Kharazmi University

Mathematical Research

Year 2025, Volume 11, Issue 3, pp. 1–17

Print ISSN: 2588-2546

Online ISSN: 2588-2554

DOI: xxxx

Chebotarev Density Theorem and Closed Geodesics on Hyperbolic Three-Manifolds

Arash Rastegar[1]

Faculty of Mathematics Science, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

Received:23 February 2021 Accepted:16 November 2025 Published online: 17 December 2025

Abstract: In this paper, the MKR dictionary between prime numbers in algebraic number theory and knots in three-dimensional manifolds is reviewed. We consider closed geodesics on a finite-volume hyperbolic three-manifold. Subsequently, a notion of height in these knots is defined using the hyperbolic metric, and Chebotarev's density theorem is formulated for these knots.

Keywords: Prime numbers, Knot theory, Hyperbolic manifold, Analogy.

[1]Corresponding author

E-mail addresses: (Arash Rastegar) rastegar1352@gmail.com

پژوهش‌های ریاضی
سال ۱۴۰۴، دوره ۱۱، شماره ۳، ص ۱—۱۷
شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۲۸۸
DOI: xxxx
دانشگاه خوارزمی

قضیه چگالی چبوتارف و ژئودزیک‌های بسته در خمینه‌های سه بعدی هذلولوی

آرش رستگار [۱]

دانشکدهٔ ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۸/۲۵ تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۹/۲۶

چکیده: در این مقاله دیکشنری MKR بین اعداد اول از نظریهٔ جبری اعداد و گره‌ها در خمینه‌های سه بعدی مرور می شوند. ژئودزیک های بسته روی یک خمینهٔ سه بعدی هذلولوی با حجم متناهی را در نظر می گیریم. در ادامه مفهومی از ارتفاع را در این گره‌ها با استفاده از متر هذلولوی تعریف و قضیهٔ چگالی چبوتارف را برای این گره‌ها فرمول بندی می کنیم.

واژه‌هاي كليدي: اعداد اول، نظریه گره ها، خمینه هذلولوی، آنالوژی.

۱. سرآغاز

دیدگاه سه‌بعدی به حلقهٔ اعداد صحیح در میدان‌های اعداد جبری توسط تیت[۲]، آرتین[۳] و وردیر[۴] با تفسیر توپولوژیک نظریهٔ میدان‌های رده‌ای[۵] معرفی شد. در این فرمول‌بندی، نظریهٔ میدان‌های رده‌ای کلاسیک که توسط تاکاگی[۶] ثابت شده بود، توسط تیت و آرتین[۷] به‌عنوان یک دوگانگی پوانکاره[۸] در کوهومولوژی اتال[۹] طیف حلقهٔ اعداد صحیح یک میدان عددی بازفرمول‌بندی شد[۱].

---

[۱] نویسنده مسئول مقاله

(Arash Rastegar) rastegar1352@gmail.com

[2] John Tate
[3] M. Artin
[4] Verdier
[5] Class field theory
[6] Takagi
[7] E. Artin
[8] Poincaré duality
[9] Étale cohomology

این مماثلت بین گره‌ها و اعداد اول برای اولین بار توسط میزور[۱] و منین[۲] مطرح شد. کاپرانوف[۳] و رزنیکوف[۴] این مماثلت را برای بین میدان‌های اعداد و خمینه‌های سه‌بعدی مورد بررسی قرار دادند و آن را توپولوژی حسابی نام‌گذاری کردند.

در [۲]، [۳] و [۴]، میزور یک قضیهٔ چگالی چبوتارف را برای دنباله‌ای نامتناهی از گره‌های ثابت روی یک خمینه سه‌بعدی فرموله‌بندی کرد. مک‌مولن[۵][۶] قضیهٔ چگالی چبوتارف فرمول‌بندی‌شده توسط میزور را در چند حالت نشان داد.

این امر ما را به فکر فرمول‌بندی مجدد دیکشنری MKR[۶] برای ژئودزیک‌های بسته روی خمینه‌های سه‌بعدی هذلولوی انداخت. خمینه سه‌بعدی مذکور می‌تواند فشرده نباشد ولی باید با در نظر گرفتن یک دایره در بی‌نهایت فشرده شود. مثالی که در ذهن داریم، یک گره هذلولوی در کرهٔ سه‌بعدی (S^3) و یک متریک هذلولوی روی مکمل آن گره است. این متمم گره در S^3 معادل میدان اعداد گویا و گرهٔ هذلولوی، معادل مکان ارشمیدسی میدان $\mathbb{Q}$ است. ژئودزیک‌های بسته معادل اعداد اول متناهی هستند که بر اساس متر هذلولوی بر حسب طول مرتب شده‌اند. مثال دیگری دال بر این‌که این ژئودزیک‌های بسته می‌توانند نماینده گره باشند، کلاف دایره به همراه یک متر طبیعی روی یک رویه ریمانی هذلولوی بسته است که با متریک القایی یک خمینه سه بعدی هذلولوی است.

در نتیجه یک شار ژئودزیک در بالا داریم که تمام ژئودزیک‌های بسته رویه ریمانی به کلاف دایره بالاکشی می‌شوند. توجه کنید که این کلاف دایره روی یک رویه ریمانی پیچیده شده‌است. همچنین می‌توان خمینه‌هایی سه‌بعدی را در نظر گرفت که دور یک دایره با تارهای هذلولوی پیچیده شده‌اند.

این فضا را می‌توان به یک متر هذلولوی مجهز کرد که روی تارها انحنای -1 ایجاد کند. اگر این تاربندی با استفاده از وابرسانی[۷] شبه‌آنوسوف[۸] تعریف شود، ما یک خمینه هذلولوی فشرده داریم که قضیهٔ چگالی چبوتارف را ارضا می‌کند. خواهیم دید که این مورد آنالوگ یک خم روی میدان توابع از بعد یک است.

