Kharazmi University

Mathematical Research

Year 2025, Volume 11, Issue 3, pp. 18–30

Print ISSN: 2588-2546

Online ISSN: 2588-2554

DOI: xxxx

A new geometric vector field and its application to general relativity

Ghodratallah Fasihi-Ramandi[(1)] [1] ,Farzaneh Shamkhali[(2)] and Shahroud Azami[(3)]

[(1),(2),(3)] Department of pure mathematics, Faculty of basic science, Imam Khomeini International University , Qazvin, Iran

Received: 5 October 2024 Accepted: 16 November 2025 Published online:: 17 December 2025

Abstract: A hyperbolic soliton is a pseudo-Riemannian manifold (M, g) with a vector field $X \in \mathfrak{X}(M)$ and scalars μ and λ, satisfies the equation:

$$\mathrm{Ric} + \lambda \mathcal{L}_X g + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_X g) = \mu g.$$

The vector field X is called a potential vector field for this hyperbolic soliton. In this paper, we introduce a new geometric vector field which, besides being related to the geometry of the manifold under study, is also connected to the concept of a *relativistic fluid* when considered as a potential field for a hyperbolic soliton. Consequently, this structure relates the geometry of spacetime to the wave properties of pseudo-Riemannian metrics. Finally, we explore other applications of this structure in spacetime manifolds.

Keywords: Hyperbolic Ricci solitons, General Relativity, Geometric vector Fields.

[1]Corresponding author

E-mail addresses: (G. Fasihi-Ramandi) fasihi@sci.ikiu.ac.ir, (Farzaneh Shamkhali) shamkhali56@gmail.com (S. Azami) azami@sci.ikiu.ac.ir

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۲۸۸
DOI: xxxx

پژوهش‌های ریاضی

سال ۱۴۰۴، دوره ۱۱، شماره ۳، ص ۱۸—۳۰

یک میدان برداری هندسی جدید و کاربرد آن در نسبیت عام

قدرت‌اله فصیحی رامندی [(۱)] [۱] ،فرزانه شمخالی [(۲)] و شاهرود اعظمی [(۳)]

[(۱),(۲),(۳)] گروه ریاضی محض، دانشکدهٔعلوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی، قزوین، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۷/۱۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۸/۲۵ تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۹/۲۶

چکیده:
یک سالیتون هذلولوی یک منیفلد شبه‌ـریمانی (M, g) به همراه یک میدان برداری $X \in \mathcal{X}(M)$ و اسکالرهای μ و λ است که در تساوی $\mathrm{Ric} + \lambda \mathcal{L}_X g + \frac{۱}{۲}\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_X g) = \mu g$ صدق می‌کند. میدان برداری X را یک میدان پتانسیل برای این سالیتون هذلولوی گویند. در این مقاله، یک میدان برداری هندسی جدید معرفی می‌کنیم که علاوه بر آنکه در ارتباط با هندسه منیفلد مورد مطالعه است، هرگاه به عنوان یک میدان پتانسیل برای یک سالیتون هذلولوی در نظر گرفته شود به مفهوم سیال نسبیتی مرتبط شده و بنابراین، هندسه فضاـزمان و خواص موجی مترهای شبه‌ـریمانی را به هم مربوط می‌سازد. نهایتا، کاربردهای دیگر این ساختار را در منیفلدهای فضاـزمان جستجو می‌کنیم.

واژه‌هاي کلیدي: سالیتون‌های هذلولوی، نسبیت عام، میدان‌های برداری هندسی.

رده‌بندی ریاضی: 53Bxx; 22Exx.

۱ مقدمه

در اواخر قرن نوزدهم و ابتدای قرن بیستم، به نظر می‌رسید که فیزیک کلاسیک به یک ساختمان نظری کامل تبدیل شده است و فیزیک‌دانان می‌توانند هر پدیده در طبیعت را با دقت مناسبی محاسبه و پیش‌بینی کنند. برای آنکه قوانین مکانیک، الکترومغناطیس، حرارت و مکانیک آماری کشف شده بود و به علاوه فرمالیسم لاگرانژی و هامیلتونی از مکانیک، توانایی بررسی سیستم‌های پیچیده‌تر را مهیا ساخته بود. اما، دقیقا در این نقطه از تاریخ علم فیزیک، که

---

[۱] نویسنده مسئول مقاله

(G. Fasihi-Ramandi) fasihi@sci.ikiu.ac.ir, (F. Shamkhali) shamkhali56@gmail.com, (S. Azami) azami@sci.ikiu.ac.ir

گمان می‌شد فیزیک کلاسیک می‌تواند طیف وسیعی از پدیده‌های طبیعی و صنعتی، از ابزار آلات دقیق فنی گرفته تا حرکات کرات در منظومه شمسی را به دقت توصیف کند، نقطه آغازین فیزیک مدرن شد که شالوده آن نظریه نسبیت و نظریه مکانیک کوانتومی است. فیزیک مدرن، درک جدید و عمیقی نسبت به جهان و ساز و کار آن به دست داد. پرسش از اینکه سرشت مواد چیست؟ یعنی ذرات در بنیادی‌ترین شکل خود چه طبیعتی دارند به علاوه، عدم توانایی فیزیک کلاسیک از توصیف برخی پدیده‌های فیزیکی، مانند تابش جسم سیاه، اثر کامپتون، اثر فوتوالکتریک و نظایر آن، مشخص کرد که برای ورود به جهان میکروسکوپیک باید مفاهیم به طور کلی جدید و حتی زبان متفاوت ایجاد کرد و بدین ترتیب، مکانیک کوانتومی در اوایل قرن بیستم متولد شد که یکی از جنبه‌های فیزیک مدرن است [۱۴]. در این مقاله ما از اثرات کوانتومی چشم‌پوشی کرده و تمرکز خود را روی نظریه نسبیت معطوف می‌داریم.

