Mathematical Research
Year 2025, Volume 11, Issue 3, pp. 59–72

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
DOI: xxxx

Optimal preventive maintenance for three-state systems

Somayeh Ashrafi[(1)] and Somayeh Zarezadeh[(2)] [1]

[(1)] Department of Statistics, Faculty of Mathematics and Statistics, University of Isfahan, Isfahan, Iran
[(2)] Department of Statistics, College of Science, Shiraz University, Shiraz, Iran

Received:13 March 2024 Accepted:2 November 2025 Published online:17 December 2025

Abstract: In this paper, we consider a system with three states, complete performance, partial performance, and complete failure. It is also assumed that the system has n binary components. For such a system, by considering different conditions on the system states, we compute the conditional mean lifetimes of the system. Using the conditional mean lifetimes, a preventive maintenance model is proposed and the mean cost per unit of time is obtained. The aim is to calculate the optimal time to perform preventive maintenance that minimizes the mean cost per unit of time. Finally, a numerical example is presented to show the application of the proposed model.

Keywords: Bivariate signature, Reliability, Conditional mean lifetime, Emergency repair, Mean cost function.

[1]Corresponding author
E-mail addresses: (Somayeh Ashrafi) s.ashrafi@sci.ui.ac.ir, (Somayeh Zarezadeh) s.zarezadeh@shirazu.ac.ir

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۲۸۸
DOI: xxxx

پژوهش‌های ریاضی

سال ۱۴۰۴، دوره۱۱، شماره۳، ص ۵۹–۷۲

دانشگاه خوارزمی

مدل تعمیر و نگهداری پیشگیرانه بهینه برای سیستم‌های سه وضعیتی

سمیه اشرفی (۱) و سمیه زارع زاده (۲) [۱]

(۱) گروه آمار، دانشکدهٔ ریاضی و آمار، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران
(۲) بخش آمار، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۲۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۸/۱۱ تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۹/۲۶

چکیده: در این مقاله یک سیستم سه وضعیتی با وضعیت‌های عملکردهای کامل، جزئی و شکست کامل در نظر گرفته می‌شود. همچنین فرض می‌شود که سیستم دارای n مؤلفه دو وضعیتی است. با در نظر گرفتن شرایط مختلف روی وضعیت‌های سیستم، ابتدا توابع میانگین عمر شرطی محاسبه می‌شود. سپس با استفاده از توابع میانگین عمر شرطی، یک مدل تعمیر و نگهداری پیشگیرانه برای سیستم پیشنهاد و تابع میانگین هزینه در واحد زمان برای آن محاسبه می‌شود. هدف از ارائه مدل پیشنهادی، محاسبه زمان بهینه برای انجام تعمیر پیشگیرانه است که متوسط هزینه در واحد زمان را کمینه می‌کند. در نهایت، برای نشان دادن کاربردی از مدل پیشنهادی یک مثال عددی ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: علامت دو بُعدی، قابلیت اعتماد، میانگین عمر شرطی، تعمیر فوری، تابع متوسط هزینه.

۱ مقدمه

در بسیاری از مطالعاتی که تاکنون در زمینه سیستم‌ها در قلمرو قابلیت اعتماد انجام شده است برای سیستم و مؤلفه‌های آن دو وضعیت در نظر گرفته شده است. در حالی که در دنیای واقعی برای بسیاری از سیستم‌ها مانند سیستم‌های انتقال نفت، سیستم‌های مولد برق و ... بر حسب وضعیت عملکرد سیستم، بیش از دو وضعیت در نظر گرفته می‌شود. این چنین سیستم‌هایی را "سیستم‌های چند وضعیتی [۲]" می‌نامند. بر اساس تعریف، یک سیستم چند وضعیتی سیستمی است که دارای چندین وضعیت عملکرد $(M = 0, 1, \ldots, m)$ است که در آن $M = m$ بیانگر عملکرد کامل و $M = 0$ بیانگر شکست کامل است و وضعیت‌های بین آن نشان دهنده عملکردهای جزئی برای

---

[۱] نویسنده مسئول مقاله
(Somayeh Ashrafi) s.ashrafi@sci.ui.ac.ir, (Somayeh Zarezadeh) s.zarezadeh@shirazu.ac.ir

[2] Multi-State Systems

سیستم هستند. سیستم‌های چند وضعیتی در سال‌های اخیر از منظرهای مختلف توسط بسیاری از نویسندگان مورد بررسی قرار گرفته‌اند. برای مطالعه بیشتر در مورد سیستم‌های چند وضعیتی و کاربردهای آن در زمینه‌های مختلف به [۱] و [۲] مراجعه کنید. یک رویکرد مهم در مطالعه و بررسی قابلیت اعتماد، ویژگی‌های سالخوردگی و تصادفی سیستم‌های چند وضعیتی استفاده از مفهومی به نام "علامت چند بُعدی [۱]" است. این مفهوم اولین بار توسط گرتبخ و اشپانگین [۳] معرفی شد. پس از آن برخی نویسندگان به مطالعه سیستم‌های چند وضعیتی بر اساس مفهوم علامت چند بُعدی پرداختند. برای مثال اشرفی و اسدی [۴] به مطالعه ویژگی‌های تصادفی و وابستگی برای سیستم‌های سه وضعیتی پرداختند. اشرفی و اسدی [۵] ویژگی‌های تصادفی را برای تعداد مؤلفه‌های شکست‌خورده در یک سیستم سه وضعیتی مورد مطالعه قرار دادند.