۲. دیکشنری MKR

انگیزه‌ی ما در مطالعه‌ی توپولوژی حسابی از مقاله‌ی توصیفی موریشیتا[۹] [۷] نشأت می‌گیرد. در ادامه، روش [۷] در ارایه‌ی دیکشنری MKR را دنبال خواهیم کرد. یک دایره مشابه یک میدان متناهی $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ است، زیرا دایره از لحاظ هموتوپییک معادل فضای آیلنبرگ[۱۰] — مک‌لین [۱۱] $K(\mathbb{Z},1)$ است. در نتیجه معادل حسابی آن $K(\widehat{\mathbb{Z}},1)$ است. یک پوشش دوری متناهی

$$S^1=\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}\to S^1=\frac{\mathbb{R}}{n\mathbb{Z}}$$

معادل یک توسیع دوری متناهی F_{q^n}/F_q است. در این معادل‌سازی تناظر زیر برقرار است:

$$l\in\pi_1(S^1)=\mathrm{Gal}(\mathbb{R}/S^1),\ l(x)=x+1\ (x\in\mathbb{R})\ \leftrightarrow$$

[1] B. Mazur
[2] Y. Manin
[3] Kapranov
[4] Reznikov
[5] Curtis McMullen
[6] Mazur–Kapranov–Reznikov
[7] diffeomorphism
[8] Pseudo-Anosov
[9] Morishita
[10] Eilenberg
[11] Eilenberg–MacLane space

$$Fr \in \pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)) = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q),\ Fr(x) = x^q\ (x \in \overline{\mathbb{F}}_q) \tag{۱.۲}$$

یک همسایگی لوله‌ای[1] $V = S^1 \times D^2$ (که در آن D^2 دیسک دو بعدی است) از S^1 است که با S^1 هم‌ارز هموتوپیک است. $V\backslash S^1$ هم‌ارز هموتوپیک با چنبره‌ی دو بعدی، یعنی $S^1 \times S^1$ است. از طرفی دیگر، برای یک حلقه‌ی صحیح pـادیک $(\mathcal{O}_p)$ با میدان باقیمانده‌ی $\mathbb{F}_q$ و میدان pـادیک K_p داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_p) \overset{\text{هموتوپیک}}{\simeq} \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q) \\ \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_p)\backslash\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q) = \mathrm{Spec}(K_p) \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_p) \leftrightarrow V \\ \mathrm{Spec}(K_p) \leftrightarrow \partial V \end{array} \right\} \tag{۲.۲}$$

در واقع، ما یک همانندی بین گروه‌های بنیادی آنها به شرح ذیل پیدا کردیم. برای ریختار طبیعی

$$\pi_1(\partial V) \to \pi_1(V) = \pi_1(S^1)$$

داریم: $\pi_1(S^1) = \langle a \rangle$ هسته‌ی آن گروه دوری نامتناهی تولید شده با یک حلقه

$$\alpha = \{a\} \times \partial D^2\ (a \in S^1)$$

است که نصف‌النهار نامیده می‌شود. برای $\beta = b$ $(b \in \partial D^2)$ یک مدار نامیده می‌شود. به طور مشابه تصویر معکوس

$$\beta = S^1 \times \{b\}\ (b \in \partial D^2)$$

یک مدار نامیده می‌شود. گروه $\pi_1(\partial V)$ یک گروه آبلی آزاد تولیدشده توسط α و β تحت رابطه‌ی $[\alpha, \beta] := \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1$ است. از طرف دیگر برای هسته‌ی ریختار

$$\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_p)) \to \pi_1(\mathrm{Spec}(K_p)) = \pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q))$$

را (I_p) گروه اینرسی می‌نامیم و مشابه قبل، تصویر معکوس σ از $Fr \in \pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q))$ نیز (یک توسیع) خودریختی فروبنیوس نام دارد. خارج قسمت رام[2] ماکسیمال از I_p که از لحاظ توپولوژیک تولیدشده با یک مونودرومی τ خارج‌قسمت رام ماکسیمال $\pi_1^{tame}(\mathrm{Spec}(K_p))$ از $\pi_1(\mathrm{Spec}(K_p))$ است، می‌توان τ و σ را تحت رابطه‌ی $\tau^{q-1}[\tau, \sigma] = 1$ تولید کرد.

جدول ۲-۱

V	$\leftrightarrow$	$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_p)$
∂V	$\leftrightarrow$	$\mathrm{Spec}(K_p)$
αنصف‌النهار	$\leftrightarrow$	τمونودرومی
βمدار	$\leftrightarrow$	σخودریختی فروبنیوس
$\pi_1(\partial V) = \langle \alpha, \beta \mid [\alpha, \beta] = 1 \rangle$	$\leftrightarrow$	$\pi_1^{tame}(\mathrm{Spec}(\mathbb{K}_p)) = \langle \tau, \sigma \mid \tau^{q-1}[\tau, \sigma] = 1 \rangle$

[1] Tubular neighborhood
[2] tame

گره، یک نشاندن یک ژئودزیک بسته یعنی S^1 به عنوان یک حلقه ژئودزیک در یک خمینه سه‌بعدی هذلولوی M است. از طرف دیگر، برای حلقه‌ی اعداد صحیح یک میدان عددی K از درجه‌ی متناهی روی $\mathbb{Q}$ این حقیقت که $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$، دارای بعد کوهومولوژیک ۳ (با تقریب ۲—تاب) است توسط م. آرتین و وردیر ثابت شد[۱] و نوعی دوگانگی پوانکاره‌ی سه‌بعدی در کوهومولوژی اتال بر آن حاکم است.