از سوی دیگر با کشف قوانین الکترومغناطیس، فیزیک‌دانان به طبیعت نور به عنوان یک موج الکترومغناطیسی بیش‌تر علم یافتند. این قوانین اولا پیش‌بینی می‌کردند که سرعت نور در همه جهات باید ثابت باشد و آزمایش مایکلسون‌ـ‌مورلی نیز صحت این پیش‌بینی را نشان داد [۱۸]. از طرفی قوانین الکترومغناطیس تحت تبدیلات گالیله‌ای پایا نبودند و در واقع، تحت تبدیلات لورنتزی پایا باقی می‌ماندند. ثابت بودن سرعت نور، قانون جمع سرعت‌های نسبی را به هم می‌ریخت و پایا نبودن قوانین ماکسول تحت تبدیلات گالیله‌ای، نسبت به قوانین نیوتن شک ایجاد می‌کرد، زیرا صحت قوانین الکترومغناطیس و پیش‌بینی‌های آن با آزمایش مایکلسون‌ـ‌مورلی نشان داده شده بود.
اینشتین، در سال ۱۹۰۵ نظریه نسبیت خاص[1] را تشریح کرده و پاسخی بر این ناسازگاری‌ها ارائه داد. اینشتین نشان داد که فضا و زمان از هم جدا نیستند و در واقع تحت یک مفهوم فضاـ‌زمان درهم‌تنیده شده‌اند. در نسبیت خاص معلوم شد که زمان امری مطلق نیست و درک زمان برای ناظرهای مختلف، می‌تواند گوناگون باشد، قوانین الکترومغناطیس صحیح بوده و قوانین مکانیک نیوتنی باید تعدیل گردد. اتساع زمان، انقباض طول و فرمول مشهور $E = mc^۲$ که بیانگر ماهیت فیزیکی یکسان جرم و انرژی است، از نتایج نظریه نسبیت خاص بود [۲۰].

نسبیت خاص، با نتایج جالب توجهی که داشت و با موفقیت‌های بسیاری که در همسو کردن قوانین نیوتن و الکترومغناطیس داشت، در ارتباط با گرانش یا جاذبه نیوتنی به مشکل برمی‌خورد. زیرا انتشار جاذبه نیوتنی آنی بوده و این با ساختار ریاضی نظریه نسبیت خاص سازگاری نداشت، در واقع، در فضاـ‌زمان مینکوفسکی (ساختار ریاضی نسبیت خاص) رویدادهای فضاگونه نمی‌توانند بر هم تاثیر علیتی داشته باشند در حالیکه با ورود جاذبه نیوتنی این تاثیر به صورت آنی و در تمام فضاـ‌زمان باید گسترده می‌شد. اینشتین، مفهوم جاذبه را با مفهوم انحنا در ارتباط دانست و ساختار هندسی نظریه نسبیت عام که یک منیفلد چهار بعدی لورنتزی است را به سال ۱۹۱۴ ارائه نمود.
در این مقاله، ابتدا ساختار ریاضی نظریه نسبیت و محدودیت‌های این نظریه را یادآوری می‌کنیم. راهکارهای پیشنهادی جهت عبور از این محدودیت‌ها را مرور کرده و نهایتا به یک مدل‌سازی هندسی از فضاـ‌زمان در چارچوب مفهوم سالیتون‌های هذلولوی خواهیم پرداخت.

۲ ساختار هندسی نظریه نسبیت عام

هیچ نظریه فیزیکی در حال حاضر مدعی نیست که می‌تواند تمام طبیعت را توصیف کند. نظریه نسبیت عام، به توصیف جهانی می‌پردازد که در آن دو نیروی اساسی در طبیعت یعنی نیروی گرانش و نیروی الکترومغناطیس حضور دارند و از اثرات کوانتومی پدیده‌ها چشم‌پوشی می‌کند. در این بخش به تشریح چارچوب ریاضی نظریه نسبیت می‌پردازیم. از هندسه فضای مینکوفسکی شروع کرده و نهایتا ساختار ریاضی نسبیت عام را یادآوری می‌کنیم.

[1] special relativity

۱.۲ فضای مینکوفسکی

در این بخش ساختار ریاضی نظریه نسبیت خاص که همان فضای مینکوفسکی است را شرح می‌دهیم، مطالب این بخش سر راست بوده و از [۱۹] برداشت شده است.
فضای برداری حقیقی V را به همراه یک نگاشت دو خطی $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ و متقارن که در خاصیت زیر موسوم به خاصیت ناتبهگونی صدق می‌کند، یک فضای شبه‌ـضرب داخلی[۱] گویند.

$$\big(\forall x \in V \quad (\forall y \in V, \quad \langle x, y \rangle = \circ)\big) \Rightarrow x = \circ.$$

معمولا یک فضای شبه‌ـضرب داخلی را با زوج $(V, \langle .,. \rangle)$ نمایش می‌دهند. در یک فضای برداری ضرب داخلی $(V, \langle .,. \rangle)$ پایه مرتب $\mathcal{B} = \{e_۱, \cdots, e_n\}$ را یک پایه متعامد یکه‌ای گویند هرگاه

$$\langle e_i, e_j \rangle = \pm \delta_{ij},$$

که در آن δ_{ij} همان، دلتای کرونکر است. در یک فضای شبه‌ـضرب داخلی و در هر پایه متعامد یکه‌ای تعداد بردارهایی از پایه که ضرب آن‌ها در خودشان برابر ۱ است و تعداد بردارهایی که ضرب آن‌ها در خودشان -۱ است همواره ثابت است و اگر این تعداد به ترتیب برابر r و s باشد، شبه‌ـضرب داخلی را از اندیس یا نشان (r, s) گوئیم. شبه‌ـضرب داخلی روی فضای برداری nـ بعدی از نشان $(n-۱, ۱)$ را ضرب لورنتزی می‌گوییم. اگر نشان شبه‌ـضرب داخلی $(n, \circ)$ باشد، به مفهوم آشنای ضرب داخلی معین‌ـمثبت فروکاسته می‌شود و آن را یک ضرب داخلی گوییم.
یک فضای برداری حقیقی $\mathcal{M}$ که روی به همراه یک ضرب لورنتزی روی آن

$$\langle (a, b, c, d), (x, y, z, w) \rangle = ax + by + cz - dw,$$

را فضای مینکوفسکی می‌گوییم. به هر یک از عناصر $\mathcal{M}$ یک رویداد گوییم. یک پایه متعامد یکه‌ای از که جهان رویدادها را مختصاتی می‌کند را یک چارچوب مرجع گوییم. چون ضرب لورنتزی روی $\mathcal{M}$، معین‌ـمثبت نیست بنابراین، بردار ناصفری مانند u موجود است که $\langle u, u \rangle = \circ$، چنین برداری را نورـگونه گویند. می‌توان دید که مجموعه تمام بردارهای نورگونه یک زیر فضای ۱ـ بعدی از $\mathcal{M}$ است. در هر نقطه $x_\circ \in \mathcal{M}$، مجموعه زیر را یک مخروط نوری در $x_\circ$ گویند.

