیم تا به معادله‌ای شبیه معادله ترکیب ۱.۳ برسیم:

$$f(n) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{N_0} f(i)\mathbf{v}(i,m)\right)\mathbf{v}(n,m) \tag{۱۴.۳}$$

حد بالا با احتمال مساوی ۱ به $f(n)$ همگرا است. با انتخاب عبارت داخل پرانتز به عنوان ضریب $\mathbf{F}(m)$، به رابطه

تحلیل ۲.۳ می‌رسیم:

$$\mathbf{F}(m) = \frac{۱}{\sigma^۲} \sum_{i=۰}^{N_۰} f(i)\mathbf{v}(i,m). \tag{۱۵.۳}$$

۲.۳ میانگین خطا

در این قسمت ابتدا میانگین جزئی $\mathbf{f}_M(n)$ را با رابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{f}_M(n) = \frac{۱}{M} \sum_{m=۱}^{M} \mathbf{F}(m)\mathbf{v}(n,m) \tag{۱۶.۳}$$

$\mathbf{f}_M(n)$ در واقع تقریبی به تابع $f(n)$ است، که هرچه M افزایش یابد، دقت این تقریب هم افزایش می‌یابد.

به ازای هر n، $\mathbf{f}_M(n)$ را می‌توان یک متغیر تصادفی در نظر گرفت. برای محاسبه میانگین $\mathbf{f}_M(n)$، ابتدا با جایگذاری $\mathbf{F}(m)$ از رابطه تحلیل ۲.۳ در رابطه ۱۶.۳، $\mathbf{f}_M(n)$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$\mathbf{f}_M(n) = \frac{۱}{M} \sum_{m=۱}^{M} \left(\frac{۱}{\sigma^۲} \sum_{i=۰}^{N_۰} f(i)\mathbf{v}(i,m) \right) \mathbf{v}(n,m) \tag{۱۷.۳}$$

$$= \frac{۱}{M} \sum_{m=۱}^{M} \left(\frac{۱}{\sigma^۲} \sum_{i=۰}^{N_۰} f(i)\mathbf{v}(i,m)\mathbf{v}(n,m) \right) \tag{۱۸.۳}$$

عبارت داخل پرانتز در رابطه بالا همان متغیر $\mathbf{z}_n(m)$ در رابطه ۵.۳ است که میانگین آن را در معادله ۷.۳ محاسبه کرده‌ایم:

$$\mathbf{f}_M(n) = \frac{۱}{M} \sum_{m=۱}^{M} \mathbf{z}_n(m) \quad , \quad E\{\mathbf{z}_n(m)\} = f(n) \tag{۱۹.۳}$$

حال میانگین $\mathbf{f}_M(n)$ را به کمک خاصیت خطی بودن میانگین‌گیری محاسبه می‌کنیم:

$$E\{\mathbf{f}_M(n)\} = E\left\{ \frac{۱}{M} \sum_{m=۱}^{M} \mathbf{z}_n(m) \right\} \tag{۲۰.۳}$$

$$= \frac{۱}{M} \sum_{m=۱}^{M} E\{\mathbf{z}_n(m)\} \tag{۲۱.۳}$$

$$= \frac{۱}{M} \sum_{m=۱}^{M} f(n) = f(n) \tag{۲۲.۳}$$

بنابراین میانگین متغیر تصادفی $\mathbf{f}_M(n)$ برابر با $f(n)$ است.

خطای تقریب $\mathbf{f}_M(n)$ به تابع $f(n)$ را به کمک محاسبه مجذور تفاضل $\mathbf{f}_M(n)$ و $f(n)$، و با رابطه زیر تعریف

می‌کنیم:

$$\mathcal{E}_M \triangleq \sum_{n=0}^{N_0} \left(\mathbf{f}_M(n) - f(n)\right)^2 \tag{۲۳.۳}$$

و میانگین خطا را با نماد ε_M نشان می‌دهیم:

$$\varepsilon_M = E\{\mathcal{E}_M\} \tag{۲۴.۳}$$

$$= E\left\{\sum_{n=0}^{N_0} \left(\mathbf{f}_M(n) - f(n)\right)^2\right\} \tag{۲۵.۳}$$

$$= \sum_{n=0}^{N_0} E\left\{\left(\mathbf{f}_M(n) - f(n)\right)^2\right\} \tag{۲۶.۳}$$

با توجه به اینکه به ازای هر n، میانگین متغیر تصادفی $\mathbf{f}_M(n)$ برابر با $f(n)$ است، کار ما در واقع یافتن واریانس‌های متغیرهای $\mathbf{f}_M(n)$ به ازای هر n در بازه $0 \leq n \leq N_0$ و محاسبه مجموع این واریانس‌ها است. پس ابتدا واریانس متغیر $\mathbf{f}_M(n)$ را به ازای یک n مشخص محاسبه می‌کنیم.