هنگامی که یک سیستم مأموریت خود را در طول زمان تکمیل می‌کند، خرابی ناگهانی سیستم می‌تواند هزینه‌های غیرمنتظره‌ای را برای اپراتورهای سیستم به همراه داشته باشد. بنابراین، انجام برخی فعالیت‌های تعمیر و نگهداری بهینه روی سیستم یا مؤلفه‌های آن، برای اجتناب از خرابی ناگهانی سیستم امری ضروری است. بر این اساس، در سال‌های اخیر مطالعات بسیاری به پیشنهاد انواع سناریوهای مختلف در مورد سیاست‌های تعمیر و نگهداری سیستم‌ها اختصاص یافته است. "تعمیر و نگهداری پیشگیرانه [۲]" (PM) یکی از انواع مهم و قابل توجه سیاست‌های نگهداری است. هدف سیاست تعمیر و نگهداری پیشگیرانه، انجام تعمیر برنامه‌ریزی‌شده برای مراقبت و حفظ سیستم از خرابی ناگهانی یا تدریجی است. در سیاست تعمیر و نگهداری پیشگیرانه، یک مدل سیستماتیک برای بازرسی سیستم در زمان‌های از پیش تعیین‌شده برای رفع و اصلاح خرابی‌های اولیه ارائه می‌شود. در سال‌های اخیر مطالعات بسیاری در زمینه مدل‌های تعمیر و نگهداری پیشگیرانه برای سیستم‌های دو وضعیتی پیچیده متشکل از چند مؤلفه انجام شده است. برای مثال فینکلشتاین و گرتبخ [۶] برای سیستم‌های پیچیده متشکل از چند مؤلفه که در معرض شوک‌های موثر قرار دارند و در اثر هر شوک دقیقاً یک مؤلفه از کار می‌افتد مدل‌های تعمیر و نگهداری بهینه را مورد بررسی قرار دادند. زارع‌زاده و اشرفی [۷] برخی مدل‌های تعمیر و نگهداری بهینه برای سیستم‌های در معرض شوک که در اثر هر شوک تعدادی مؤلفه ممکن است از کار بیافتد را پیشنهاد کردند. زارع‌زاده و اسدی [۸] مدل‌های تعمیر و نگهداری پیشگیرانه برای سیستم‌های منسجمی که در معرض چند نوع شوک قرار دارند، ارائه کردند. اریلماز [۹] مدل تعمیر و نگهداری پیشگیرانه بر اساس جایگزینی سن را برای سیستم‌های منسجم مورد مطالعه قرار داد. اریلماز [۱۰] مدل تعمیر و نگهداری پیشگیرانه برای سیستم‌های منسجم زمان‌گسسته را ارائه کرد. اسدی و همکاران [۱۱] مروری بر برخی مدل‌های تعمیر و نگهداری سیستم که مبتنی بر مفهوم علامت هستند، داشتند. مطالعاتی که تاکنون در زمینه تعمیر و نگهداری سیستم‌های چند وضعیتی انجام شده است عمدتاً در مورد سیستم‌های تک مؤلفه‌ای است. شو و همکاران [۱۲] برخی مدل‌های تعمیر و نگهداری را برای یک سیستم چند وضعیتی تک مؤلفه‌ای مورد مطالعه قرار دادند. فینکشتاین و اریلماز [۱۳] برای سیستم چند وضعیتی یک مؤلفه‌ای با در نظر گرفتن هزینه‌های وابسته به وضعیت سیستم، یک مدل تعمیر و نگهداری ارائه کردند. در سال‌های اخیر برخی تحقیقات در زمینه مدل‌های تعمیر و نگهداری برای سیستم‌های چند وضعیتی پیچیده متشکل از چند مؤلفه انجام شده است. فینکشتاین و گرتبخ [۱۴] برای سیستم‌های چند وضعیتی متشکل از مؤلفه‌های دو وضعیتی که در معرض شوک قرار دارند مدل تعمیر و نگهداری بهینه را ارائه کردند. اشرفی و اسدی [۵] یک سیاست جایگزینی بهینه سنی را برای سیستم‌های سه وضعیتی مورد مطالعه قرار دادند. در سیاست مورد بررسی، اگر در زمان بازرسی، سیستم در وضعیت عملکرد جزئی باشد فقط مولفه‌های ازکارافتاده با مولفه‌های نو جایگزین می‌شوند و اگر سیستم قبل از زمان بازرسی شکست خورده باشد، همه مولفه‌ها با مولفه‌های نو جایگزین می‌شوند. کوترس [۱۵] یک مدل تعمیر و نگهداری پیشگیرانه برای سیستم چند وضعیتی موازی متشکل از دو مؤلفه را مورد بررسی قرار داد. در این مقاله یک سیستم سه وضعیتی پیچیده متشکل از مؤلفه‌های دو وضعیتی در نظر می‌گیریم. برای این سیستم، براساس مفهوم علامت دو بُعدی یک مدل تعمیر و نگهداری بهینه ارائه می‌شود. در مدل پیشنهادی، در زمان بازرسی از قبل مشخص شده، بر اساس وضعیت سیستم، عمل نگهداری پیشگیرانه را انجام می‌دهیم یا آن را به زمان دیگری به تعویق می‌اندازیم. با در نظر گرفتن برخی هزینه‌ها مانند هزینه جایگزینی مولفه‌های ازکارافتاده با مولفه نو، هزینه تعمیر مولفه‌های ازکارنیافتاده، هزینه

[1] Multi-Dimensional Signature

[2] Preventive Maintenance

انجام نگهداری پیشگیرانه، هزینه تعمیر فوری و در نظر گرفتن پاداش بودن در هر یک از وضعیت‌های عملکردهای کامل و جزئی، متوسط هزینه در واحد زمان را محاسبه می‌کنیم و زمان‌های بهینه برای انجام نگهداری پیشگیرانه که متوسط هزینه در واحد زمان را کمینه می‌کنند، به‌دست می‌آوریم.

بخش‌های این مقاله به شرح زیر تنظیم شده است: ابتدا در بخش ۲، مفهوم علامت دو بُعدی یادآوری می‌شود. سپس تابع قابلیت اعتماد توأم و برخی توابع احتمال توأم برای طول عمر سیستم در وضعیت عملکرد کامل و طول عمر سیستم، که در بخش‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد، ارائه می‌شود. در بخش ۳، برخی توابع میانگین عمر شرطی برای طول عمر سیستم در وضعیت عملکرد کامل و طول عمر سیستم محاسبه می‌گردد. در بخش ۴، یک مدل تعمیر و نگهداری پیشگیرانه برای سیستم پیشنهاد می‌شود. در مدل پیشنهادی سیستم ابتدا در زمان از قبل تعیین شده‌ای مورد بازرسی قرار می‌گیرد. اگر در این زمان سیستم در وضعیت عملکرد کامل باشد انجام تعمیر و نگهداری پیشگیرانه را به زمان از قبل تعیین شده دیگری، به تعویق می‌اندازیم. اگر در زمان بازرسی، سیستم در وضعیت عملکرد جزئی باشد تعمیر و نگهداری پیشگیرانه را انجام می‌دهیم. فرض بر این است در زمان شکست سیستم یا زمان انجام تعمیر و نگهداری پیشگیرانه هر کدام که زودتر اتفاق بیافتد، هر مؤلفه ازکارافتاده با یک مؤلفه جدید جایگزین می‌شود و هر مؤلفه ازکارنیافتاده تعمیر می‌شود که به ترتیب هزینه‌های c_r و c_m را تحمیل می‌کنند. علاوه بر این، به دلیل شکست تصادفی سیستم، هزینه‌ای به دلیل "تعمیر فوری[1] " (ER) به اندازه c_{ER} متحمل می‌شود و اقدام PM نیز دارای هزینه c_{PM} است. همچنین فرض می‌کنیم R_2 و R_1 به ترتیب پاداش به ازای هر واحد زمان که سیستم در وضعیت عملکرد کامل و در وضعیت عملکرد جزئی است، باشد. با توجه به این هزینه‌ها متوسط هزینه در واحد زمان را محاسبه کرده و زمان‌های بهینه برای انجام تعمیر پیشگیرانه که متوسط هزینه در واحد زمان را کمینه می‌کنند، به‌دست می‌آوریم. در بخش ۵، یک مثال عددی برای نشان دادن کاربرد مدل ارائه شده، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نهایت در بخش ۶، جمع‌بندی نتایج مقاله بیان می‌شوند.