$$\mathcal{C}_N(x_\circ) = \{x \in \mathcal{M} | \quad \langle x - x_\circ, x - x_\circ \rangle = \circ\}.$$

همچنین، یک بردار u در $\mathcal{M}$ را زمان‌ـگونه گویند هرگاه $\langle u, u \rangle < \circ$ و فضاـگونه گویند هرگاه $\langle u, u \rangle > \circ$.
فضای مینکوفسکی، چارچوب ریاضی است که اینشتین برای نظریه نسبیت خاص خود در نظر گرفته است و توانسته است مکانیک کلاسیک را تعدیل و با الکترومغناطیس همسو کند. اما، در این چارچوب ثابت می‌شود که رویدادهایی که بردار جابجایی آن‌ها فضاـگونه است نمی‌توانند تاثیر علیتی بر هم داشته باشند. زیرا برای این رویدادها، تقدم و تاخر زمانی معنایی ندارد. همین امر باعث می‌شود که در ساختار نسبیت خاص نتوان مفهوم جاذبه نیوتنی را وارد کرد، برای اینکه انتشار جاذبه نیوتنی، آنی است و به نوع رویدادها وابسته نیست. فضاـزمان مینکوفسکی، یک فضای تخت است، پس اینشتین حدس زد که، گرانش باید با مفهوم انحنا در ارتباط باشد و باید از منیفلدهایی استفاده کند که تقریب مینکوفسکی دارند (فضای مماس در هر نقطه منیفلد، یک فضای برداری مینکوفسکی باشد) و ساختار

[۱] semi-inner product

نسبیت عام را در سال ۱۹۱۴ تشریح کرد.

۲.۲ ساختار هندسی نسبیت عام

در این بخش، مفاهیمی از ساختار هندسی نظریه نسبیت را که در ادامه این مقاله مورد نیاز هستند فهرست می‌کنیم، برای اطلاعات بیش‌تر و دقیق‌تر حول مطالب این بخش می‌توان به [۲۱] رجوع کرد.
منظور از یک منیفلد شبه‌ــ ریمانی (M,g)، یک منیفلد هموار M و یک ۲ــ میدان تانسوری g روی M است طوری‌که برای هر $p\in M$،

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

یک شبه‌ــ ضری داخلی روی T_pM باشد. اگر برای هر p ، شبه‌ــ ضرب داخلی g_p، یک ضرب لورنتزی باشد آنگاه (M,g) را یک منیفلد لورنتزی گوییم. در یک منیفلد لورنتزی اگر میدان برداری $Z\in\mathcal{X}(M)$ موجود باشد که برای هر p، بردار Z_p زمان‌ــ گونه باشد، منیفلد را جهت‌پذیر زمانی گوییم.
به یک منیفلد جهت‌پذیر لورنتزی چهار بعدی (M,g) که جهت‌پذیر زمانی نیز است، یک منیفلد فضاــ زمان گویند.
این دقیقا همان ساختار ریاضی است که اینشتین برای بیان نظریه نسبیت عام از آن استفاده کرد.
انحنا مفهومی وابسته به متر است پس، جرم در فضاــ زمان متر لورنتزی را ایجاد می‌کند، اینشتین برای توصیف متر از روی جرم، مفاهیم هندسی و فیزیکی را در هم آمیخت. هرگاه، ماده را به صورت پیوستار در نظر بگیریم، اندازه حرکت، یک میدان برداری خواهد بود و از روی آن می‌توان یک ۲ــ میدان تانسوری متقارن ایجاد کرد که موسوم به تانسور تکانه‌ــ انرژی T است. نهایتا معادله اینشتین به شکل زیر ارائه شد

$$\mathrm{Ric} - \frac{۱}{۲}Rg = T,$$

طرف راست معادله بالا، وضعیت ماده را نشان می‌دهد و ماده نیز متریک را مشخص می‌کند و متر نیز مسیر حرکت یا دینامیک سیستم را به دست خواهد داد.
به عنوان مثال، تانسور تکانه‌ــ انرژی[1] یک سیال کامل به صورت زیر داده می‌شود

$$T(X,Y) = \rho g(X,Y) + (\sigma+\rho)\eta(X)\eta(Y),$$

که در آن، X و Y میدان‌های برداری روی منیفلد M و ρ نشان‌دهنده فشار همسان‌گرد است. همچنین، g متر لورنتزی فضاــ زمان، σ چگالی انرژی و η یک‌ــ فرم وابسته به میدان برداری سرعت این سیال کامل ξ است که در شرط $g(\xi,\xi) = -۱$ صدق می‌کند. بنابراین، معادله اینشتین برای این سیال کامل (سیال نسبیتی)، به شکل زیر است

$$\mathrm{Ric} - \frac{۱}{۲}Rg = (\rho+\Lambda)g + (\sigma+\rho)\eta\otimes\eta, \tag{۱.۲}$$

که در آن، Λ ثابت کیهانی[2] است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، مفهوم تانسورــ تکانه‌ــ انرژی یک مفهوم فیزیکی است و از ابتدا در ساختار هندسی نسبیت وجود ندارد. در زمان حیات اینشتین، این پرسش به طور طبیعی پیش آمد که چطور می‌توان جرم و