ابتدا $\mathbf{f}_M(n)$ را به نحو مناسبی بازنویسی کرده و نامگذاری‌های لازم بر روی متغیرها را انجام می‌دهیم:

$$\mathbf{f}_M(n) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} \mathbf{F}(m)\mathbf{v}(n,m) \tag{۲۷.۳}$$

$$= \frac{1}{M\sigma^2} \sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{i=0}^{N_0} f(i)\mathbf{v}(i,m)\right) \mathbf{v}(n,m) \tag{۲۸.۳}$$

$$= \frac{1}{M\sigma^2} \sum_{m=1}^{M} \mathbf{v}(n,m) \left(\sum_{i=0}^{N_0} f(i)\mathbf{v}(i,m)\right) \tag{۲۹.۳}$$

$$= \frac{1}{M\sigma^2} \sum_{m=1}^{M} \mathbf{y}_n(m) \tag{۳۰.۳}$$

که در آن

$$\mathbf{y}_n(m) = \mathbf{v}(n,m) \sum_{i=0}^{N_0} f(i)\mathbf{v}(i,m). \tag{۳۱.۳}$$

از i.i.d. بودن متغیرهای تصادفی $\mathbf{v}$، می‌توان i.i.d. بودن متغیرهای $\mathbf{y}_n(m)$، $1 \leq m \leq M$ را نتیجه گرفت. پس واریانس $\mathbf{f}_M(n)$، متناسب با مجموع واریانس‌های متغیرهای تصادفی $\mathbf{y}_n(m)$، $1 \leq m \leq M$ است. لذا ابتدا واریانس $\mathbf{y}_n(m)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$var\left(\mathbf{y}_n(m)\right) = E\{(\mathbf{y}_n(m) - E\{\mathbf{y}_n(m)\})^2\} \tag{۳۲.۳}$$

$$= E\{\mathbf{y}_n^2(m)\} - \left(E\{\mathbf{y}_n(m)\}\right)^2 \tag{۳۳.۳}$$

محاسبه $E\{\mathbf{y}_n^2(m)\}$:

$$E\{\mathbf{y}_n^2(m)\} = E\left\{\left(\mathbf{v}(n,m)\sum_{i=0}^{N_0} f(i)\mathbf{v}(i,m)\right)^2\right\} \quad (۳۴.۳)$$

$$= E\left\{\mathbf{v}^2(n,m)\sum_{i=0}^{N_0}\sum_{j=0}^{N_0} f(i)f(j)\mathbf{v}(i,m)\mathbf{v}(j,m)\right\} \quad (۳۵.۳)$$

$$= E\left\{\sum_{i=0}^{N_0}\sum_{j=0}^{N_0} f(i)f(j)\mathbf{v}(i,m)\mathbf{v}(j,m)\mathbf{v}^2(n,m)\right\} \quad (۳۶.۳)$$

در محاسبه عبارت بالا، مجموع دوگانه را می‌توان به دو مجموع جزئی با شرایط $i \neq j$ و $i = j$ تقسیم کرد و میانگین هر یک را جداگانه محاسبه نمود. میانگین مربوط به هر یک از این مجموع‌های جزئی را به شکل زیر نمایش می‌دهیم:

$$E\{\mathbf{y}_n^2(m)\} = E\{\mathbf{y}_n^2(m)\}|_{i\neq j} + E\{\mathbf{y}_n^2(m)\}|_{i=j} \quad (۳۷.۳)$$

$$= E\left\{\sum_{i=0,}^{N_0}\sum_{j=0,\, i\neq j}^{N_0} f(i)f(j)\mathbf{v}(i,m)\mathbf{v}(j,m)\mathbf{v}^2(n,m)\right\} \quad (۳۸.۳)$$

$$+ E\left\{\sum_{i=0,}^{N_0}\sum_{j=0,\, i=j}^{N_0} f(i)f(j)\mathbf{v}(i,m)\mathbf{v}(j,m)\mathbf{v}^2(n,m)\right\} \quad (۳۹.۳)$$

وقتی $i \neq j$ باشد، در حاصلضرب $\mathbf{v}(i,m)\mathbf{v}(j,m)\mathbf{v}^2(n,m)$ حداقل دو متغیر مستقل وجود دارد که میانگین دست کم یکی از آن‌ها صفر است. پس در همه این حالات، $E\{\mathbf{v}(i,m)\mathbf{v}(j,m)\mathbf{v}^2(n,m)\}$ مساوی صفر است، بنابراین:

$$E\{\mathbf{y}_n^2(m)\}|_{i\neq j} = \sum_{i=0,}^{N_0}\sum_{j=0,\, i\neq j}^{N_0} f(i)f(j)E\left\{\mathbf{v}(i,m)\mathbf{v}(j,m)\mathbf{v}^2(n,m)\right\} = 0 \quad (۴۰.۳)$$

در حالت $i = j$، $E\{\mathbf{y}_n^2(m)\}|_{i=j}$ را می‌توانیم به صورت ساده‌تر زیر نمایش دهیم:

$$E\{\mathbf{y}_n^2(m)\}|_{i=j} = E\left\{\sum_{k=0}^{N_0} f^2(k)\mathbf{v}^2(k,m)\mathbf{v}^2(n,m)\right\} \quad (۴۱.۳)$$