۲ تعاریف مقدماتی

یک سیستم سه وضعیتی "تک مرحله‌ای[2] " متشکل از n مؤلفه دو وضعیتی را در نظر بگیرید. یک سیستم را تک مرحله‌ای می‌نامند اگر خرابی یک مؤلفه وضعیت سیستم را تغییر ندهد یا آن را یک واحد تغییر دهد. فرض کنید که سیستم می‌تواند در سه وضعیت عملکرد کامل $(M=2)$، عملکرد جزئی $(M=1)$ و شکست کامل $(M=0)$ باشد. در نظر بگیرید $X_1,\dots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع مشترک F باشد که طول عمر مؤلفه‌ها را نشان می‌دهد و $X_{1:n},\dots,X_{n:n}$ بیانگر طول عمر مرتب شده مؤلفه‌ها است. فرض کنید سیستم در زمان $t=0$ در وضعیت عملکرد کامل شروع به کار کند. همچنین فرض کنید T_2 و T به ترتیب بیانگر طول عمر سیستم در وضعیت عملکرد کامل و طول عمر سیستم باشد. گرتبخ و اشپانگین [۳] مفهوم علامت دو بُعدی را به‌صورت زیر تعریف کردند:

$$s_{i,j}=P(T_2=X_{i:n},T=X_{j:n}),\qquad i=1,\dots,n,\ j=i+1,\dots,n.$$

علامت دو بُعدی $(s_{i,j})$ به توزیع طول عمر اجزا بستگی نداشته و فقط به ساختار سیستم وابسته است. در واقع، می‌توان نشان داد که برای تمام مقادیر i و j، $s_{i,j}=n_{i,j}/n!$ که در آن $n_{i,j}$ تعداد حالت‌هایی است که خرابی مؤلفه‌های iام و jام باعث تغییر وضعیت سیستم به‌ترتیب از $M=2$ به $M=1$ و از $M=1$ به $M=0$ می‌شود. در واقع $s_{i,j}$ احتمال این است که مؤلفه‌هایی با طول عمرهای $X_{i:n}$ و $X_{j:n}$ به‌ترتیب باعث انتقال از $M=2$ به $M=1$ و از $M=1$ به $M=0$ شوند. با توجه به این که مفهوم علامت دو بُعدی $(s_{i,j})$ به توزیع طول عمر مؤلفه‌ها بستگی ندارد، گرتبخ و اشپانگین[۳] نشان دادند که تابع قابلیت اعتماد توأم T_2 و T به‌صورت زیر به‌دست

[1] Emergency Repair
[2] Single Step Systems

می‌آید:

$$P(T_۲ > t_۲, T > t) = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=i+۱}^{n} s_{i,j} P\left(X_{i:n} > t_۲, X_{j:n} > t\right), \qquad t_۲ < t, \tag{۱.۲}$$

که در آن

$$P\left(X_{i:n} > t_۲, X_{j:n} > t\right) = \sum_{k=۰}^{i-۱} \sum_{l=k}^{j-۱} H\left(t_۲, t; k, l, n\right), \qquad t_۲ < t,$$

و

$$H(t_۲, t; k, l, n) = \frac{n!}{k!(l-k)!(n-l)!} F^k(t_۲)(F(t) - F(t_۲))^{l-k} \bar{F}^{n-l}(t). \tag{۲.۲}$$

اگر قرار دهیم:

$$s_i^{(۱)} = \sum_{j=i+۱}^{n} s_{i,j}, \quad s_j^{(۲)} = \sum_{i=۱}^{j-۱} s_{i,j},$$

آنگاه توابع قابلیت اعتماد کناری $T_۲$ و T به‌صورت

$$P\left(T_۲ > t\right) = \sum_{i=۱}^{n} s_i^{(۱)} P(X_{i:n} > t), \qquad P\left(T > t\right) = \sum_{j=۱}^{n} s_j^{(۲)} P(X_{j:n} > t), \tag{۳.۲}$$

است. با استفاده از قانون احتمال کل برای $t_۲ < t$ داریم:

$$\begin{aligned} P\left(T_۲ < t_۲, T < t\right) &= \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=i+۱}^{n} P\left(T_۲ < t_۲, T < t | T_۲ = X_{i:n}, T = X_{j:n}\right) P\left(T_۲ = X_{i:n}, T = X_{j:n}\right) \\ &= \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=i+۱}^{n} s_{i,j} P\left(X_{i:n} < t_۲, X_{j:n} < t | T_۲ = X_{i:n}, T = X_{j:n}\right) \\ &= \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=i+۱}^{n} s_{i,j} P(X_{i:n} < t_۲, X_{j:n} < t), \end{aligned} \tag{۴.۲}$$

که در آن تساوی دوم به این دلیل برقرار است که پیشامد $\{T_۲ = X_{i:n}, T = X_{j:n}\}$ تنها به ساختار سیستم بستگی دارد و به توزیع طول عمر مولفه‌ها بستگی ندارد و بنابراین از پیشامد $\{X_{i:n} < t_۲, X_{j:n} < t\}$ که به توزیع طول عمر مولفه‌ها بستگی دارد، مستقل می‌باشد. به صورت مشابه می‌توان نشان داد که برای $t_۲ < t$،

$$P\left(T_۲ > t_۲, T < t\right) = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=i+۱}^{n} s_{i,j} P(X_{i:n} > t_۲, X_{j:n} < t), \tag{۵.۲}$$

$$P\left(T_۲ < t_۲, T > t\right) = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=i+۱}^{n} s_{i,j} P(X_{i:n} < t_۲, X_{j:n} > t), \tag{۶.۲}$$

$$P\left(T_۲ < t < T\right) = \sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=i+۱}^{n} s_{i,j} P(X_{i:n} < t < X_{j:n}), \tag{۷.۲}$$

که در آن برای هر $i<j$ داریم:

$$P\left(X_{i:n}<t_{۲},X_{j:n}<t\right)=\sum_{k=i}^{n}\sum_{l=\max\{j,k\}}^{n}H\left(t_{۲},t;k,l,n\right),$$

$$P\left(X_{i:n}>t_{۲},X_{j:n}<t\right)=\sum_{k=۰}^{i-۱}\sum_{l=j}^{n}H\left(t_{۲},t;k,l,n\right),$$

$$P\left(X_{i:n}<t_{۲},X_{j:n}>t\right)=\sum_{k=i}^{n}\sum_{l=k}^{j-۱}H\left(t_{۲},t;k,l,n\right),$$

$$P\left(X_{i:n}<t<X_{j:n}\right)=\sum_{k=i}^{j-۱}\binom{n}{k}F^{k}\left(t\right)\bar{F}^{n-k}\left(t\right).$$

۳ میانگین عمر شرطی

در ادامه برای سیستم ارائه شده در بخش ۲، برخی توابع میانگین عمرهای شرطی، تحت شرایط مختلف روی وضعیت‌های سیستم ارائه می‌شود. به این منظور، ابتدا در قضیه زیر احتمال شرطی تعداد مؤلفه‌های ازکارافتاده تحت شرایط مختلف روی $T_{۲}$ و T مورد بررسی قرار می‌گیرد.