[1] eneregy-momentum tensor
[2] cosmological constant

الکترومغناطیس را که تحت مفهوم تانسور تکانه‌ـانرژی وارد ساختار نسبیت می‌شود را از ابتدا در ساختار هندسی آورد، این مسئله را هندسی‌سازی جرم و الکترومغناطیس (یا وحدت گرانش و الکترومغناطیس) گویند. اینشتین، معتقد بود یک هندسی‌سازی مناسب نه تنها تصویر جامعی از ماهیت جرم و سایر مفاهیم فیزیکی ارائه می‌کند بلکه می‌تواند پاسخی بر ویژگی‌های پیچیده و رمزآلود دنیای کوانتومی ارائه کند.
تلاش‌های زیادی برای وحدت جاذبه و الکترومغناطیس و همچنین وحدت جاذبه و سایر نیروها (همانطور که معادلات یانگ‌ـمیلز پیشنهاد می‌کنند) ارائه شده است [۱۳]. در بیشترین این تلاش‌ها ساختار نسبیت را به عنوان ابزار پایه در نظر گرفته و سعی دارند با گسترش مفاهیم دیگر هندسی، آزادی عمل بیش‌تری برای تعریف دیگر مفاهیم فیزیکی ایجاد کنند. استفاده از التصاق‌های آفین کلی (ادینگتون ۱۹۲۱)، مترهای نامتقارن (اینفلد ۱۹۲۸ و همچنین [۱])، استفاده از مفهوم کلاف‌ها و التصاق‌های اصلی (نظریه یانگ‌ـمیلز)، الجبروئیدهای لی [۶، ۷، ۱۰، ۱۱] و در نظر گرفتن بعدهای اضافی در فضاـزمان (اینشتین و مایر ۱۹۳۱) نمونه‌هایی از این تلاش‌ها هستند. در بخش بعد، مفهوم شارهای هندسی را بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که جواب‌های خودـمتشابه شارهای هندسی نیز ساختارهای غنی‌تر از فضاـزمان را پیشنهاد می‌کنند.

۳ مقدمه ای بر شارهای هندسی

مفهوم شار ریچی[۱]، اولین بار توسط هامیلتون در سال ۱۹۸۲ معرفی شد [۱۶] و پس از آن پرلمان به کمک این مفهوم حدس هندسی‌سازی تورستن را اثبات کرد. شار ریچی کاربرد وسیعی در هندسه دیفرانسیل و فیزیک نظری یافته است. فرض کنید $(M, g_\circ)$ یک منیفلد ریمانی باشد و $g(t)$ خانواده‌ای از مترهای ریمانی $g(t)$ روی آن باشد که در معادله زیر صدق می‌کنند

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -۲\mathrm{Ric}, \quad g(\circ) = g_\circ, \qquad (۱.۳)$$

که در آن Ric تانسور انحنای ریچی وابسته به متر $g(t)$ است. این معادله که به شار ریچی مشهور است، در واقع شبیه معادله گرما برای مترهای ریمانی است و بنابراین، طبیعت گرمایی مترهای ریمانی روی یک منیفلد ریمانی را بررسی می‌کند. ثابت شده است که این معادله، در مدت زمان کوتاه دارای جواب یکتا است. هرگاه $g_\circ$ متر اولیه، اینشتین باشد، در امتداد شار ریچی اینشتین باقی خواهد ماند. پس، یک راه طبیعی برای یافتن مترهای اینشتین روی یک منیفلد بررسی این شار هندسی است و این معادله می‌تواند کاندیدایی باشد که مفاهیم تعریف شده در ساختار هندسی نظریه نسبیت را گسترش داده و محدودیت‌های آن در هندسی سازی جرم یا الکترومغناطیس را مرتفع سازد.
ساده‌ترین جواب‌هایی که برای شار ریچی می‌توان متصور شد، جواب‌های خودـمتشابه[۲] یا سالیتون‌ها[۳] هستند [۱۵].
یک منیفلد ریمانی (M, g) به همراه یک میدان برداری X و یک اسکالر μ را یک سالیتون ریچی گوییم هرگاه

$$\mathrm{Ric} + \frac{۱}{۲}\mathcal{L}_X g = \mu g. \qquad (۲.۳)$$

سالیتون ریچی را افزایشی، کاهشی یا پایا گوییم هرگاه به ترتیب $\mu > \circ$، $\mu < \circ$ و یا $\mu = \circ$ باشد. دقت کنید که اگر $X = \circ$ آنگاه (M, g) یک منیفلد اینشتین خواهد شد، بنابراین سالیتون‌های ریچی تعمیم منیفلدهای اینشتین هستند.

---
[1] Ricci flow
[2] self-similar solutions
[3] solitons

با توجه به کارایی‌هایی که شار ریچی و به تبع سالیتون ریچی، در آنالیز هندسی منیفلدها داشته است، تعمیم‌هایی از این مفهوم انجام شده است. برای مثال، چو و کیمورا، مفهوم ηــسالیتون ریچی را تعریف کرده‌اند [۹]. یک منیفلد شبه‌ــریمانی دارای ساختار ηــسالیتون ریچی گفته می‌شود هرگاه میدان برداری X و اسکالرهای α و μ موجود باشند که معادله زیر را برقرار کنند

$$\mathcal{L}_{\mathcal{X}}g + ۲\mathrm{Ric} + ۲\alpha\eta \otimes \eta = ۲\mu g,$$

که در آن η یکــفرم وابسته به میدان برداری X است. مشاهده می‌شود که معادله بالا، شبیه معادله میدان اینشتین برای سیال نسبیتی است.

همچنین، شار ریچی در سایر شاخه‌های هندسه، مانند منیفلدهای سایا و فضاهای فینسلری نیز تعریف شده و نتایجی را ایجاد کرده است [۲، ۳، ۸].