در مجموع بالا، مجددا دو حالت $k = n$ و $k \neq n$ را جداگانه در نظر می‌گیریم:

$$E\{\mathbf{y}_n^2(m)\}|_{i=j} = E\left\{\sum_{k=0,\, k\neq n}^{N_0} f^2(k)\mathbf{v}^2(k,m)\mathbf{v}^2(n,m) + f^2(n)\mathbf{v}^4(n,m)\right\} \quad (۴۲.۳)$$

$$= \sum_{k=0,\, k\neq n}^{N_0} f^2(k)E\left\{\mathbf{v}^2(k,m)\mathbf{v}^2(n,m)\right\} + f^2(n)E\left\{\mathbf{v}^4(n,m)\right\} \quad (۴۳.۳)$$

برای محاسبه $E\left\{\mathbf{v}^2(k,m)\mathbf{v}^2(n,m)\right\}$ از استقلال متغیرهای $\mathbf{v}(k,m)$ و $\mathbf{v}(n,m)$ استفاده می‌کنیم. همچنین

$E\left\{\mathbf{v}^{4}(n,m)\right\}$ نشان دهنده گشتاور چهارم متغیر تصادفی $\mathbf{v}(n,m)$ است که در حالت کلی آن را با $m_4(n,m)$ نشان می‌دهیم. **برای سادگی محاسبات**، فرض می‌کنیم که گشتاور چهارم متغیرهای تصادفی $\mathbf{v}(n,m)$ مستقل از اندیس‌های n و m بوده و آن را با m_4 نشان می‌دهیم. بنابراین:

$$E\left\{\mathbf{v}^{2}(k,m)\mathbf{v}^{2}(n,m)\right\} = E\left\{\mathbf{v}^{2}(k,m)\right\}E\left\{\mathbf{v}^{2}(n,m)\right\} = \sigma^{2}.\sigma^{2} = \sigma^{4}, \tag{۴۴.۳}$$

$$E\left\{\mathbf{v}^{4}(n,m)\right\} = m_4 \tag{۴۵.۳}$$

با جاگذاری دو معادله بالا در معادله ۴۳.۳ مقدار $E\{\mathbf{y}_n^2(m)\}|_{i=j}$ را بصورت زیر بدست می‌آوریم:

$$E\{\mathbf{y}_n^2(m)\}|_{i=j} = \sigma^4 \sum_{k=0,\, k\neq n}^{N_0} f^2(k) + m_4 f^2(n) \tag{۴۶.۳}$$

$$= \sigma^4 \sum_{k=0}^{N_0} f^2(k) + (m_4-\sigma^4) f^2(n) \tag{۴۷.۳}$$

نهایتا با جایگذاری دو معادله ۴۰.۳ و ۴۷.۳ در معادله ۳۷.۳ مقدار $E\{\mathbf{y}_n^2(m)\}$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$E\{\mathbf{y}_n^2(m)\} = \sigma^4 \sum_{k=0}^{N_0} f^2(k) + (m_4-\sigma^4) f^2(n) \tag{۴۸.۳}$$

محاسبه $E\{\mathbf{y}_n(m)\}$: با مقایسه $\mathbf{y}_n(m)$ در معادله ۳۱.۳ و $\mathbf{z}_n(m)$ در معادله ۵.۳، رابطه $\mathbf{y}_n(m) = \sigma^2 \mathbf{z}_n(m)$ را نتیجه می‌گیریم. در معادله ۷.۳ میانگین $\mathbf{z}_n(m)$ را برابر با $f(n)$ بدست آوردیم. لذا میانگین $\mathbf{y}_n(m)$ برابر خواهد بود با:

$$E\{\mathbf{y}_n(m)\} = \sigma^2 f(n) \tag{۴۹.۳}$$

اکنون واریانس $\mathbf{y}_n(m)$ را با جایگذاری مقادیر $E\{\mathbf{y}_n^2(m)\}$ و $E\{\mathbf{y}_n(m)\}$ در معادله ۳۲.۳ محاسبه می‌کنیم:

$$var(\mathbf{y}_n(m)) = E\{\mathbf{y}_n^2(m)\} - (E\{\mathbf{y}_n(m)\})^2 \tag{۵۰.۳}$$

$$= \sigma^4 \sum_{k=0}^{N_0} f^2(k) + (m_4-\sigma^4) f^2(n) - \sigma^4 f^2(n) \tag{۵۱.۳}$$

$$= \sigma^4 \sum_{k=0}^{N_0} f^2(k) + (m_4-2\sigma^4) f^2(n) \tag{۵۲.۳}$$

نهایتا واریانس $\mathbf{f}_M(n)$ را با محاسبه مجموع واریانس متغیرهای $\mathbf{y}_n(m)$، $1 \le m \le M$ بدست می‌آوریم:

$$E\left\{(\mathbf{f}_M(n) - f(n))^2\right\} = var(\mathbf{f}_M(n)) = \frac{1}{M^2\sigma^4}\sum_{m=1}^{M} var(\mathbf{y}_n(m)) \tag{۵۳.۳}$$

$$= \frac{1}{M^2\sigma^4}\sum_{m=1}^{M}\left(\sigma^4 \sum_{k=0}^{N_0} f^2(k) + (m_4-2\sigma^4) f^2(n)\right) \tag{۵۴.۳}$$

$$= \frac{1}{M^2\sigma^4} M \left(\sigma^4 \sum_{k=0}^{N_0} f^2(k) + (m_4 - 2\sigma^4) f^2(n) \right) \quad (۵۵.۳)$$

$$= \frac{1}{M} \left(\sum_{k=0}^{N_0} f^2(k) + (\frac{m_4}{\sigma^4} - 2) f^2(n) \right) \quad (۵۶.۳)$$