پس $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ را می‌توان به عنوان یک خمینه سه‌بعدی هذلولوی، روی مکمل لینکی روی یک خمینه هذلولوی نگاه کرد و آن را روی پوشش شاخه‌دار، پس‌کشی کرد.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K) & \leftrightarrow & \text{خمینه سه بعدی هذلولوی پیچیده شده روی لینکی در } S^3 \\ p\ (p \neq 0) & \leftrightarrow & \ell \subset S^3 \end{array} \qquad (۳.۲)$$

برای یک ایده‌آل اول $p(\neq 0)$ از $\mathcal{O}_K$ همراه با میدان باقیمانده‌ی $\mathbb{F}_p = \mathcal{O}_K/p$. می‌توان نگاشت طبیعی

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$$

را به عنوان یک گره از نقطه نظر (۱.۲) دید:

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K) \quad \leftrightarrow \quad \text{ژئودزیک بسته به شکل } S^1 \hookrightarrow M$$

مطابق قضیه‌ی هرمیت‌ــ مینکوفسکی می‌دانیم $\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})) = 1$. به خصوص با همانندی منتجه، از فرضیه‌ی پوانکاره، $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ به‌علاوه اول نامتناهی، را می‌توان به عنوان یک کره‌ی سه‌بعدی استاندارد به همراه یک گره‌ی هذلولوی K_∞ - که نقش اعداد اول نامتناهی را بازی می‌کندــ در نظر گرفت. در این همانندی ایده‌آل اول (p) از $\mathbb{Z}$ که در آن p یک عدد اول است، مانند یک ژئودزیک بسته در مکمل K_∞ است:

$$S^1 \hookrightarrow (S^3 \setminus K_\infty) \cup K_\infty = S^3 \leftrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \cup \{\infty\}$$

در اینجا می‌توان S^3 را به‌عنوان یک فشرده‌سازی $S^3 \setminus K_\infty$ دید. در این فشرده‌سازی ∞ را می‌توان به‌عنوان یک گره هذلولوی و مکان بی‌نهایت $\mathbb{Q}$ را به‌عنوان K_∞ دید.

برای یک ژئودزیک بسته K که در یک خمینه هذلولوی سه‌بعدی بسته M پیچیده شده‌است، X_K نماینده مکمل درون V_K (از یک همسایگی لوله‌ای از یک گره K در M)، یک خمینه سه‌بعدی فشرده با مرز ∂V_K است. گروه بنیادی آن

$$G_K := \pi_1(X_K) = \pi_1(M \setminus K)$$

است. گروه G_K «گروه گره» نام دارد. این گروه G_K نشان می‌دهد که K چگونه در M گره خورده‌است. در واقع، ویتن[۱]، گوردن[۲] و لوک[۳] نشان دادند برای گره‌های اول K و L در S^3 داریم:

$$G_K \simeq G_L \iff K \simeq L \quad (\text{در حد جهت روی گره}). \qquad (۲.۴)$$

[1] E. Witten
[2] C. Gordon
[3] J. Luecke

نصف‌النهار و مدار در یک گره K به‌معنای دو دور α و β روی

$$\partial X_K = \partial V_K$$

مشابه جدول ۱-۲ هستند. گروه

$$D_K := \pi_1(\partial X_K) = \langle \alpha, \beta \mid [\alpha, \beta] = 1 \rangle$$

«گروه پیرامونی» [۱] گره ژئودزیک K نام دارد. در حالت $M = S^3$، گروه G_K دارای نمایش ویرتینگر [۲] است. این امر نشان می‌دهد G_K با مزدوج‌های

$$I_K = \langle \alpha \rangle$$

تولید می‌شود.

از طرفی، با توجه به جدول ۱-۲، میدان$\mathfrak{p}$ـ ادیک $\mathrm{Spec}(K_p)$ برای یک ایده‌آل اول p از $\mathcal{O}_K$ نقش «مرز»

$$X_p := \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K) \setminus \{p\}$$

را بازی می‌کند و

$$G_{\{p\}} := \pi_1(X_p)$$

نشان می‌دهد که p چگونه در $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ گره خورده‌است. معادل حالتی که برای یک گره داشتیم، $G_{\{p\}}$ را «گروه اول p» می‌نامیم. مشابه قبل داریم:

$$G_{\{p\}} \simeq G_{\{q\}} \iff p = q \quad (\text{در حد جهت روی گره}). \tag{۲.۵}$$

معادل گروه پیرامونی D_K، می‌توان گروه تجزیه [۳]

$$D_{\{p\}} := \pi_1(\mathrm{Spec}(k_p))$$

را تعریف کرد. برای دقت بیشتر همانندی توان خارج‌قسمت رام ماکسیمال این گروه را در نظر گرفت، به‌عنوان یک همانندی از نمایش ویرتینگر، مشاهده می‌کنیم که $G_{\{p\}}$ از لحاظ توپولوژیک با مزدوج‌های گروه اینرسی $I_{\{(p)\}}$ تولید می‌شود:

جدول ۲-۲

$$\partial V_K \subset M \setminus V_K^\circ \qquad \iff \qquad \mathrm{Spec}(K_p) \subset \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K) \setminus \{p\}$$

$$\text{گروه پیرامونی}\ D_K \to G_K \qquad \iff \qquad \text{گروه تجزیه}\ D_{\{p\}} \to G_{\{p\}}$$

[1] peripheral
[2] Wirtinger representation
[3] decomposition group

برای یک میدان عددی K و یک مجموعهٔ متناهی S از ایده‌آل‌های اول، گروه بنیادی اتال

$$\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K \setminus S))$$

که همان گروه گالوا

$$G_S = \mathrm{Gal}(K_S/K)$$

توسیع ماکسیمال K_S روی K که خارج از S بدون انشعاب [۱] است، مجموعهٔ گره‌های نامتناهی را نیز می‌توان به‌عنوان گروه لینک دید:

$$\text{گروه لینک}\, G_L = \pi_1(M \setminus S) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{گروه گالوا}\, G_S = \mathrm{Gal}(K_S/K)$$

مفهوم گروه گالوا در حالت کلی یک مفهوم جامع است. اینکه آیا $G_{\{(p)\}}$ با تولید متناهی است یا خیر مشخص نیست.