از طرفی شار هذلولوی، برای مترهای ریمانی در نیز تعریف شده و وجود و یکتایی جواب آن در زمان کوتاه بررسی شده است [۱۷]. شار هذلولوی، یک معادله تحولی به شکل زیر برای مترهای یک منیفلد ریمانی $(M, g_{۰})$ است

$$\frac{\partial^{۲} g}{\partial t^{۲}} = -۲\mathrm{Ric}, \quad g(۰) = g_{۰}, \quad \frac{\partial g}{\partial t} = s,$$

که در آن s یک ۲ــتانسور متقارن است. این شار هندسی، شبیه معادله انتشار موج برای مترهای روی M است و بنابراین، طبیعت موج‌گونه مترهای ریمانی روی یک منیفلد را مورد بررسی قرار میدهد.

یکی از مولفان این مقاله، در یک کار مشترک مفهوم سالیتون هذلولوی را با بررسی جواب‌های خودــمتشابه این شار هندسی تعریف کرده است [۱۲]. یک سالیتون هذلولوی یک منیفلد شبه‌ــریمانی (M, g) به همراه یک میدان برداری $X \in \mathcal{X}(M)$ و اسکالرهای μ و λ است که در تساوی

$$\mathrm{Ric} + \lambda\mathcal{L}_{\mathcal{X}}g + \frac{۱}{۲}\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(\mathcal{L}_{\mathcal{X}}g) = \mu g,$$

صدق می‌کند. اگر $\lambda = \frac{۱}{۲}$ و $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(\mathcal{L}_{\mathcal{X}}g) = ۰$، آنگاه سالیتون هذلولوی، به یک سالیتون ریچی فروکاسته می‌شود. پس، سالیتون‌های هذلولوی، تعمیم سالیتون ریچی و بنابراین تعمیمی از منیفلدهای اینشتین هستند و ابزار ما را در منیفلدهای فضاــزمان جهت هندسی‌سازی، سایر مفاهیم فیزیکی فراهم می‌کند. در این معادله، علامت λ در ارتباط با مفهوم افزایشی، کاهشی و یا پایا بودن سالیتون هذلولوی است. همچنین، علامت μ نرخ و شدت این افزایشی یا کاهشی بودن را نشان می‌دهد.

۴ یک میدان برداری هندسی جدید

میدان‌های برداری و مترهای شبه‌ــریمانی مفاهیم مستقلی در هندسه دیفرانسیل هستند. هرگاه بین این دو ساختار مجزا شرایط سازگاری خاصی را مطالبه کنیم، هندسه این دو ساختار به هم مرتبط خواهند شد و مفاهیم جدیدی را ایجاد خواهند کرد. میدان‌های برداری که در تعریف آن‌ها از ساختار متر استفاده می‌شود را میدان‌های برداری هندسی گویند. میدان‌های برداری کیلینگ، میدان‌های همدیس و میدان‌های تصویری مثال‌هایی از میدان‌های برداری هندسی هستند.

به عنوان مثال، در یک منیفلد شبه‌ــریمانی (M, g) یک میدان برداری $X \in \mathcal{X}(M)$ را یک میدان برداری کیلینگ گوییم هرگاه $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}g = ۰$. میدان برداری X روی یک منیفلد شبه‌ــریمانی (M, g) یک میدان کیلینگ است اگر

و تنها اگر گروه یک‌ــ پارامتری از دیفئومورفیسم‌های موضعی آن $\{\phi_t\}_t$، ایزومتری‌هایی از (M, g) باشند یعنی $\phi_t^*(g) = g$. بنابراین، در امتداد خم‌های انتگرال X، تانسور متر پایا خواهد بود. اگر (M, g) یک منفلد فضاــ زمان باشد، یک میدان برداری کیلینگ X در واقع، تقارن‌های این فضاــ زمان را نشان می‌دهد، یعنی قوانین فیزیک برای ناظرهایی که در امتداد خمهای انتگرال X هستند به یک شکل خواهد بود.
همچنین، میدان برداری همدیس X در یک منیفلد شبه‌ــ ریمانی (M, g) یک میدان برداری هندسی است که با شرط $\mathcal{L}_X g = fg$ تعریف می‌شود، که در آن $f \in C^\infty(M)$ یک تابع هموار است. هرگاه f تابعی ثابت باشد، میدان برداری همدیس را هموتوتیک و هرگاه تابع f غیر ثابت باشد آن را میدان برداری غیر هموتوتیک گویند. ویژگی‌های هندسی میدان‌های همدیس بررسی شده است و نشان داده شده است که وجود میدان‌های همدیس سرتاسری در منیفلدهای شبه‌ــ ریمانی نتایج صلبیت خاصی در منیفلد بدست می‌دهد.
اخیرا، میدان برداری دوــ کیلینگ نیز در چارچوب منیفلدهای شبه‌ــ ریمانی تعریف شده است. یک میدان برداری $X \in \mathcal{X}(M)$ در یک منیفلد شبه‌ــ ریمانی (M, g)، دوــ کیلینگ نامیده می‌شود هرگاه داشته باشیم $\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_X g) = ۰$. از تعریف این میدان هندسی مشخص می‌شود که تغییرات دوم تانسور متر تحت شار این میدان‌ها صفر است، در واقع اگر $\{\phi_t\}_t$ شار موضعی چنین میدانی باشد آنگاه

$$\frac{d^۲}{dt^۲}\phi_t^*(g) = ۰.$$

تعریف ۱.۴. یک *میدان برداری* $X \in \mathcal{X}(M)$ *در یک منیفلد شبه‌ــ ریمانی* (M, g)، *هم‌ــ کیلینگ*[1] *نامیده گوییم هرگاه برای یک اسکالر حقیقی* α *داشته باشیم* $\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_X g) = \alpha X^\flat \otimes X^\flat$.