در معادله بالا، واریانس متغیر تصادفی $\mathbf{f}_M(n)$ به n وابسته است. در واقع $\mathbf{f}_M(n)$، $n \in \mathbb{Z}$ را می‌توانیم به عنوان یک فرایند تصادفی در نظر بگیریم که به ازای هر n، میانگین آن برابر با $f(n)$ است و واریانس آن با رابطه ۵۶.۳ مشخص می‌شود. با توجه به اینکه میانگین و واریانس $\mathbf{f}_M(n)$ به ازای nهای مختلف ثابت نیست، لذا $\mathbf{f}_M(n)$ را می‌توان یک *فرایند تصادفی غیر ایستا* در نظر گرفت.

اکنون به محاسبه میانگین خطا برمی‌گردیم. با جاگذاری رابطه ۵۶.۳ در رابطه میانگین خطا ۲۴.۳ داریم:

$$\varepsilon_M = \sum_{n=0}^{N_0} E\left\{ (\mathbf{f}_M(n) - f(n))^2 \right\} \quad (۵۷.۳)$$

$$= \sum_{n=0}^{N_0} \frac{1}{M} \left(\sum_{k=0}^{N_0} f^2(k) + (\frac{m_4}{\sigma^4} - 2) f^2(n) \right) \quad (۵۸.۳)$$

$$= \frac{1}{M} \left((N_0 + 1) \sum_{k=0}^{N_0} f^2(k) + (\frac{m_4}{\sigma^4} - 2) \sum_{n=0}^{N_0} f^2(n) \right) \quad (۵۹.۳)$$

$$= \frac{1}{M} \left((N_0 + 1) + \frac{m_4}{\sigma^4} - 2 \right) \sum_{k=0}^{N_0} f^2(k) \quad (۶۰.۳)$$

پس میانگین خطای تقریب $\mathbf{f}_M(n)$ به تابع $f(n)$ برابر است با:

$$\boxed{\varepsilon_M = \frac{1}{M} \left((N_0 + 1) + \frac{m_4}{\sigma^4} - 2 \right) \sum_{k=0}^{N_0} f^2(k)} \quad (۶۱.۳)$$

۳.۳ همگرایی از نوع میانگین مربع

با بررسی رابطه ۶۱.۳، همگرایی از نوع میانگین مربع (MS) برای $\mathbf{f}_M(n)$ را می‌توان نتیجه گرفت. در واقع به ازای هر n، میانگین مربع $(\mathbf{f}_M(n) - f(n))$ به صفر میل می‌کند:

$$\lim_{M\to\infty} E\left\{ (\mathbf{f}_M(n) - f(n))^2 \right\} = \lim_{M\to\infty} \left[\frac{1}{M} \left((N_0 + 1) + \frac{m_4}{\sigma^4} - 2 \right) \sum_{k=0}^{N_0} f^2(k) \right] = 0 \quad (۶۲.۳)$$

۴ خواص آماری تبدیل $\mathbf{F}(m)$

در این بخش چند خاصیت مربوط به $\mathbf{F}(m)$ را بررسی می‌کنیم. این خواص عبارتند از تابع چگالی، میانگین و واریانس متغیر تصادفی $\mathbf{F}(m)$. برخی نتایج مربوط به این خاصیت‌ها نیز ارائه خواهد شد.

۱.۴ تابع چگالی

برای تعیین تابع چگالی $\mathbf{F}(m)$، رابطه تحلیل ۲.۳ را بازنویسی می‌کنیم:

$$\mathbf{F}(m) = \frac{۱}{\sigma^۲}\sum_{i=۰}^{N_۰} f(i)\mathbf{v}(i,m) \tag{۱.۴}$$
$$= \frac{۱}{\sigma^۲} f(۰)\mathbf{v}(۰,m) \tag{۲.۴}$$
$$+ \frac{۱}{\sigma^۲} f(۱)\mathbf{v}(۱,m) \tag{۳.۴}$$
$$\vdots \tag{۴.۴}$$
$$+ \frac{۱}{\sigma^۲} f(N_۰)\mathbf{v}(N_۰,m) \tag{۵.۴}$$