با ارجاع به مقاله‌ی موریشیتا، می‌توانیم یک خمینه هذلولوی پیچیده‌شده روی S^1 را به‌عنوان یک خم جبری C حول یک میدان متناهی $\mathbb{F}_q$ در نظر بگیریم. این کار را می‌توان با دنباله‌ی دقیق زیر انجام داد:

$$1 \longrightarrow \pi_1(C \otimes \overline{\mathbb{F}}_q) \longrightarrow \pi_1(C) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)) \longrightarrow 1,$$

و می‌توان C را از لحاظ هموتوپیک به شکل یک کلاف خم روی "دایره" $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ به‌همراه تار $C \otimes \overline{\mathbb{F}}_q$ دید.

۳. دیکشنری بین اعداد درهم‌تنیدگی و سمبل‌های لژاندر

مبانی نظریه‌ی گره و نظریه‌ی جبری اعداد را می‌توان در مقالات گاوس در مورد اعداد درهم‌تنیدگی [۸] و مانده‌های مربعی[۲] [۹] یافت. وقتی این دو مفهوم را از دیدگاه آنالوژی بخش قبل نگاه می‌کنیم، شباهت نزدیکی بین آن‌ها می‌بینیم.

یک راه برای یافتن اعداد درهم‌تنیدگی این است که آن‌ها را مانند یک مونودرومی نگاه کنیم؛ برای رفع مشکل نامشخص بودن علامت عدد درهم‌تنیدگی، که در اثر جهت به‌وجود می‌آید، اعداد درهم‌تنیدگی را به پیمانه‌ی ۲ نگاه می‌کنیم. فرض کنید $K \cup L$ یک لینک دارای دو مؤلفه است. این لینک را می‌توان به‌عنوان اجتماع دو برگ در $S^3 \setminus K_\infty$ در نظر گرفت. اگر پوشش یکتای دوتایی بدون انشعاب

$$Y_K \longrightarrow X_K := S^3 \setminus K$$

را در نظر بگیریم، می‌توان باقی‌مانده‌ی عدد درهم‌تنیدگی $\mathrm{lk}(K, L)$ بر ۲ را به‌عنوان تبدیل پوششی مشخص‌شونده با عرض β_L حول L توصیف کرد:

$$\pi_1(X_K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(Y_K/X_K) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \qquad [\beta_L] \longmapsto \mathrm{lk}(K, L) \bmod 2.$$

روش دیگر برای رسیدن به مفهوم عدد درهم‌تنیدگی استفاده از عدد تقاطع [۳] K به‌همراه سطح سایفرت Σ [۴] از

[1] unramified
[2] Quadratic residues
[3] Intersection number
[4] Seifert surface

L، یعنی $\partial\Sigma = L$ است. برای مثال، می‌توان عدد درهم‌تنیدگی را به‌عنوان ضرب فنجانی [۱] کلاس‌های کوهمولوژی K و Σ برای

$$X_L := S^3 \setminus L$$

و Σ در نظر گرفت:

$$H^2_c(X_L, \mathbb{F}_2) \times H^1(X_L, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cup} H^3_c(X_L, \mathbb{F}_2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
$$([K], [\Sigma]) \longmapsto [K] \cup [\Sigma] = \mathrm{lk}(K, L) \bmod 2.$$

از طرفی دیگر، فرض کنید p و q دو عدد اول فرد متمایز هستند. توسعه‌ی مربعی $\mathbb{Q}(\sqrt{p})/\mathbb{Q}$ روی p منشعب می‌شود اگر و تنها اگر باقی‌مانده‌ی p بر ۴ برابر با یک باشد. فرض کنید باقی‌مانده‌ی p و q بر ۴ برابر با یک است. مشابه قبل،

$$Y_p \longrightarrow X_p := \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \setminus \{(p)\} = \mathrm{Spec}\big(\mathbb{Z}[1/p]\big)$$

پوشش دوتایی اتال یکتا باشد که در آن Y_p طیف نرمال‌سازی $\mathbb{Z}[1/p]$ در $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ باشد. با توجه به جدول (۲.۲)، می‌توانیم باقی‌مانده‌ی اعداد درهم‌تنیدگی p و q، که ما آن را $\mathrm{lk}_2(p, q)$ می‌نامیم، با استفاده از کلاس تزویج خودریختی فروبنیوس روی q در

$$\mathrm{Gal}(Y_p/X_p) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

تعریف کرد:

$$\pi_1(X_p) \longrightarrow \mathrm{Gal}(Y_p/X_p) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
$$[\sigma_q] \longmapsto \mathrm{lk}_2(p, q)$$

چون $p \iff \sigma_q(\sqrt{p}) = \sqrt{p} \iff \sigma_q|_{Y_p} = \mathrm{id}_{Y_p}$ که در آن p یک مانده‌ی مربعی به پیمانه‌ی q است، داریم:

$$(-1)^{\mathrm{lk}_2(p,q)} = \left(\frac{p}{q}\right). \qquad (۱.۳)$$

مشابه حالتی که در لینک داشتیم، سمبل لژاندر نیز به عنوان عدد تقاطع دیده می‌شود. اولا، ایده‌آل اول (q) را به عنوان دوگان یک «نصف‌النهار» حول (q) در نظر می‌گیریم. عبارت دیگر، مشخصه‌ی کومر [۲] که به صورت

$$\chi_q : \mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}_q(\sqrt{q})/\mathbb{Q}_q\big) \longrightarrow \mathbb{C}^*$$
$$\frac{\tau(\sqrt{q})}{\sqrt{q}} = (-1)^{\chi_q(\tau)}$$