در تعریف این میدان برداری از تانسور متر و نگاشت‌های یکریختی موسیقیایی استفاده کرده‌ایم، بنابراین این میدان، یک میدان برداری هندسی است و در ارتباط با هندسه منیفلد پایه خود است. این ساختار، شرط اضافه‌تری را روی منیفلدهای شبه‌ــ ریمانی می‌طلبد و این طور نیست که هر منیفلد شبه‌ــ ریمانی چنین میدانی بپذیرد. این میدان‌ها خاص هستند و مجموعه چنین میدان‌هایی برعکس مجموعه میدان‌های برداری کیلینگ، تشکیل فضای برداری نمی‌دهد. هرگاه $\alpha = ۰$ میدان برداری هم‌ــ کیلینگ به مفهوم میدان برداری دوــ کیلینگ فروکاسته می‌شود. هرگاه، این میدان را در منیفلد فضاــ زمان در نظر بگیریم، با توجه به اینکه تانسور متر در ارتباط با گرانش است، این میدان نیز دارای تعابیر و معنای فیزیکی خواهد شد. به فرض اینکه، یک سالیتون هذلولوی (M, g, X, λ, μ) روی یک منیفلد فضاــ زمان به شکل زیر داشته باشیم

$$\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_X g) + \lambda\mathcal{L}_X g + \mathrm{Ric} = \mu g,$$

اگر X هم‌ــ کیلینگ باشد، آنگاه معادله به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\lambda\mathcal{L}_X g + \mathrm{Ric} + \alpha X^\flat \otimes X^\flat = \mu g,$$

که X را در ارتباط با مفهوم سیال نسبیتی قرار می‌دهد. از آنجا که، مدل‌های سیال نسبیتی بخاطر ویژگی‌هایی که دارند به عنوان مدل‌هایی برای تشریح یک جهان همسانگرد به کار می‌روند، بنابراین، میدان‌های برداری هم‌ــ کیلینگ به عنوان پتانسیل برای سالیتون‌های هذلولوی، هندسه جهان را با ویژگی‌های موج‌گونه مترها مرتبط می‌کنند.
قبل از اینکه به ادامه مباحث بپردازیم، بهتر است اینجا توقف کرده و کمی بیش‌تر در ارتباط با میدان‌های هم‌ــ کیلینگ صحبت کنیم.

[1] co-Killing

در منیفلدهای با بعد بزرگتر از یک، حل معادله $\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_X g) = \alpha X^\flat \otimes X^\flat$ برای یافتن جواب غیر بدیهی پیچیده است. در بعد یک، فرض کنیم $g = dx^۲$ و $X^\flat = f(x)dx$ در این صورت، معادله $\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_X g) = \alpha X^\flat \otimes X^\flat$ به معادله زیر تبدیل می‌شود

$$۲f(x)f''(x) + ۴f'(x)^۲ - \alpha f^۲(x) = ۰,$$

که با ضرب کردن عبارت $\frac{۳}{۲}f(x)$ در طرفین معادله به دست می‌آوریم

$$\big(f(x)^۳\big)'' - \frac{۳}{۲}\alpha f(x)^۳ = ۰,$$

بنابراین، اگر $\alpha = \frac{۲}{۳}a^۲ > ۰$ آنگاه $f(x)^۳$ ترکیب خطی از توابع $\cosh ax$ و $\sinh ax$ است در حالی‌که اگر $\alpha = \frac{۲}{۳}a^۲ < ۰$، آنگاه $f(x)^۳$ ترکیبی خطی از $\cos ax$ و $\sin ax$ خواهد بود.

همان‌طور که پیش‌تر گفتیم، هر منیفلد شبه‌ـ ریمانی لزوما میدان برداری هم‌ـ کیلینگ نمی‌پذیرد. در حالت منیفلدهای nـ بعدی، فرض کنید، بخواهیم در مختصات موضعی (با تقریب دیفئومورفیسم) مجموعه زوج‌های (g, X) که در معادله‌ی $\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_X g) = \alpha X^\flat \otimes X^\flat$ برای میدان برداری ناصفر X صدق می‌کنند را بنویسیم. با توجه به ناصفر بودن X می‌توانیم از مختصات صلب استفاده کنیم که در آن $X = \frac{\partial}{\partial x^۱}$. در این صورت معادله برای مجهول $g = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ به یک دستگاه معادلات مرتبه دوم تبدیل می‌شود که در موضعا جواب یکتایی با شرایط اولیه زیر، دارد.

$$a_{ij}(x^۲, \cdots, x^n) = g_{ij}(۰, x^۲, \cdots, x^n),$$
$$b_{ij}(x^۲, \cdots, x^n) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^۱}(۰, x^۲, \cdots, x^n).$$

بنابراین، جواب‌های موضعی به $n(n+۱)$ تابع $n-۱$ متغیره وابسته خواهند بود. چون، مختصات صلب برای X به n تابع $n-۱$ متغیره بستگی دارد، بنابراین جواب‌های موضعی (g, X) به $n^۲$ تابع $n-۱$ متغیره وابسته خواهد بود. از آنجا که در حالت کلی، یک متر (با تقریب دیفئومورفیسم) با $\frac{۱}{۲}n(n+۱)$ تابع n متغیره مشخص می‌شود، بنابراین در حالت کلی برای $n > ۱$ و برای اکثریت مترها، تنها میدان برداری X که در معادله صدق می‌کند، میدان $X \equiv ۰$ است. در واقع، این ساختار تنک است.

در حالت $n = ۲$، تعیین شرایطی روی پایاهای هندسی یک متر رویه‌ای که به ازای آن شرایط، یک میدان ناصفر X صادق در معادله $\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_X g) = \alpha X^\flat \otimes X^\flat$ داشته باشیم، می‌تواند تمرین جالبی باشد.

۵ نتایج اصلی

در مقدمه، بیان کردیم که در اواخر قرن نوزدهم، فرمالیسم لاگرانژی و هامیلتونی برای مکانیک ارائه شده بود و توانایی تحلیل سیستم‌های پیچیده را فراهم ساخته بود. در فرمالیسم لاگرانژی از مکانیک کلاسیک، بیان می‌شود که در هر سیستم مکانیکی، مسیر حرکت سیستم، خمی است که انتگرال زمانی اختلاف انرژی پتانسیل از انرژی جنبشی آن سیستم (موسوم به لاگرانژین) را مینیمم کند که منجر به حل یک دستگاه از معادلات مرتبه دوم موسوم به معادلات اویلرـ لاگرانژ می‌شود. در واقع، اگر یک سیستم فیزیکی با مختصات تعمیم‌یافته q و $\dot{q}$ در نظر بگیریم که انرژی پتانسیل T و انرژی جنبشی آن K است و از لحظه $t_۰$ تا لحظه $t_۱$ دینامیک آن را بخواهیم، باید نقاط بحرانی

تابعک زیر را بیابیم [۲۲].