با توجه به رابطه بالا، با فرض غیر صفر بودن $f(i)$، $۰ \le i \le N_۰$، متغیر تصادفی $\mathbf{F}(m)$ را می‌توان بصورت ترکیب خطی $N_۰+۱$ متغیر تصادفی مستقل در نظر گرفت. لذا تابع چگالی $\mathbf{F}(m)$ را می‌توان بر حسب $N_۰+۱$ تابع چگالی مربوط به متغیرهای تصادفی $(۱/\sigma^۲)f(i)\mathbf{v}(i,m)$، $۰ \le i \le N_۰$ نوشت.
فرض کنیم متغیر تصادفی $\mathbf{v}(n,m)$ از نوع پیوسته باشد و تابع چگالی آن با $\phi_v(x)$ داده شده باشد. از آنجایی که متغیرهای $\mathbf{v}(n,m)$ را i.i.d. فرض کرده‌ایم، لذا تابع $\phi_v(x)$ مستقل از n و m است. تابع چگالی متغیر $(۱/\sigma^۲)f(i)\mathbf{v}(i,m)$ را با $\phi_{v,i}(x)$ نشان می‌دهیم. $\phi_{v,i}(x)$ مطابق با فرمول زیر به تابع چگالی متغیر $\mathbf{v}(n,m)$ ارتباط دارد [۵]:

$$\phi_{v,i}(x) = \left|\frac{\sigma^۲}{f(i)}\right| \phi_v\left(\frac{\sigma^۲}{f(i)}x\right) \tag{۶.۴}$$

با توجه به استقلال متغیرهای $(۱/\sigma^۲)f(i)\mathbf{v}(i,m)$، تابع چگالی $\mathbf{F}(m)$، $\Phi_F(x)$، را میتوانیم با محاسبه کانوولوشن توابع چگالی $\phi_{v,i}(x)$، $۰ \le i \le N_۰$ بدست آوریم [۵]:

$$\Phi_F(x) = \phi_{v,۰}(x) * \phi_{v,۱}(x) * \ldots * \phi_{v,N_۰}(x) \tag{۷.۴}$$
$$= \left[\prod_{i=۰}^{N_۰}\left|\frac{\sigma^۲}{f(i)}\right|\right] \phi_v\left(\frac{\sigma^۲}{f(۰)}x\right) * \phi_v\left(\frac{\sigma^۲}{f(۱)}x\right) * \ldots * \phi_v\left(\frac{\sigma^۲}{f(N_۰)}x\right) \tag{۸.۴}$$

در حالتی که $N_۰$ تا حد قابل قبولی بزرگ باشد، می‌توان از **قضیه حد مرکزی** برای محاسبه تقریبی تابع توزیع چگالی $\Phi_F(x)$ استفاده نمود [۵]. مطابق با قضیه حد مرکزی، با افزایش در تعداد نمونه‌ها، تابع توزیع چگالی $\mathbf{F}(m)$ به یک *توزیع گاوسی* نزدیک خواهد شد.

با توجه به معادله بالا، متغیرهای تصادفی $\mathbf{F}(m)$، $m \in \mathbb{N}$ دارای تابع چگالی و در نتیجه توزیع همانند هستند. از طرفی از استقلال متغیرهای $\mathbf{v}$ می‌توان استقلال متغیرهای تصادفی $\mathbf{F}(m)$، $m \in \mathbb{N}$ را نتیجه گرفت. لذا متغیرهای تصادفی $\mathbf{F}(m)$، i.i.d. هستند و فرایند تصادفی $\mathbf{F}(m)$، $m \in \mathbb{N}$ یک فرایند تصادفی نوفه سفید WSS است.

۲.۴ میانگین و واریانس

میانگین $\mathbf{F}(m)$ را از تعریف آن می‌توانیم بدست بیاوریم:

$$E\{\mathbf{F}(m)\} = E\left\{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N_0} f(n)\mathbf{v}(n,m)\right\} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N_0} f(n)E\{\mathbf{v}(n,m)\} = 0 \qquad (۹.۴)$$

که در آن از فرض $E\{\mathbf{v}(n,m)\} = 0$ استفاده شده است.

متغیر $\mathbf{F}(m)$ بصورت ترکیب خطی $N_0 + 1$ متغیر مستقل است. لذا واریانس $\mathbf{F}(m)$ مساوی مجموع واریانس‌های این متغیرها است:

$$var(\mathbf{F}(m)) = var\left(\sum_{n=0}^{N_0}\frac{1}{\sigma^2}f(n)\mathbf{v}(n,m)\right) \qquad (۱۰.۴)$$

$$= \sum_{n=0}^{N_0} var\left(\frac{1}{\sigma^2}f(n)\mathbf{v}(n,m)\right) \qquad (۱۱.۴)$$

$$= \sum_{n=0}^{N_0}\frac{f^2(n)}{\sigma^4}var(\mathbf{v}(n,m)) \qquad (۱۲.۴)$$

$$= \sum_{n=0}^{N_0}\frac{f^2(n)}{\sigma^4}\sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N_0} f^2(n) \qquad (۱۳.۴)$$

پس واریانس $\mathbf{F}(m)$ برابر است با:

$$var(\mathbf{F}(m)) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N_0} f^2(n) \qquad (۱۴.۴)$$

واریانس $\mathbf{F}(m)$ را از منظر دیگری نیز می‌توان بررسی کرد. با توجه به i.i.d. بودن متغیرهای $\mathbf{F}^2(m)$، از قانون قوی اعداد بزرگ نتیجه می‌گیریم که میانگین متغیرهای $\mathbf{F}^2(i)$، $i \in \mathbb{N}$ با احتمال مساوی ۱ به مقدار واریانس موجود در رابطه ۱۴.۴ همگراست:

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\mathbf{F}^2(i) = var(\mathbf{F}(m)) \qquad (۱۵.۴)$$

با جایگذاری مقدار $var(\mathbf{F}(m))$ در رابطه بالا به رابطه‌ای مشابه با رابطه پارسوال در آنالیز فوریه [۷] می‌رسیم:

$$\boxed{\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\mathbf{F}^2(m) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N_0} f^2(n)} \qquad (۱۶.۴)$$

فرمول بالا بیانگر رابطه *توان* فرایند تصادفی $\mathbf{F}(m)$ با *انرژی* سیگنال $f(n)$ است.