تعریف می‌شود. برای

$$X_q := \mathrm{Spec}\big(\mathbb{Z}[1/q]\big)$$

---

[1] Cup product

[2] Kummer character

نگاشت مرز

$$\partial : H^1(X_q, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\sim} H^2_c\big(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_q), \mathbb{F}_2\big) \simeq \mathrm{Hom}\big(\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_q(\sqrt{q})/\mathbb{Q}_q), \mathbb{F}_2\big)$$

را در نظر بگیرید و کلاس یک «سطح سایفرت» از (q) را به صورت

$$[\Sigma] \in H^1(X_q, \mathbb{F}_2) \text{ به طوری که } \partial([\Sigma]) = \chi_q$$

تعریف می‌کنیم. از طرفی دیگر، می‌توان یک «گره» را از طریق (p) که

$$p \in \mathbb{Q}_q^\times/(\mathbb{Q}_q^\times)^2 = H^1(\mathbb{Q}_q, \mathbb{F}_2)$$

شناسایی کرد و کلاس

$$[(p)] \in H^2_c(X_q, \mathbb{F}_2)$$

را از طریق تصویر آن تحت نگاشت $H^1(\mathbb{Q}_q, \mathbb{F}_2) \to H^2_c(X_q, \mathbb{F}_2)$ تعریف کرد. در این تعریف H_c^* نماینده‌ی یک کوهمولوژی اتال با محمل فشرده است که اول نامتناهی در آن وارد بازی شده است. در حالت لینک، می‌توان عدد درهم‌تنیدگی در باقی‌مانده‌ی ۲ را به صورت ضرب فنجانی

$$[\Sigma] \cup [(p)]$$

تعریف کرد:

$$\begin{gathered} H^2_c(X_q, \mathbb{F}_2) \times H^1(X_q, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cup} H^3_c(X_q, \mathbb{F}_2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ ([(p)], [\Sigma]) \longmapsto [(p)] \cup [\Sigma] = \mathrm{lk}_2(K, L). \end{gathered}$$

از این رابطه مجددا می‌توان رابطه‌ی (۳.۱) را نتیجه گرفت (رجوع کنید به [۱۰]). در نتیجه، سمبل لژاندر چیزی جز عدد درهم‌تنیدگی به پیمانه‌ی ۲ نیست. قانون تقابل گاوس نیز تبدیل به تقارن اعداد درهم‌تنیدگی می‌شود:

سمبل لژاندر $\iff$ اعداد درهم‌تنیدگی

$$\mathrm{lk}(K, L) = \mathrm{lk}(L, K) \qquad \iff \qquad \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) \quad (p, q \equiv 1 \pmod 4). \tag{۲.۳}$$

در بین تمام اثبات‌هایی که گاوس برای قانون تقابل مربعی ارائه کرد، روشی برای نمایش سمبل لژاندر با استفاده از جمع گاوسی وجود دارد:

$$\left(\sum_{x \in \mathbb{F}_p} \zeta^{x^2}\right)^{q-1} = \left(\frac{p}{q}\right), \tag{۳.۳}$$

که در آن ζ یک pامین ریشه‌ی واحد اولیه در $\overline{\mathbb{F}}_q$ است. توجه داریم که جمع گاوسی $\sum_{x\in\mathbb{F}_p} \zeta^{x^2}$ روی $\mathbb{F}_p$معادل

انتگرال گاوسی $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ است. از طرف دیگر، گاوس عبارت انتگرالی زیر در مورد عدد درهم‌تنیدگی را در مطالعات الکترومغناطیسی خود نشان داد [۸]:

$$\int_{x\in K}\int_{y\in L}\omega(x-y)=\mathrm{lk}(K,L).$$

که در آن

$$\omega=\big(4\pi\|x\|^3\big)^{-1}\big(x_1\,dx_2\wedge dx_3+x_2\,dx_3\wedge dx_1+x_3\,dx_1\wedge dx_2\big).$$

در حالت نظریه پیمانه‌ای [1] [۱۱] می‌نویسیم. در واقع برای یک لینک قاب‌دار داریم:

(۳.۴)

$$\int_{A(\mathbb{R}^3)}\exp\Big(\frac{\sqrt{-1}}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}a\wedge da+\sqrt{-1}\int_{K_1}a+\sqrt{-1}\int_{K_2}a\Big)\,Da=\exp\Big(\pi\sqrt{-1}\sum_{1\le i,j\le 2}\mathrm{lk}(K_i,K_j)\Big).$$

در اینجا انتگرال سمت چپ انتگرال فاینمن[2] روی فضای $A(\mathbb{R}^3)$ از ۱ ـ فرم‌های دیفرانسیل با مقدار حقیقی روی $\mathbb{R}^3$ است. چون انتگرال‌های $\int_{\mathbb{R}^3}a\wedge da$ و $\int_{K_1}a$ به‌ترتیب فرم خطی و فرم مربعی روی $A(\mathbb{R}^3)$ هستند، رابطه‌ی (۳.۴) معادل بی‌نهایت‌بعدی انتگرال گاوس است. در نتیجه بین (۳.۳) و (۳.۴) یک همانندی داریم.