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \int_{t_0}^{t_1} L(q,\dot{q})dt, \quad L(q,\dot{q}) = T - V.$$

چون، حل n از دستگاه معادلات مرتبه دوم کمی سخت است، با تبدیل لژاندر روی معادلات، دستگاه را به معادله مرتبه اول تبدیل نمودند و مفهوم فرمالیسم هامیلتونی نیز به وجود آمد [۴].

این فرمالیسم‌ها توانایی ما را برای تحلیل سیستم‌های پیچیده گسترده می‌کنند زیرا در آن‌ها نیازی به تحلیل نیروها و تجزیه نیروها در امتدادهای اصلی نیست. ابتدا این فرمول‌بندی از مکانیک واکنش‌های منفی از سوی برخی از فیزیک‌دانان را به همراه داشت زیرا، آن‌ها معتقد بودند که با این کار فیزیک مسئله کم شده و کار به معادلات ریاضی می‌رسد. اما طولی نکشید که این روش، به عنوان یک ابزار اساسی در فیزیک نظری جای خود را باز کرد. مثلا در مکانیک کوانتومی، معادله شرودینگر از یک فرمول‌بندی نظیر فرمول‌بندی هامیلتونی به دست می‌آید. همچنین، نشان داده شده است که معادله اینشتین در خلا، $\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}Rg = 0$ که همان مترهای اینشتین هستند نقاط بحرانی تابعک هیلبرت_اینشتین که به شکل زیر تعریف می‌شوند، می‌باشند

$$\mathcal{L}(g) = \int_M R(g)dV_g.$$

همان‌طور که دیدیم سالیتون‌های هذلولوی، تعمیم منیفلدهای اینشتین هستند. اگر (M,g,X,λ,μ) یک سالیتون هذلولوی باشد آنگاه

$$\mathrm{Ric} + \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_X g) + \lambda\mathcal{L}_X g = \mu g,$$

که با انقباض طرفین معادله داریم،

$$R = f + \lambda h + n\mu,$$

که در آن، f و h توابع هموراری روی M هستند و n، بعد منیفلد است. می‌خواهیم این ساختار را در منیفلدهای فضا_زمان در نظر بگیریم. در منیفلدهای فضا_زمان، مقدار انحنای اسکالر در ارتباط با توزیع ماده است. بنابراین، معادله بالا دو نوع ماده را در فضا_زمان پیشنهاد می‌کند و μ را می‌توان در ارتباط با مفهوم ثابت کیهانی در نظر گرفت. البته، در تجربه نیز به این دو نوع ماده برخورده‌ایم، علاوه بر ماده معمولی، ماده‌ای که فقط اثرات گرانشی دارد و به ماده تاریک مشهور است نیز در فیزیک نسبیتی مطرح است.

با در نظر گرفتن، منیفلدهایی که در آن‌ها، انحنای اسکالر، به شکل بالا است و استفاده از حساب تغییرات روی اکشن هیلبرت_اینشتین، می‌توان ماهیت این دو نوع ماده را در این‌گونه منیفلدها به دست آورد.

به عنوان مثال، در این بخش، یک سالیتون هذلولوی افزایشی (M,g,X,λ,μ) با میدان پتانسیل هم_کیلینگ نا صفر در نظر می‌گیریم. داریم

$$\mathrm{Ric} + \lambda\mathcal{L}_X g + \alpha X^\flat \otimes X^\flat = \mu g. \tag{۱.۵}$$

اگر از طرفین این تساوی اثر (تریس) بگیریم، بدست می‌آوریم

$$R = n\mu - 2\lambda \mathrm{div} X - \alpha|X|^2.$$

در این منیفلد، انحنای اسکالر به تانسور متر و یک میدان برداری X وابسته است. اگر قرار دهیم

$$\mathcal{L}(g,X)=\int_M R\Omega_g, \tag{۲.۵}$$

که در آن Ω_g فرم حجم وابسته به g است، بدست می‌آوریم

$$\mathcal{L}(g,X)=\int_M (n\mu-\alpha|X|^{2})\Omega_g, \tag{۳.۵}$$

در اینجا، منیفلد را فشرده و بدون مرز درنظر گرفته‌ایم تا انتگرال بالا قابل تعریف باشد و اگر دقیق‌تر صحبت کنیم، باید انتگرال‌گیری در یک مجموعه‌ای که محمل تابع در آن فشرده است انجام گیرد.
به هر حال، برای یافتن نقاط بحرانی تابعک فوق، برای t های به اندازه کافی کوچک قرار می‌دهیم

$$g(t)=g+ts,\quad X(t)=X+tY \tag{۴.۵}$$

می‌دانیم [۵]

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\ \Omega_{g(t)}=\frac{1}{2}\langle g,s\rangle. \tag{۵.۵}$$

با یک محاسبه سرراست معلوم می‌شود که

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\ |X(t)|^{2}=\langle X^\flat\otimes X^\flat,s\rangle+2\langle X,Y\rangle.$$

حال گوییم، زوج (g,X) نقطه بحرانی تابعک (۳.۵) است اگر و تنها اگر برای هر زوج (s,Y) داشته باشیم

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\ \int_M (n\mu-\alpha|X(t)|^{2})\Omega_{g(t)}=0.$$

با یک محاسبه روتین می‌توان دید که شرط بالا محقق است اگر وتنها اگر برای هر زوج (s,Y) داشته باشیم

$$\int_M \langle(\frac{n\mu-\alpha|X|^{2}}{2})g-\alpha X^\flat\otimes X^\flat,s\rangle\Omega_g-2\int_M \alpha\langle X,Y\rangle\Omega_g=0 \tag{۶.۵}$$

بنابراین، باید داشته باشیم

$$\alpha=\mu=0.$$

با توجه به ملاحظات بالا داریم:

قضیه ۱.۵. *زوج (g,X) نقطه بحرانی تابعک (۳.۵) است اگر و تنها اگر X یک میدان برداری ۲ـ کیلینگ باشد و $\mathcal{L}_X\mathrm{Ric}=0$.*