قضیه ۱.۳. *یک سیستم سه وضعیتی را در نظر بگیرید. فرض کنید $N(T)$ تعداد مؤلفه‌های ازکارافتاده تا زمان شکست سیستم را نشان دهد. آنگاه*

$$P\left(N\left(T\right)=j|T_{۲}>t_{۲},T<t\right)=\frac{\sum_{i=۱}^{j-۱}\sum_{k=۰}^{i-۱}\sum_{l=j}^{n}s_{i,j}H\left(t_{۲},t;k,l,n\right)}{\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=i+۱}^{n}\sum_{k=۰}^{i-۱}\sum_{l=j}^{n}s_{i,j}H\left(t_{۲},t;k,l,n\right)},\quad j=۲,\ldots,n,$$

که در آن $H(t_{۲},t;k,l,n)$ در رابطه (۲.۲) معرفی شد.

اثبات. می‌توان نوشت

$$P\left(N\left(T\right)=j|T_{۲}>t_{۲},T<t\right)=\frac{P\left(T_{۲}>t_{۲},T<t,T=X_{j:n}\right)}{P\left(T_{۲}>t_{۲},T<t\right)}\tag{۱.۳}$$

که در آن صورت کسر در رابطه (۱.۳) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}&P\left(T_{۲}>t_{۲},T<t,T=X_{j:n}\right)\\&=\sum_{i=۱}^{j-۱}P\left(T_{۲}>t_{۲},T<t,T=X_{j:n},T_{۲}=X_{i:n}\right)\\&=\sum_{i=۱}^{j-۱}P\left(T_{۲}=X_{i:n},T=X_{j:n}\right)P\left(X_{i:n}>t_{۲},X_{j:n}<t|T_{۲}=X_{i:n},T=X_{j:n}\right)\\&=\sum_{i=۱}^{j-۱}s_{i,j}P\left(X_{i:n}>t_{۲},X_{j:n}<t\right)\\&=\sum_{i=۱}^{j-۱}\sum_{k=۰}^{i-۱}\sum_{l=j}^{n}s_{i,j}H\left(t_{۲},t;k,l,n\right),\end{aligned}\tag{۲.۳}$$

که در آن تساوی سوم به این دلیل برقرار است که پیشامد $\{T_2 = X_{i:n}, T = X_{j:n}\}$ تنها به ساختار سیستم بستگی دارد و به توزیع طول عمر مولفه‌ها بستگی ندارد و بنابراین از پیشامد $\{X_{i:n} > t_2, X_{j:n} < t\}$ که به توزیع طول عمر مولفه‌ها بستگی دارد، مستقل می‌باشد.

همچنین با توجه به رابطه (۵.۲) مخرج کسر در رابطه (۱.۳) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$P\left(T_2 > t_2, T < t\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} s_{i,j} P\left(X_{i:n} > t_2, X_{j:n} < t\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{k=0}^{i-1}\sum_{l=j}^{n} s_{i,j} H\left(t_2, t; k, l, n\right). \tag{۳.۳}$$

به این ترتیب با جایگذاری روابط (۲.۳) و (۳.۳) در رابطه (۱.۳) برهان کامل می‌شود. □

حال میانگین شرطی طول عمر سیستم در وضعیت عملکرد کامل (T_2) با در نظر گرفتن شرایط مختلف در مورد طول عمر سیستم در وضعیت‌های مختلف به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

I. میانگین طول عمر سیستم در وضعیت عملکرد کامل به‌شرط اینکه در زمان t سیستم ازکارافتاده باشد، به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$E(T_2|T < t) = \int_0^t P\left(T_2 > u|T < t\right) du$$
$$= \int_0^t \left(1 - P\left(T_2 < u|T < t\right)\right) du$$
$$= t - \frac{\int_0^t P\left(T_2 < u, T < t\right) du}{P(T < t)}, \tag{۴.۳}$$

که در آن صورت کسر با استفاده از رابطه (۴.۲) و مخرج کسر با استفاده از رابطه (۳.۲) به‌دست می‌آید.

II. میانگین طول عمر سیستم در وضعیت عملکرد کامل به‌شرط اینکه در زمان t_2 سیستم در وضعیت عملکرد کامل باشد و در زمان t $(t > t_2)$ سیستم کار کند، به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$E\left(T_2|T_2 > t_2, T > t\right) = \int_0^\infty P\left(T_2 > u|T_2 > t_2, T > t\right) du$$
$$= t_2 + \int_{t_2}^\infty P\left(T_2 > u|T_2 > t_2, T > t\right) du$$
$$= t_2 + \frac{\int_{t_2}^t P(T_2 > u, T > t)du + \int_t^\infty P(T_2 > u)du}{P(T_2 > t_2, T > t)}, \tag{۵.۳}$$

که در آن صورت و مخرج کسر با استفاده از روابط (۱.۲) و (۳.۲) به‌دست می‌آیند.

III. میانگین طول عمر سیستم در وضعیت عملکرد کامل به‌شرط اینکه در زمان t_2 سیستم در وضعیت عملکرد کامل باشد و در زمان t $(t > t_2)$ سیستم ازکارافتاده باشد، به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$E\left(T_2|T_2 > t_2, T < t\right) = \int_0^\infty P\left(T_2 > u|T_2 > t_2, T < t\right) du$$
$$= t_2 + \int_{t_2}^t P\left(T_2 > u|T_2 > t_2, T < t\right) du$$
$$= t_2 + \frac{\int_{t_2}^t P(T_2 > u, T < t)du}{P(T_2 > t_2, T < t)}, \tag{۶.۳}$$

که در آن صورت و مخرج کسر با استفاده از رابطه (۵.۲) به‌دست می‌آیند.

IV. میانگین طول عمر سیستم در وضعیت عملکرد کامل به‌شرط اینکه در زمان t سیستم در وضعیت عملکرد جزئی باشد، به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} E\left(T_۲ | T_۲ < t < T\right) &= \int_۰^t P\left(T_۲ > u | T_۲ < t < T\right) du \\ &= t - \frac{\int_۰^t P\left(T_۲ < u, T > t\right) du}{P\left(T_۲ < t < T\right)}, \end{aligned} \tag{۷.۳}$$

که در آن صورت کسر با استفاده از رابطه (۶.۲) و مخرج کسر با استفاده از رابطه (۷.۲) به‌دست می‌آیند.

در ادامه میانگین شرطی طول عمر سیستم (T) با در نظر گرفتن شرایط مختلف در مورد طول عمر سیستم در وضعیت‌های مختلف به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

I. میانگین طول عمر سیستم به‌شرط اینکه در زمان t سیستم ازکارافتاده باشد، به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} E\left(T | T < t\right) &= \int_۰^t P\left(T > u | T < t\right) du \\ &= t - \frac{\int_۰^t P\left(T < u\right) du}{P\left(T < t\right)}, \end{aligned} \tag{۸.۳}$$

که در آن صورت و مخرج کسر با استفاده از رابطه (۳.۲) به‌دست می‌آیند.