۴. همانندی بین گروه گالوا و گروه لینک

همان‌طور که در بخش ۱ گفته شد، ایده‌ی ما همانند دانستن گروه گالوا

$$G_S=\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})\setminus S)\qquad S=\{(p_1),\dots,(p_n)\}$$

و گروه لینک

$$G_L=\pi_1(S^3\setminus L),\quad L=K_1\cup\ldots\cup K_n$$

است. چون گروه G_S گروه بزرگی است فقط خارج‌قسمت pro-ℓ آن $G_S(\ell)$ را برای عدد اول ℓ در نظر می‌گیریم. با مراجعه به تحقیقات شفرویچ[3] و کخ[4] می‌توان درک بهتری از توسیع‌های pro-ℓ میدان‌های عددی به‌دست آورد [۱۲]. در واقع، ما یک همانندی بین یک قضیه از کخ روی $G_S(\ell)$ و یک قضیه از جان میلنور روی G_L به‌دست آوردیم. در ادامه منظور از

$$\{G^{(d)}\}_{d\ge 1}$$

سری مرکزی پایینی یک گروه توپولوژیک G است. این سری به‌صورت

$$G^{(1)}:=G,\qquad G^{(d+1)}:=[G^{(d)},G]$$

---

[1] gauge theory

[2] R. Feynman

[3] I. Shafarevich

[4] H. Koch

تعریف می‌شود که در آن منظور از کروشه، زیرگروه بسته‌ای است که از لحاظ توپولوژیک توسط

$$[a,b], \qquad a \in G^{(d)},\ b \in G$$

تولید شده است.

اگر

$$L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$$

یک لینک دارای n مؤلفه در S^3 و G_L گروه لینک آن باشد، چن [1] و میلنور[2] اطلاعات زیر را در مورد نمایش خارج‌قسمت پوچ‌توان G_L به‌دست آوردند.

قضیه ۱.۴ [۲۳]. اگر F یک گروه آزاد تولیدشده توسط

$$x_1, \ldots, x_n$$

باشد، برای هر $d \geq 1$ یک کلمه‌ی

$$y_i^{(d)}$$

از $x_1, \ldots, x_n$ موجود است که:

$$y_i^{(d)} \equiv y_i^{(d+1)} \pmod{F^{(d)}} \qquad (1 \leq i \leq n),$$

و

$$G_L/G_L^{(d)} = \big\langle x_1, \ldots, x_n \,\big|\, [x_i, y_i^{(d)}] = 1\ (1 \leq i \leq n),\ F^{(d)} = 1 \big\rangle.$$

در اینجا $x_1, \ldots, x_n$ یک پایه برای گروه آزاد F است. در این پایه، نمایانگر یک نصف‌النهار α_i از K_i و $y_i^{(d)}$ یک کلمه در F است که تصویر عرض β_i از K_i را در $G_L/G_L^{(d)}$ نمایش می‌دهد. در ضمن رابطه‌ی زیر را داریم:

$$\beta_j \equiv \prod_{i \neq j} \alpha_i^{\operatorname{lk}(K_i,K_j)} \pmod{G_L^{(2)}}.$$

قضیه‌ی ۱.۴ میلنور قابل تعمیم برای هر لینک در هر هومولوژی کروی ۳ بعدی است [۱۴]. قضیه‌ای که در ادامه مطرح می‌کنیم به ما می‌گوید که هر لینک پس از کامل‌سازی pro-ℓ از گروه لینک، که در آن ℓ یک عدد اول است، در یک هومولوژی کروی ۳ بعدی مانند یک لینک تافته [3] خالص است.

قضیه‌ی ۲.۴ [۱۵]. اگر

$$L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$$

یک لینک دارای n مؤلفه در یک هومولوژی کروی ۳ بعدی M باشد، به ازای عدد اول ℓ،$\hat{G}_L(M)$ را کامل‌سازی pro-ℓ گروه لینک آن را فرض کنید. آنگاه گروه pro-ℓ مربوط به $\widehat{G}_L(M)$ دارای نمایش زیر است:

$$\widehat{G}_L(M) = \big\langle x_1, \ldots, x_n \,\big|\, [x_1, y_1] = \cdots = [x_n, y_n] = 1 \big\rangle,$$

---

[1] K.T. Chen

[2] J. Milnor

[3] braid

که در آن x_i یک نصف‌النهار از K_i و y_i کلمه‌ای است که عرض K_i را در pro-ℓ نمایش می‌دهد.

با اعمال روش آنیک[1] [۱۶] به قضیه‌ی ۲.۴ می‌توان به قضیه‌ی ۳.۴ (ترجمه‌ی pro-ℓ فرضیه‌ای از موراسوگی [۱۷، ۱۸]) که در مورد ساختار سری‌های مرکزی پایینی از گروه $\widehat{G}_L(M=S^3)$ است رسید. فرض کنید $D_L(\ell)$ یک دیاگرام درهم‌تنیدگی به پیمانه‌ی ℓ باشد، به عبارت دیگر، گرافی باشد که رأس‌های آن مؤلفه‌های L، به‌همراه دو رأس K_i و K_j باشد که این رأس وقتی به هم متصلند که $\mathrm{lk}(K_i,K_j)\not\equiv 0 \pmod{\ell}$ به پیمانه‌ی ℓ باشد.

قضیه‌ی ۳.۴ [۱۵]. اگر گراف $D_L(\ell)$ همبند باشد، آنگاه $\widehat{G}_L^{(d)}/\widehat{G}_L^{(d+1)}$ یک $\mathbb{Z}_\ell$ـ مدول آزاد است که $\mathbb{Z}_\ell$ـ رتبه‌ی آن a_d در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\prod_{d\geq 1}(1-t^d)^{a_d}=(1-t)(1-(n-1)t).$$

به‌خصوص همریختی

$$\widehat{G}_L^{(d)}/\widehat{G}_L^{(d+1)}\simeq \widehat{F}_1^{(d)}/\widehat{F}_1^{(d+1)}\times \widehat{F}_{n-1}^{(d)}/\widehat{F}_{n-1}^{(d+1)}$$

را برای هر $d\geq 1$ داریم که در آن $\widehat{F}_r$ گروه pro-ℓ از رتبه‌ی r است.