۵ دو خاصیت کلی تبدیل

در این بخش به دو خاصیت مربوط به نمایش توابع بر حسب میانگین وزن‌دار فرایندهای تصادفی می‌پردازیم.

۱.۵ خاصیت خطی بودن

دو تابع $f(n)$ و $g(n)$ را با تبدیل‌های $\mathbf{F}(m)$ و $\mathbf{G}(m)$ در نظر می‌گیریم. از نماد $\leftrightarrow$ برای نشان دادن تناظر بین یک تابع و تبدیل آن استفاده می‌کنیم. بنابراین:

$$f(n) \leftrightarrow \mathbf{F}(m) \tag{۱.۵}$$

$$g(n) \leftrightarrow \mathbf{G}(m) \tag{۲.۵}$$

گزاره ۱.۵. *اگر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ دو ثابت اختیاری باشند، آنگاه:*

$$\alpha f(n) + \beta g(n) \leftrightarrow \alpha \mathbf{F}(m) + \beta \mathbf{G}(m) \tag{۳.۵}$$

اثبات. اگر تبدیل تابع $h(n) \triangleq \alpha f(n) + \beta g(n)$ را با $\mathbf{H}(m)$ نمایش دهیم، آنگاه با نوشتن رابطه تحلیل ۲.۳ برای $h(n)$، خاصیت خطی بودن بدست می‌آید:

$$\mathbf{H}(m) = \frac{۱}{\sigma^۲} \sum_{n=۰}^{N_۰} (\alpha f(n) + \beta g(n))(\mathbf{v}(n,m)) \tag{۴.۵}$$

$$= \frac{۱}{\sigma^۲} \sum_{n=۰}^{N_۰} \alpha f(n) \mathbf{v}(n,m) + \frac{۱}{\sigma^۲} \sum_{n=۰}^{N_۰} \beta g(n) \mathbf{v}(n,m) \tag{۵.۵}$$

$$= \alpha \mathbf{F}(m) + \beta \mathbf{G}(m) \tag{۶.۵}$$

□

۲.۵ خاصیت همبستگی

دو تابع $f(n)$ و $g(n)$، $۰ \leq n \leq N_۰$ را با تبدیل‌های متناظرشان در نظر می‌گیریم:

$$f(n) \leftrightarrow \mathbf{F}(m) \tag{۷.۵}$$

$$g(n) \leftrightarrow \mathbf{G}(m) \tag{۸.۵}$$

گزاره ۲.۵. *همبستگی آماری میان $\mathbf{F}(m)$ و $\mathbf{G}(m)$، با احتمال مساوی ۱ با همبستگی دو تابع $f(n)$ و $g(n)$ با ضریب $\frac{۱}{\sigma^۲}$ برابر است:*

$$\lim_{M\to\infty} \frac{۱}{M} \sum_{m=۱}^{M} \mathbf{F}(m)\mathbf{G}(m) = \frac{۱}{\sigma^۲} \sum_{n=۰}^{N_۰} f(n)g(n) \tag{۹.۵}$$

اثبات. از سمت چپ رابطه بالا شروع می‌کنیم:

$$\lim_{M\to\infty} \frac{۱}{M} \sum_{m=۱}^{M} \mathbf{F}(m)\mathbf{G}(m) \tag{۱۰.۵}$$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{۱}{M} \sum_{m=۱}^{M} \left(\frac{۱}{\sigma^۲} \sum_{i=\circ}^{N_\circ} f(i)\mathbf{v}(i,m) \right) \left(\frac{۱}{\sigma^۲} \sum_{k=\circ}^{N_\circ} g(k)\mathbf{v}(k,m) \right) \tag{۱۱.۵}$$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{۱}{M\sigma^۴} \sum_{m=۱}^{M} \sum_{i=\circ}^{N_\circ} \sum_{k=\circ}^{N_\circ} f(i)g(k)\mathbf{v}(i,m)\mathbf{v}(k,m) \tag{۱۲.۵}$$

$$= \frac{۱}{\sigma^۴} \sum_{i=\circ}^{N_\circ} \sum_{k=\circ}^{N_\circ} f(i)g(k) \left(\lim_{M\to\infty} \frac{۱}{M} \sum_{m=۱}^{M} \mathbf{v}(i,m)\mathbf{v}(k,m) \right) \tag{۱۳.۵}$$