II. میانگین طول عمر سیستم به‌شرط اینکه در زمان $t_۲$ سیستم در وضعیت عملکرد کامل باشد و در زمان t $(t > t_۲)$ سیستم کار کند، به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} E\left(T | T_۲ > t_۲, T > t\right) &= \int_۰^\infty P\left(T > u | T_۲ > t_۲, T > t\right) du \\ &= t + \int_t^\infty P\left(T > u | T_۲ > t_۲, T > t\right) du \\ &= t + \frac{\int_t^\infty P(T_۲ > t_۲, T > u) du}{P(T_۲ > t_۲, T > t)}, \end{aligned} \tag{۹.۳}$$

که در آن صورت و مخرج کسر با استفاده از رابطه (۱.۲) به‌دست می‌آیند.

III. میانگین طول عمر سیستم به‌شرط اینکه در زمان $t_۲$ سیستم در وضعیت عملکرد کامل باشد و در زمان t $(t > t_۲)$ ازکار افتاده باشد، به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} E\left(T | T_۲ > t_۲, T < t\right) &= \int_۰^t P\left(T > u | T_۲ > t_۲, T < t\right) du \\ &= t - \int_۰^t P\left(T < u | T_۲ > t_۲, T < t\right) du \\ &= t - \frac{\int_{t_۲}^t P\left(T_۲ > t_۲, T < u\right) du}{P\left(T_۲ > t_۲, T < t\right)}, \end{aligned} \tag{۱۰.۳}$$

که در آن صورت و مخرج کسر با استفاده از رابطه (۵.۲) به‌دست می‌آیند.

IV. میانگین طول عمر سیستم به‌شرط اینکه در زمان t سیستم در وضعیت عملکرد جزئی باشد، به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$E\left(T|T_{۲}<t<T\right)=t+\int_{t}^{\infty}P\left(T>u|T_{۲}<t<T\right)du$$
$$=t+\frac{\int_{t}^{\infty}P\left(T_{۲}<t,T>u\right)du}{P(T_{۲}<t<T)}, \qquad (۱۱.۳)$$

که در آن صورت کسر با استفاده از رابطه (۶.۲) و مخرج کسر با استفاده از رابطه (۷.۲) به‌دست می‌آیند.

۴ مدل تعمیر و نگهداری بهینه

یک سیستم سه وضعیتی تک‌مرحله‌ای متشکل از n مؤلفه دو وضعیتی را در نظر بگیرید. فرض کنید $T_{۲}$ بیانگر طول عمر سیستم در وضعیت عملکرد کامل، $T_{۱}$ بیانگر طول عمر سیستم در وضعیت عملکرد جزئی و $T=T_{۱}+T_{۲}$ بیانگر طول عمر سیستم باشد. همچنین $N(t)$ تعداد مؤلفه‌های ازکارافتاده تا زمان t را نشان دهد. فرض کنید سیستم در زمان $\tau_{۱}$ مورد بازرسی قرار می‌گیرد. اگر سیستم در زمان $\tau_{۱}$ در وضعیت عملکرد کامل باشد هیچ نوع تعمیری روی سیستم انجام نمی‌شود. در این‌صورت انجام تعمیر و نگهداری پیشگیرانه را تا زمان $\tau_{۲}$ به تعویق می‌اندازیم و اگر تا زمان $\tau_{۲}$ سیستم ازکار نیافتاده باشد در زمان $\tau_{۲}$ تعمیر و نگهداری پیشگیرانه روی سیستم انجام می‌شود. از طرف دیگر، اگر در زمان $\tau_{۱}$ سیستم در وضعیت عملکرد جزئی باشد با توجه به اینکه احتمال شکست سیستم بعد از $\tau_{۱}$ در حال افزایش است در زمان $\tau_{۱}$ تعمیر و نگهداری پیشگیرانه روی سیستم انجام می‌شود. اگر در هر زمان قبل از $\tau_{۱}$ یا زمانی بین $\tau_{۱}$ و $\tau_{۲}$ برای اولین بار سیستم ازکار بیافتد تعمیر فوری روی سیستم انجام می‌شود. فرض کنید در زمان انجام تعمیر و نگهداری پیشگیرانه یا تعمیر فوری، مؤلفه‌های ازکارافتاده با مؤلفه‌های نو جایگزین شوند و مؤلفه‌های در حال کار به‌گونه‌ای تعمیر شوند که به‌خوبی یک مؤلفه نو تبدیل شوند. در واقع در این مدل در زمان شکست سیستم یا در زمان انجام تعمیر و نگهداری پیشگیرانه هر کدام که زودتر اتفاق بیافتد (که زمان تجدید است) سیستم به خوبی یک سیستم نو تبدیل می‌شود. در نظر بگیرید که c_r هزینه جایگزینی مؤلفه‌های ازکارافتاده با مؤلفه‌های نو، c_m هزینه تعمیر مؤلفه‌های درحال‌کار، c_{PM} هزینه انجام نگهداری پیشگیرانه و c_{ER} ($c_{ER}<<c_{PM}$) هزینه انجام تعمیر فوری به دلیل شکست ناگهانی سیستم باشد. فرض کنید $R_{۲}$ و $R_{۱}$ ($R_{۲}>>R_{۱}$) به‌ترتیب پاداش به ازای هر واحد زمان که سیستم در وضعیت عملکرد کامل و در وضعیت عملکرد جزئی است، باشد. در ادامه به محاسبه متوسط هزینه در واحد زمان می‌پردازیم. به منظور حالت‌های زیر ممکن است اتفاق بیافتند:

۱. اگر سیستم قبل از $\tau_{۱}$ از کار بیافتد، اریلماز [۹] نشان داد که متوسط تعداد مولفه‌های ازکارافتاده تا زمان شکست سیستم برابر است با

$$\nu_{۱}\left(\tau_{۱}\right)\equiv E\left(N\left(T\right)|T<\tau_{۱}\right)=\frac{\sum_{i=۱}^{n}is_{i}^{(۲)}P\left(X_{i:n}\leq\tau_{۱}\right)}{\sum_{i=۱}^{n}s_{i}^{(۲)}P\left(X_{i:n}\leq\tau_{۱}\right)}.$$