از طرف دیگر، برای یک عدد اول ℓ، فرض کنید $S=\{(p_1),\dots,(p_n)\}$ یک مجموعه‌ی متناهی شامل n عدد اول باشد، به‌طوری‌که $p_i\equiv 1$ برای هر i به پیمانه‌ی ℓ باشد. اگر $G_S(\ell)$ نماد یک خارج‌قسمت pro-ℓ ماکسیمال از $\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})\setminus S)$ باشد، به عبارت دیگر،

$$G_S(\ell)=\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_S(\ell)/\mathbb{Q}),$$

که در آن $\mathbb{Q}_S(\ell)$ خارج‌قسمت pro-ℓ ماکسیمال بدون انشعاب روی $\mathbb{Q}$ است. کخ قضیه‌ی ۴.۴ را در مورد $G_S(\ell)$ اثبات کرد.

قضیه‌ی ۴.۴ [۱۲، ۱۹]. گروه pro-ℓ $G_S(\ell)$ نمایش زیر را دارد:

$$G_S(\ell)=\left\langle x_1,\dots,x_n \,\middle|\, x_i^{p_i-1}[x_i,y_i]=1\ (1\leq i\leq n)\right\rangle$$

که در آن x_i مونودرومی τ_i روی p_i و y_i یک توسعه از خودریختی فروبنیوس σ_i روی p_i را نمایش می‌دهد. عدد درهم‌تنیدگی

$$\mathrm{lk}_\ell(p_i,p_j)\in\mathbb{F}_\ell$$

به پیمانه‌ی ℓ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\sigma_j\equiv\prod_{i\neq j}\tau_i^{\mathrm{lk}_\ell(p_ip_j)}\pmod{G_S(\ell)^{(2)}},\qquad \zeta_\ell^{\mathrm{lk}_\ell(p_ip_j)}=\left(\frac{p_j}{p_i}\right)_\ell,$$

که در آن ζ_ℓ یک ریشه‌ی ℓام واحد اول است که به‌طور مناسب انتخاب شده‌است و $\left(\frac{p_j}{p_i}\right)_\ell$ برابر ℓامین توان سمبل مانده در $\mathbb{Q}_{p_i}$ است. همانندی بین قضیه‌ی ۴.۴ با قضیه‌ی ۱.۴ و ۲.۴ واضح است و همانندی بین اعداد درهم‌تنیدگی

[1] D. Anick

و سمبل مانده‌ی توان را از دید نظریه‌ی گروه تشریح می‌کند. عبارت‌های

$$x_i^{p_i-1}[x_i, y_i] = 1, \qquad [x_i, y_i] = 1$$

که در این نمایش ظاهر شده‌اند نیز به‌ترتیب از آن‌چه در جدول ۲.۲ گفته شد، یعنی گروه بنیادی موضعی $\pi_1(\partial V_{K_i})$ (که V_{K_i} همسایگی لوله‌ای K_i است) و $\pi_1^{\text{tame}}(\text{Spec}(\mathbb{Q}_{p_i}))$ می‌آیند. به‌علاوه قضیه‌ی میلنور برای هر لینک در هر هومولوژی سه‌بعدی قابل تعمیم است. قضیه‌ی کخ نیز قابل تعمیم به یک مجموعه‌ی متناهی از اعداد اول در یک میدان عددی است. فرض کنید K یک میدان عددی شامل یک ریشه‌ی واحد اول ℓام، و

$$S = \{p_1, \dots, p_n\}$$

یک مجموعه‌ی متناهی از عدد اول متمایز باشد، به‌طوری‌که

$$N_{p_i} := \#(\mathcal{O}_K/p_i) \equiv 1 \pmod{\ell} \quad \text{برای هر i}$$

و

$$B_S := \{\, \alpha \in K^\times \mid (\alpha) = \mathfrak{a}^\ell \ (\exists\, \mathfrak{a} : K \text{ ایده‌آل}),\ \alpha \in (K_{\mathfrak{p}_i}^\times)^\ell \,\}$$

قضیه‌ی ۵.۴ [۱۲]: فرض کنید K شامل یک ریشه‌ی ℓام واحد اولیه باشد،$B_S = 1$ و عدد کلاس K نسبت به ℓ اول باشد. آنگاه خارج‌قسمت ℓ-pro ماکسیمال $G_S(K)(\ell)$ از $\pi_1(\text{Spec}(\mathcal{O}_K))$ نمایش زیر را دارد:

$$G_S(K)(\ell) = \left\langle x_1, \dots, x_n \,\middle|\, x_1^{N_{\mathfrak{p}_1}-1}[x_1, y_1] = \cdots = x_n^{N_{\mathfrak{p}_n}-1}[x_n, y_n] = 1 \right\rangle,$$

که در آن x_i یک مونودرومی τ_i روی $\mathfrak{p}_i$ و y_i یک توسیع خودریختی فروبنیوس σ_i روی $\mathfrak{p}_i$ را نمایش می‌دهد. یافتن معادل فرضیه‌ی موراسوگی برای گروه گالوا $G_S(\ell)$ یک مسأله‌ی ظریف‌تر است. در واقع، نمی‌توان انتظار وجود یک همانندی برای اول‌ها در حالت $\ell > 2$ را داشت. زیرا عدد درهم‌تنیدگی $\text{lk}_\ell(p_i, p_j)$ متقارن نیست. با این وجود، لابوت[1] قضیه‌ی ۶.۴ را روی سری‌های مرکزی ℓـ پایینی $\{G_S(\ell)_d\}$ از $G_S(\ell)$ ثابت کرده است که به شکل

$$G_S(\ell)_1 := G_S, \qquad G_S(\ell)_{d+1} := \big(G_S(\ell)_d\big)^\ell [G_S(\ell)_d, G_S]$$

است. گراف درهم‌تنیدگی $D_S(\ell)$ از S به پیمانه‌ی ℓ با استفاده از گرافی تعریف می‌شود که رأس‌های آن اول‌های S باشد و دو رأس (p_i) و (p_j) در صورتی به هم متصلند که $\text{lk}_\ell(p_i, p_j) \neq 0$.