از رابطه ۱۱.۲ استفاده می‌کنیم:

$$= \frac{۱}{\sigma^۴} \sum_{i=\circ}^{N_\circ} \sum_{k=\circ}^{N_\circ} f(i)g(k)(\sigma^۲\delta(i-k)) \tag{۱۴.۵}$$

$$= \frac{۱}{\sigma^۲} \sum_{i=\circ}^{N_\circ} f(i) \sum_{k=\circ}^{N_\circ} g(k)\delta(i-k) \tag{۱۵.۵}$$

$$= \frac{۱}{\sigma^۲} \sum_{i=\circ}^{N_\circ} f(i)g(i). \tag{۱۶.۵}$$

□

نتیجه ۳.۵. *اگر دو تابع ناهمبسته باشند، آنگاه تبدیل‌های آن‌ها نیز ناهمبسته هستند و برعکس:*

$$\sum_{i=\circ}^{N_\circ} f(i)g(i) = \circ \ \Leftrightarrow \ \lim_{M\to\infty} \frac{۱}{M} \sum_{m=۱}^{M} \mathbf{F}(m)\mathbf{G}(m) = \circ. \tag{۱۷.۵}$$

۶ شبیه‌سازی و مقایسه

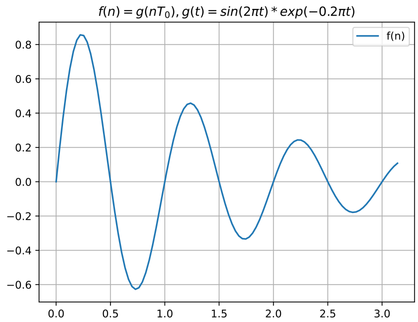
در این بخش یک نمونه شبیه‌سازی با استفاده از پایتون پیاده‌سازی خواهد شد. همچنین مقایسه‌ای با تقریب سری فوریه صورت خواهد گرفت.

۱.۶ شبیه‌سازی

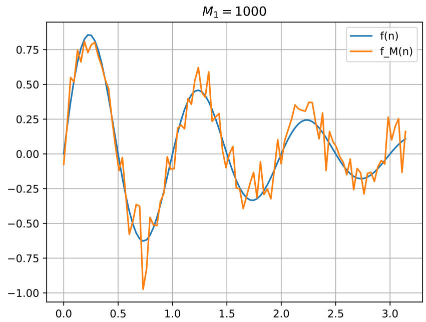
در این شبیه‌سازی تابع $f(n)$ را بصورت نمونه‌های تابع $g(t) = \exp(-\circ/۲\pi t)\sin(۲\pi t)$، $\circ \le t \le \pi$ در نظر می‌گیریم:

$$f(n) = g(nT_\circ) \ , \ \ \circ \le n \le ۹۹ \ , \ \ T_\circ = \frac{\pi}{۹۹} \tag{۱.۶}$$

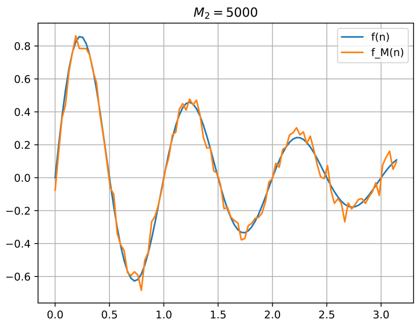
برای متغیرهای تصادفی $\mathbf{v}(n,m)$ توزیع بتا با پارامترهای $\alpha = ۱$ و $\beta = ۳$ انتخاب شده است. علاوه بر این به منظور ارضای شرط (ب) که صفر بودن میانگین این متغیرها را بیان می‌کند، با کسر کردن مقدار میانگین توزیع بتا از این متغیرها، میانگین آن‌ها را به صفر رسانده‌ایم. ضرایب $\mathbf{F}(m)$ با استفاده از رابطه تحلیل ۲.۳ محاسبه شده‌اند. تابع $f(n)$ با استفاده از میانگین جزئی $\mathbf{f}_M(n)$ تعریف شده با رابطه ۱۶.۳ به ازای سه مقدار مختلف $M_۱ = ۱۰۰۰$، $M_۲ = ۵۰۰۰$ و $M_۳ = ۲۰۰۰۰$ تقریب زده شده است. در شکل ۱آ نمودار تابع $f(n)$ و در شکل‌های ۱ب تا ۱د نمودار $f(n)$ به همراه تقریب‌های آن برای سه مقدار مختلف M رسم شده است. همانطور که انتظار می‌رفت، با افزایش مقدار M، دقت تقریب $\mathbf{f}_M(n)$ به تابع $f(n)$ بیشتر می‌شود.



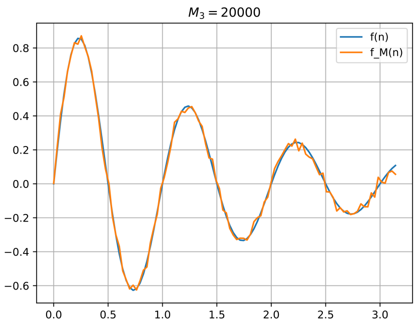
(آ) نمودار تابع



(ب) تقریب تابع به ازای $M = ۱۰۰۰$



(ج) تقریب تابع به ازای $M = ۵۰۰۰$



(د) تقریب تابع به ازای $M = ۲۰۰۰۰$

شکل ۱: تقریب یک تابع بوسیله فرایندهای تصادفی نویز سفید گسسته به ازای چند مقدار مختلف M

در جدول ۱ مقادیر میانگین تجربی خطا با ۵۰۰ بار اجرای شبیه‌سازی‌ها بدست آمده و با مقداری که از فرمول ۶۱.۳ برای میانگین خطا بدست می‌آید، مقایسه شده‌اند.