در این صورت متوسط هزینه برای جایگزینی مولفه‌های ازکارافتاده با مولفه نو برابر با $c_r\nu_{۱}(\tau_{۱})$ و متوسط هزینه برای تعمیر مولفه‌های ازکارنیافتاده برابر با $(n-\nu_{۱}(\tau_{۱}))c_m$ است. همچنین هزینه به ازای شکست ناگهانی سیستم c_{ER} است. با توجه به این‌که سیستم به طور متوسط به مدت $E(T_{۲}|T<\tau_{۱})$ واحد زمان در وضعیت عملکرد کامل و به طور متوسط به مدت $E(T-T_{۲}|T<\tau_{۱})$ واحد زمان در وضعیت عملکرد جزئی است، پاداش بودن در وضعیت عملکرد کامل به طور متوسط $R_{۲}E(T_{۲}|T<\tau_{۱})$ و پاداش بودن در وضعیت عملکرد جزئی به طور متوسط $R_{۱}E(T-T_{۲}|T<\tau_{۱})$ است. بنابراین متوسط هزینه به‌صورت زیر است:

$$\xi_{۱}(\tau_{۱})=P(T<\tau_{۱})(c_r\nu_{۱}(\tau_{۱})+(n-\nu_{۱}(\tau_{۱}))c_m$$
$$-(R_{۲}-R_{۱})E(T_{۲}|T<\tau_{۱})-R_{۱}E(T|T<\tau_{۱})+c_{ER}),$$

که در آن $P(T<\tau_۱)$ با استفاده از رابطه (۳.۲)، $E(T_۲|T<\tau_۱)$ با استفاده از رابطه (۴.۳) و $E(T|T<\tau_۱)$ با استفاده از رابطه (۸.۳) به‌دست می‌آیند.

۲. اگر سیستم قبل از زمان $\tau_۱$ ازکار نیافتاده باشد و در زمان $\tau_۱$ در وضعیت عملکرد کامل باشد هیچ نوع تعمیری روی سیستم انجام نمی‌شود. در این‌صورت اگر تا زمان $\tau_۲$ سیستم ازکار نیافتاده باشد در زمان $\tau_۲$ تعمیر و نگهداری پیشگیرانه روی سیستم انجام می‌شود. اشرفی و اسدی [۵] نشان دادند که در چنین شرایطی متوسط تعداد مولفه‌های ازکارافتاده تا زمان $\tau_۲$ برابر است با

$$\begin{aligned}\nu_۲(\tau_۱,\tau_۲)\equiv E\left(N(\tau_۲)\,|T_۲>\tau_۱,T>\tau_۲\right)&=\sum_{j=۰}^{n-۱} jP\left(N(\tau_۲)=j|T_۲>\tau_۱,T>\tau_۲\right)\\&=\frac{\sum_{i=۰}^{n-۲}\sum_{j=i}^{n-۱} j\bar{S}_{i,j}H(\tau_۱,\tau_۲;i,j,n)}{\sum_{i=۰}^{n-۲}\sum_{j=i}^{n-۱}\bar{S}_{i,j}H(\tau_۱,\tau_۲;i,j,n)}\end{aligned}$$

که در آن

$$\bar{S}_{i,j}=\sum_{k=i+۱}^{n}\sum_{l=\max\{k,j\}+۱}^{n} s_{k,l}.$$

در این‌صورت متوسط هزینه به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\xi_۲(\tau_۱,\tau_۲)=&P(T_۲>\tau_۱,T>\tau_۲)(c_r\nu_۲(\tau_۱,\tau_۲)+(n-\nu_۲(\tau_۱,\tau_۲))c_m\\&-(R_۲-R_۱)E(T_۲|T_۲>\tau_۱,T>\tau_۲)-R_۱E(T|T_۲>\tau_۱,T>\tau_۲)+c_{PM}),\end{aligned}$$

که در آن $P(T_۲>\tau_۱,T>\tau_۲)$ با استفاده از رابطه (۱.۲)، $E(T_۲|T_۲>\tau_۱,T>\tau_۲)$ با استفاده از رابطه (۵.۳) و $E(T|T_۲>\tau_۱,T>\tau_۲)$ با استفاده از رابطه (۹.۳) به‌دست می‌آیند.

۳. اگر سیستم در زمان $\tau_۱$ در وضعیت عملکرد کامل باشد هیچ نوع تعمیری روی سیستم انجام نمی‌شود. در این‌صورت اگر قبل از زمان $\tau_۲$ سیستم ازکارافتاده باشد در زمان شکست سیستم تعمیر فوری روی سیستم انجام می‌شود. با استفاده از قضیه ۱.۳، در چنین شرایطی متوسط تعداد مولفه‌های ازکارافتاده تا زمان شکست سیستم برابر است با

$$\begin{aligned}\nu_۳(\tau_۱,\tau_۲)&\equiv E\left(N(T)\,|T_۲>\tau_۱,T<\tau_۲\right)\\&=\sum_{j=۲}^{n} jP\left(N(T)=j|T_۲>\tau_۱,T<\tau_۲\right)\\&=\frac{\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=i+۱}^{n}\sum_{k=۰}^{i-۱}\sum_{l=j}^{n} js_{i,j}H(\tau_۱,\tau_۲;k,l,n)}{\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=i+۱}^{n}\sum_{k=۰}^{i-۱}\sum_{l=j}^{n} s_{i,j}H(\tau_۱,\tau_۲;k,l,n)}\end{aligned}$$

در این‌صورت متوسط هزینه به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\xi_۳(\tau_۱,\tau_۲)=&P(T_۲>\tau_۱,T<\tau_۲)(c_r\nu_۳(\tau_۱,\tau_۲)+(n-\nu_۳(\tau_۱,\tau_۲))\,c_m\\&-(R_۲-R_۱)\,E(T_۲|T_۲>\tau_۱,T<\tau_۲)-R_۱E(T|T_۲>\tau_۱,T<\tau_۲)+c_{ER}),\end{aligned}$$

که در آن $P(T_۲>\tau_۱,T<\tau_۲)$ با استفاده از رابطه (۵.۲)، $E(T_۲|T_۲>\tau_۱,T<\tau_۲)$ با استفاده از رابطه (۶.۳) و $E(T|T_۲>\tau_۱,T<\tau_۲)$ با استفاده از رابطه (۱۰.۳) به‌دست می‌آیند.

۴. اگر سیستم قبل از زمان τ_1 ازکار نیافتاده باشد و در زمان τ_1 در وضعیت عملکرد جزئی باشد در زمان τ_1 تعمیر پیشگیرانه روی سیستم انجام می‌شود. در چنین شرایطی با استفاده از تذکر ۳ در اشرفی و اسدی [۵]، متوسط تعداد مولفه‌های ازکارافتاده تا زمان τ_1 برابر است با

$$\nu_4(\tau_1) \equiv E\left(N(\tau_1)\,|T_2<\tau_1<T\right)=\sum_{i=1}^{n-1} iP\left(N(\tau_1)=i|T_2<\tau_1<T\right)$$
$$=\frac{\sum_{i=1}^{n-1} i\beta_i\binom{n}{i}\phi^i(\tau_1)}{\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i\binom{n}{i}\phi^i(\tau_1)},$$

که در آن $\phi(t)=\frac{F(t)}{\bar{F}(t)}$ و $\beta_i=\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=i+1}^{n} s_{k,l}$.