چون، X یک میدان دوـ کیلینگ است و $\mu=0$ داریم

$$R=-2\lambda\mathrm{div}(X),\quad \mathrm{Ric}+\lambda\mathcal{L}_X g=0. \tag{۷.۵}$$

در این صورت، معلوم می‌شود که $\mathrm{div}(X)$ در ارتباط با جرم است و معادله دیگر را که به صورت زیر می‌توان بازنویسی کرد

$$\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}Rg = \lambda\big(\mathrm{div}(X)g - \mathcal{L}_X g\big), \tag{۸.۵}$$

معادله اینشتین برای این جرم است. اینکه در این ساختار ماده تاریک را نمی‌یابیم، ناشی از فرضی است که روی X داشتیم (که X هم‌ـ کیلینگ باشد). در این حالت، سالیتون هذلولوی نیز به سالیتون ریچی معمولی فروکاسته می‌شود. سالیتون ریچی، به عنوان تعمیم از منیفلدهای اینشتین، قادر به توصیف یک نوع ماده در فضاـ زمان است. حال آنکه، سالیتون هذلولوی در حالت کلی‌تر، قادر به توصیف فضاـ زمان با پیش‌بینی دو نوع ماده است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک میدان برداری هندسی جدید معرفی کردیم و در ارتباط با وجود و ماهیت آن در منیفلدهای شبه‌ـ ریمانی بحث کوتاهی انجام دادیم. سپس، این میدان را به عنوان میدان برداری پتانسیل برای سالیتون هذلولوی که مفهومی جدید است به کار بردیم و نشان دادیم که چنین میدانی در منیفلد فضاـ زمان می‌تواند در ارتباط با کمیات مربوط به ماده باشد. همچنین، بیان کردیم که ساختار سالیتون هذلولوی در منیفلدهای فضاـ زمان می‌تواند دو نوع ماده فیزیکی(ماده معمولی و ماده تاریک) را توصیف کند. حالت سالیتون هذلولوی کلی را در نظر نگرفتیم و فرض هم‌ـ کیلینگ بودن را روی میدان پتنسیل قرار دادیم و به کمک حساب تغییرات معادله میدان اینشتین با یک مفهوم ماده معمولی هندسی شده را ساختیم. در نظرگرفتن حالت کلی سالیتون هذلولوی روی منیفلد فضاـ زمان کاری است که در ادامه این مقاله می‌توان انجام داد.

مراجع

[۱] فصیحی رامندی، قدرت‌اله، ۱۴۰۲. هندسه مترهای نامتقارن و کاربرد آن در نسبیت عام، پژوهش‌های ریاضی، ۹(۲) صص ۱۴۶-۱۵۶.

[2] Altunbaş, M., 2024. Generalized η-Ricci solitons on f-Kenmotsu manifolds admitting a quarter symmetric metric connection. *J. Finsler Geom. Appl.*, 5(1), pp.80–87.

[3] Azami, S., 2021. Complete Ricci–Bourguignon solitons on Finsler manifolds. *J. Finsler Geom. Appl.*, 2(1), pp.108–117.

[4] Arnold, V. I., 1978. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, New York.

[5] Bleecker, D., 1981. *Gauge Theory and Variational Principles*. Addison–Wesley.

[6] Elyasi, N. and Boroojerdian, N., 2014. Application of Lie algebroid structures to unification of Einstein and Yang–Mills field equations. *International Journal of Theoretical Physics*, 53, pp.2360–2369.

[7] Boroojerdian, N., 2013. Geometrization of mass in general relativity. *International Journal of Theoretical Physics*, 52, pp.2432–2445.

[8] Cheng, X. and Liang, Z., 2024. On projectively related Finsler gradient Ricci solitons. *J. Finsler Geom. Appl.*, 5(2), pp.30–47.

[9] Cho, J. T. and Kimura, M., 2009. Ricci solitons and real hypersurfaces in complex space forms. *Tohoku Math. J.*, 61, pp.205–212.

[10] Fasihi-Ramandi, Gh. and Boroojerdian, N., 2015. Forces unification in the framework of transitive Lie algebroids. *International Journal of Theoretical Physics*, 54, pp.1581–1593.

[11] Fasihi-Ramandi, Gh. and Boroojerdian, N., 2018. Graded Lie algebroid: a framework for geometrization of mass and forces unification. *Iranian Journal of Science and Technology*, 42, pp.917–926.

[12] Fasihi-Ramandi, Gh. and Azami, S., 2025. Hyperbolic Ricci solitons. *Chaos, Solitons & Fractals*, 193, 116095.

[13] Geonner, H. F. M., 2004. *On the History of Unified Field Theories*. Max Planck Institute for Gravitational Physics, Albert Einstein Institute.

[14] Griffiths, D. J., 2018. *Introduction to Quantum Mechanics*. 3rd ed. Cambridge University Press.

[15] Hamilton, R. S., 1995. The formation of singularities in the Ricci flow. *Surveys in Differential Geometry*, Vol. II (Cambridge, MA, 1993), pp.7–136. Int. Press, Cambridge, MA.

[16] Hamilton, R. S., 1982. Three manifolds with positive Ricci curvature. *Journal of Differential Geometry*, 17, pp.255–306.

[17] Kong, D. and Liu, K., 2007. Wave character of metrics and hyperbolic geometric flow. *J. Math. Phys.*, 48, pp.103508-1–103508-14.

[18] Milford, F. J., 2008. *Foundations of Electromagnetic Theory*. 4th ed. Addison–Wesley.

[19] Naber, G. L., 2012. *The Geometry of Minkowski Space-Time: An Introduction to the Mathematics of the Special Theory of Relativity*. Springer.

[20] Resnick, R., 1991. *Introduction to Special Relativity*. Wiley.

[21] Sash, R. K. and Wu, H. H., 2012. *General Relativity for Mathematicians*. Springer.

[22] Woodhouse, N. M. J., 2009. *Introduction to Analytical Dynamics*. Springer.