جدول ۱: خطای تقریب تابع به ازای سه مقدار مختلف M

تعداد فرایندهای تصادفی بکار رفته برای نمایش تابع	میانگین خطا با استفاده از فرمول ۶۱.۳	میانگین خطا در ۵۰۰ بار اجرای شبیه‌سازی
$M_۱ = ۱۰۰۰$	۱/۲۲۸۸	۱/۲۲۰۰
$M_۲ = ۵۰۰۰$	۰/۲۴۵۸	۰/۲۴۶۲
$M_۳ = ۲۰۰۰۰$	۰/۰۶۱۴	۰/۰۶۱۲

۲.۶ مقایسه با سری فوریه

این مقایسه نشان‌دهنده‌ی تفاوت‌های اساسی این دو تقریب است و به منظور ایجاد شناخت بیشتر از روش ارائه شده در این مقاله ارائه می‌شود.
سری فوریه اساسا برای توابع پیوسته به کار می‌رود و روش ارائه شده در این مقاله مختص توابع با دامنه اعداد صحیح است. اما در شبیه‌سازی رایانه‌ای، توابع پیوسته طی فرایند نمونه‌برداری به توابع با دامنه اعداد صحیح تبدیل می‌شوند. لذا سری فوریه نیز طی فرایند نمونه‌برداری به حالت گسسته مبدل می‌شود.
طی شبیه‌سازی‌هایی که صورت گرفت، سرعت میل تقریب سری فوریه به تابع اصلی، بسیار سریع‌تر از روش ارائه شده در این مقاله است. سری فوریه ناظر به تقریب دقیق تابع است و روش ارائه شده در این مقاله نشان‌دهنده رویکردی آماری برای تقریب یک تابع است. در جدول شماره ۲ نتایج محاسبات مربوط به تقریب تابع بخش قبلی برای هر دو روش یاد شده ارائه شده است.

جدول ۲: مقایسه با سری فوریه

تعداد بردارهای پایه بکار رفته برای نمایش تابع	میانگین خطا با استفاده از فرمول ۶۱.۳	خطای سری فوریه
$M_{۱} = ۱۰$	۱۲۲٫۸۸	۰٫۰۰۰۶۹۵
$M_{۲} = ۳۰$	۴۰٫۹۶	۰٫۰۰۰۱۳۲
$M_{۳} = ۶۰$	۲۰٫۴۸	۰٫۰۰۰۱۱۰

۷ نتیجه‌گیری

در این مقاله یک ساختار ریاضی مبتنی بر نمایش توابع بر حسب فرایندهای تصادفی نوفه سفید ارائه شد. در این نحوه نمایش، به هر تابع معین یک فرایند تصادفی با خصوصیات آماری مشخص نسبت می‌دهیم که این فرایند تصادفی را تبدیل آن تابع نامیدیم. با فرض استفاده از تعداد محدودی فرایند تصادفی، میانگین خطای تقریب حاصل به تابع معین اولیه را بدست آوردیم و برخی خواص مربوط به این تبدیل از جمله خواص خطی بودن و همبستگی را ارائه نمودیم.
این نحوه نمایش پلی میان فرایندهای تصادفی و توابع با تعریف معین برقرار می‌کند. در واقع یک تابع معین را بر حسب میانگین ترکیب خطی توابع تصادفی نوشته‌ایم و نشان دادیم که هر فرایند تصادفی نقشی در تشکیل یک تابع معین دارد که با ضریب مربوطه‌اش مشخص می‌شود.
به عنوان پیشنهاد می‌توان نمایش توابع پیوسته بر حسب فرایندهای تصادفی پیوسته را مطرح نمود. این نمایش نیز دارای خواص و روابطی مشابه با آنچه که در اینجا برای حالت گسسته بدست آوردیم خواهد بود. همچنین فرض ما در اینجا این بود که توابع مورد نظر از نوع معین هستند، ولی می‌توان نمایشی نیز برای توابع تصادفی بر حسب میانگین وزن‌دار فرایندهای تصادفی بدست آورد.

مراجع

[1] Whittaker, E. T., Watson, G. N., 2021. A Course of Modern Analysis. *Cambridge University Press*

[2] Simmons, G. F., 2017. Differential Equations with Applications and Historical Notes. *CRC Press*

[3] Igelnik, B., Pao, Y. H., 1995. Stochastic choice of basis functions in adaptive function approximation and the functional-link net. *IEEE Trans. Neural Networks, 6*, pp.1320-1329. doi:10.1109/72.471375

[4] Rahimi, A., Recht, B., 2008. Uniform Approximation of Functions with Random Bases. *IEEE 46th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing*, pp.555-561. doi:10.1109/ALLERTON.2008.4797607

[5] Papoulis, A., Pillai, S. U., 2002. Probability, Random Variables and Stochastic Processes. *McGrawHill*

[6] Pishro Nik, H., 2014. Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes. *Kappa Research, LLC*, available at https://www.probabilitycourse.com

[7] Kreyszig, E., 1999. Advanced Engineering Mathematics. *Wiley*