در این‌صورت متوسط هزینه به‌صورت زیر است:

$$\xi_4(\tau_1)=P(T_2<\tau_1<T)(c_r\nu_4(\tau_1)+(n-\nu_4(\tau_1))c_m$$
$$-(R_2-R_1)E(T_2|T_2<\tau_1<T)-R_1E(T|T_2<\tau_1<T)+c_{PM})$$

که در آن $P(T_2<\tau_1<T)$ با استفاده از رابطه (۷.۲)، $E(T_2|T_2<\tau_1<T)$ با استفاده از رابطه (۷.۳) و $E(T|T_2<\tau_1<T)$ با استفاده از رابطه (۱۱.۳) به‌دست می‌آیند.

با توجه به نتایجی که در بالا به‌دست آمد، متوسط تابع هزینه در یک دوره‌ی تجدید به‌صورت زیر است:

$$\xi(\tau_1,\tau_2)=\xi_1(\tau_1)+\xi_2(\tau_1,\tau_2)+\xi_3(\tau_1,\tau_2)+\xi_4(\tau_1).$$

به‌منظور محاسبه هزینه در واحد زمان، طول یک دوره‌ی تجدید به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathcal{L}(\tau_1,\tau_2)=P(T<\tau_1)E(T|T<\tau_1)+P(T_2>\tau_1,T>\tau_2)\tau_2$$
$$+P(T_2>\tau_1,T<\tau_2)E(T|T_2>\tau_1,T<\tau_2)+P(T_2<\tau_1<T)\tau_1$$
$$=P(T_2<\tau_1)\tau_1+P(T_2>\tau_1)\tau_2-\int_0^{\tau_1}P(T<u)du-\int_{\tau_1}^{\tau_2}P(T_2>\tau_1,T<u)du$$

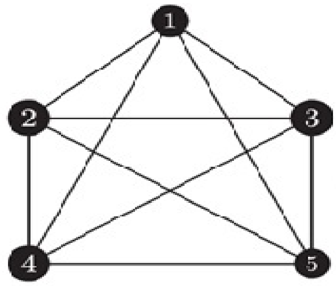
بنابراین متوسط هزینه در واحد زمان به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\eta(\tau_1,\tau_2)=\frac{\xi(\tau_1,\tau_2)}{\mathcal{L}(\tau_1,\tau_2)}$$

در نهایت، هدف محاسبه مقادیر بهینه بردار (τ_1^*,τ_2^*) است که متوسط هزینه در واحد زمان را کمینه می‌کند.

۵ مثال عددی

امروزه شبکه‌ها، مانند شبکه‌های ارتباطی و شبکه‌های کامپیوتری، نقش مهمی در حوزه‌های مختلف علم و فناوری ایفا می‌کنند. از منظر ریاضی، یک شبکه را می‌توان به صورت یک گراف $G(V;E)$ مدل‌سازی کرد، که در آن V نشان‌دهنده مجموعه‌ای از گره‌ها و E نشان‌دهنده مجموعه‌ای از یال‌ها است که جفت گره‌های انتخاب شده را به هم متصل می‌کنند. شبکه ارائه شده در شکل ۱ را در نظر بگیرید. این شبکه دارای ۵ گره و ۱۰ یال است.
وضعیت‌های شبکه به‌صورت $M=0,1,2$ تعریف می‌شوند. اگر همه گره‌ها به هم متصل باشند، شبکه در وضعیت عملکرد کامل $(M=2)$، اگر گره‌ها به دو مجموعه مجزا تقسیم شوند شبکه در وضعیت عملکرد جزئی $(M=1)$ و اگر گره‌ها به حداقل سه مجموعه مجزا از هم تقسیم شوند در وضعیت شکست کامل $(M=0)$

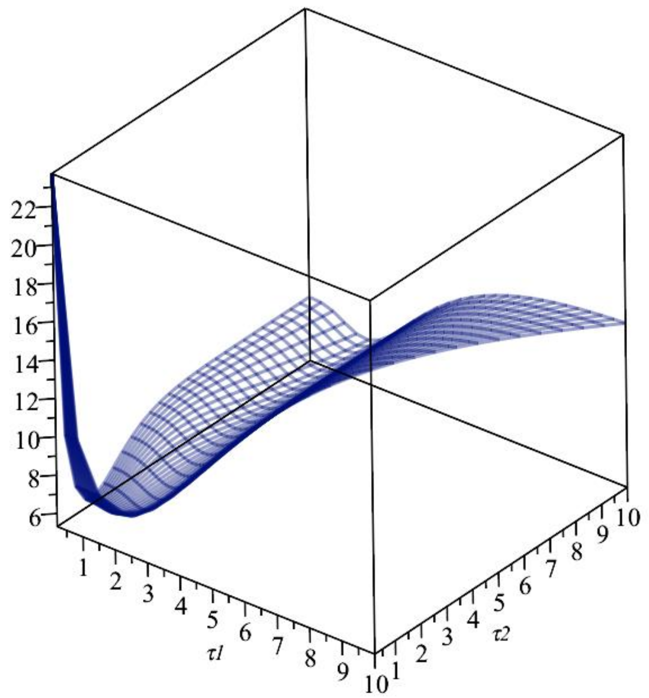


شکل ۱: شبکه با ۵ گره و ۱۰ یال

است. فرض کنید گره‌ها هیچ‌گاه دچار شکست نمی‌شوند و یال‌ها در معرض شکست قرار دارند. گرتبخ و اشپانگین [۱۶] مقادیر غیر صفر علامت دو بُعدی را به‌صورت تخمین زدند:

$$s_{۴,۷} = ۰/۰۰۴۷, \quad s_{۴,۸} = ۰/۰۱۹۴, \quad s_{۵,۷} = ۰/۰۱۹۱, \quad s_{۵,۸} = ۰/۰۷۵۱,$$
$$s_{۶,۷} = ۰/۰۵۹۶, \quad s_{۶,۸} = ۰/۲۲۷, \quad s_{۷,۸} = ۰/۵۹۵۱.$$

فرض کنید طول عمر یال‌ها دارای توزیع نمایی با میانگین ۲ باشد. شکل ۲، نمودار نرخ هزینه $\eta(\tau_۱, \tau_۲)$ در رابطه (؟؟) را به ازای مقادیر $c_m = ۰/۵$، $c_r = ۱$، $c_{PM} = ۴$، $c_{ER} = ۲۰$، $R_۱ = ۱$ و $R_۲ = ۲$ نمایش می‌دهد. با



شکل ۲: نمودار تابع هزینه در مثال ۱

استفاده از نرم‌افزار Maple ، مسئله بهینه سازی تابع $\eta(\tau_۱, \tau_۲)$ در رابطه (؟؟) نسبت به $\tau_۱$ و $\tau_۲$ مورد بررسی قرار گرفت. به این منظور فرض کردیم طول عمر یال‌ها دارای توزیع نمایی با میانگین ۲ است. در جدول ۱، مقادیر بهینه $\tau_۱^*$ و $\tau_۲^*$ و مقدار هزینه تحمیلی به ازای $c_m = ۰/۵$ ، $c_r = ۱$ ، $R_۱ = ۱$ و $R_۲ = ۲$ و مقادیر مختلف c_{PM} و c_{ER} را مشاهده می‌کنید. با توجه به جدول، به ازای مقادیر ثابت c_{ER} با افزایش c_{PM} زمان‌های بهینه $\tau_۱^*$ و $\tau_۲^*$ برای انجام تعمیر پیشگیرانه افزایش می‌یابد یعنی سیستم دیرتر نیاز به انجام تعمیر پیشگیرانه دارد. همچنین به ازای

مقادیر ثابت c_{PM} با افزایش c_{ER} زمان‌های بهینه τ_1^* و τ_2^* برای انجام تعمیر پیشگیرانه کاهش می‌یابد یعنی سیستم زودتر نیاز به انجام تعمیر پیشگیرانه دارد.

جدول ۱: مقادیر بهینه τ_1^* و τ_2^* به ازای $c_m = ۰/۵$ ، $c_r = ۱$ ، $R_1 = ۱$ و $R_2 = ۲$

c_{ER}	c_{PM}	τ_1^*	τ_2^*	$\eta(\tau_1^*, \tau_2^*)$
	۲	۱۲۵۱/۱	۵۲۶۱/۱	۹۱۲۱/۳
۱۶	۴	۲۹۸۳/۱	۸۶۲۴/۱	۰۷۷۱/۵
	۶	۴۲۴۶/۱	۲۲۲۶/۲	۰۱۲۷/۶
	۲	۰۹۶۶/۱	۴۷۱۶/۱	۹۸۲۹/۳
۱۸	۴	۲۶۵۵/۱	۷۷۶۷/۱	۲۰۳۱/۵
	۶	۳۹۶۴/۱	۰۸۳۷/۲	۲۰۵۲/۶
	۲	۰۷۱۳/۱	۴۲۵۹/۱	۰۴۶۳/۴
۲۰	۴	۲۳۵۲/۱	۷۰۷۸/۱	۳۱۴۶/۵
	۶	۳۶۵۲/۱	۹۷۹۲/۱	۳۷۲۳/۶

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله یک سیستم سه وضعیتی با وضعیت‌های عملکردهای کامل، جزئی و شکست کامل در نظر گرفته شد. فرض کردیم که سیستم دارای n مؤلفه دو وضعیتی است. برای این نوع سیستم‌ها یک مدل تعمیر و نگهداری پیشگیرانه ارائه کردیم. به این منظور، ابتدا تابع قابلیت اعتماد توأم و برخی توابع احتمال توأم برای طول عمر سیستم در وضعیت عملکرد کامل و طول عمر سیستم ارائه شد. سپس برخی توابع میانگین عمر شرطی محاسبه گردید. در نهایت یک مدل تعمیر و نگهداری پیشگیرانه برای سیستم ارائه شد. در مدل ارائه شده، فرض کردیم سیستم در زمان τ_1 مورد بازرسی قرار می‌گیرد. اگر در زمان τ_1 سیستم در وضعیت عملکرد کامل باشد و تا زمان τ_2 ازکار نیافتاده باشد، در زمان τ_2 تعمیر و نگهداری پیشگیرانه را انجام می‌دهیم. از طرف دیگر، اگر سیستم در زمان τ_1 در وضعیت عملکرد جزئی باشد، تعمیر و نگهداری پیشگیرانه روی سیستم انجام می‌شود. همچنین اگر سیستم در هر زمان قبل از τ_1 یا زمانی بین τ_1 و τ_2 ازکار بیافتد تعمیر فوری روی سیستم انجام می‌شود. با در نظر گرفتن برخی هزینه‌ها مانند هزینه‌های مربوط به نو کردن مولفه‌های ازکارافتاده، هزینه‌های تعمیر مولفه‌های ازکارنیافتاده، هزینه مربوط به انجام نگهداری پیشگیرانه و تعمیر فوری و در نظر گرفتن پاداش ماندن در هر یک از وضعیت‌های عملکردهای کامل و جزئی، تابع متوسط هزینه در واحد زمان محاسبه گردید. زمان‌های بهینه τ_1 و τ_2 برای انجام تعمیر پیشگیرانه با کمینه کردن تابع متوسط هزینه در واحد زمان، به‌دست آمد. در نهایت با ارائه یک مثال عددی کاربرد مدل ارائه شده مورد مطالعه قرار گرفت.

مراجع

[1] Lisnianski, A., and Levitin, G. 2003. *Multi-state system reliability: assessment, optimization and applications.* World scientific.

[2] Lisnianski, A., Frenkel, I.,and Karagrigoriou, A. (Eds.). 2017. *Recent advances in multi-state systems reliability: Theory and applications.* Springer.

[3] Gertsbakh, I., and Shpungin, Y. 2011. *Network reliability and resilience.* Springer Science & Business Media.

[4] Ashrafi, S., and Asadi, M. 2015. On the stochastic and dependence properties of the three-state systems. *Metrika*, 78(3), pp. 261-281.

[5] Ashrafi, S., and Asadi, M. 2017. The failure probability of components in three-state networks with applications to age replacement policy. *Journal of Applied Probability,* 54(4), pp. 1051-1070.

[6] Finkelstein, M., and Gertsbakh, I. 2015. Time-free preventive maintenance of systems with structures described by signatures. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 31(6), pp. 836-845.

[7] Zarezadeh, S., and Ashrafi, S. 2019. On preventive maintenance of networks with components subject to external shocks. *Reliability Engineering & System Safety*, 191, 106559.

[8] Zarezadeh, S., and Asadi, M. 2019. Coherent systems subject to multiple shocks with applications to preventative maintenance. *Reliability Engineering & System Safety*, 185, pp. 124-132.

[9] Eryilmaz, S. 2020. Age-based preventive maintenance for coherent systems with applications to consecutive-k-out-of-n and related systems. *Reliability Engineering & System Safety*, 204, 107143.

[10] Eryilmaz, S. 2023. Age based preventive replacement policy for discrete time coherent systems with independent and identical components. *Reliability Engineering & System Safety*, 109544.

[11] Asadi, M., Hashemi, M., and Balakrishnan, N. 2023. An overview of some classical models and discussion of the signature-based models of preventive maintenance. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 39(1), pp. 4-53.

[12] Sheu, S. H., Chang, C. C., Chen, Y. L., and Zhang, Z. G. 2015. Optimal preventive maintenance and repair policies for multi-state systems. *Reliability Engineering & System Safety,* 140, pp. 78-87.

[13] Finkelstein, M., and Eryilmaz, S. 2021. On optimal maintenance of degrading multistate systems with state-dependent cost of repair. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 37(4), pp. 790-801.

[14] Finkelstein, M., and Gertsbakh, I. 2016. Preventive maintenance of multistate systems subject to shocks. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 32(2), pp. 283-291.

[15] Koutras, V. P. 2023. A markov regenerative process model for the dependability and performance of a two-unit multi-state system under maintenance. *Reliability Engineering & System Safety,* 109433.

[16] Gertsbakh, I. B., and Shpungin, Y. 2012. Stochastic models of network survivability. *Quality Technology & Quantitative Management,* 9(1), pp. 45-58.