قضیه‌ی ۶.۴ [۲۰]: فرض کنید $\ell > 2$ و برای $d \geq 1$ قرار دهید $a_d = \dim_{\mathbb{F}_\ell} G_S(\ell)_d / G_S(\ell)_{d+1}$. فرض کنید شرایط زیر در مورد گراف $D_S(\ell)$ برقرار باشد:

۱. رأس‌های $p_1, p_2, \dots, p_n$ یک دور $p_1 p_2 \dots p_n p_1$ تشکیل دهند.

۲. اگر i, j هر دو فرد باشند، آنگاه $p_i p_j$ یک یال $D_S(p)$ نیست.

۳. $l_{12} l_{23} \dots l_{n-1,n} l_{n,1} \neq l_{1,n} l_{2,1} \dots l_{n,n-1}$، برای

$$l_{ij} := \text{lk}_\ell(p_i, p_j),$$

[1] J. Labute

برقرار باشد.

در آن صورت رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\prod_{d\geq 1}(1-t^d)^{a_d} = (1-t)(1-nt+nt^2).$$

برای حالت‌های $p=2$ و $p_i \equiv 1 \pmod 4$ چون عدد درهم‌تنیدگی به پیمانه‌ی ۲ متقارن است انتظار وجود یک همانند فرضیه‌ی موراسوگی[1] را برای پالایش زاسنهاوس[2] $G_S(2)$ داریم، اما نتیجه‌ای به این شکل هنوز برای $D_S(2)$ وجود ندارد. برای مطالعه‌ی عدد درهم‌تنیدگی روی $G_S(\ell)$ از روی $D_S(\ell)$ مراجعه کنید به [۲۱].

۵. فرمول‌بندی مجدد دیکشنری MKR

در ابتدا، می‌خواهیم دیکشنری مماثلت ابتدایی بین خمینه‌های سه‌بعدی هذلولوی و حلقه‌های عددی را مجددا فرمول‌بندی کنیم [۳، ۴، ۲۲، ۲۳]. هدف از این کار به‌دست آوردن دیکشنری بین پوشش‌های خمینه‌های سه‌بعدی هذلولوی و توسعه‌یافته‌ی میدان‌های عددی است.

$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)\cup\{v\vert\infty\}$	$\leftrightarrow$	خمینه سه بعدی هذلولی $(M\setminus\{K_i\}_i)\cup\{K_i\}_i$
$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})\cup\{\infty\}$	$\leftrightarrow$	متمم گره هذلولوی روی کره هذلولی $(S^3\setminus K_0)\cup K_0$
اول $\mathfrak{p}$	$\leftrightarrow$	ژئودزیک بسته K
مجموعه اولها $S=\{p_1,\ldots,p_n\}$	$\leftrightarrow$	اجتماع ژئودزیک‌های بسته از هم مجزا $L=K_1\sqcup\cdots\sqcup K_n$
حلقه صحیح $\mathfrak{p}$ـ ادیک $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$	$\leftrightarrow$	همسایگی لوله‌ای V_K
میدان $\mathfrak{p}$ـ ادیک $\mathrm{Spec}(K_\mathfrak{p})$	$\leftrightarrow$	مرز ∂V_K
$K^\times \to I_k = \bigoplus_p (a)$	$\leftrightarrow$	$C_2(M)\to C_1(M);\ \Sigma\mapsto\partial\Sigma$
H_K	$\leftrightarrow$	$H_1(M)$
$\mathcal{O}_K^\times$	$\leftrightarrow$	$H_2(M)$
$\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K))$	$\leftrightarrow$	$\pi_1(M\setminus\{K_i\}_i)$
$\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)\setminus S)$	$\leftrightarrow$	$\pi_1(M\setminus L)$
نظریه رده‌ای پایه بدون انشعاب	$\leftrightarrow$	یکریختی هورویچ[1]
$H_k\cong \mathrm{Gal}(K^a/K)$	$\leftrightarrow$	$H_1(M)\cong \mathrm{Gal}(M^a/M)$
k میدان رده‌ای هیلبرت K^a	$\leftrightarrow$	M پوشش آبلی ماکسیمال M^a

مطابق قضیهٔ الکساندر، هر خمینه ۳ بعدی بسته، همبند و جهت‌پذیر به شکل یک پوشش متناهی S^3 با انشعاب یک لینک است. دقیقا مانند یک میدان عددی که یک توسیع متناهی از $\mathbb{Q}$ با انشعاب تعداد متناهی عدد اول است.

[1] Murasugi conjecture
[2] Zassenahus filtration

در نتیجه، انتظار داریم که یک همانندی مفهومی بین پوشش‌های خمینه‌های سه بعدی و توسیع‌های میدان‌های عددی باشد.

در ادامه با اتکا به دیکشنری مذکور، در مورد همانندی نظریه هیلبرت در بحث توپولوژی خمینه‌های سه بعدی می‌خواهیم بپردازیم. نظریه هیلبرت ساختار تجزیه‌ای یک عدد اول در یک توسیع میدان‌های عددی را مورد بحث قرار می‌دهد. مشابها، یک همانندی توپولوژیک نظریه هیلبرت، که ساختار تجزیه‌ای یک گره را در پوشش یک خمینه سه بعدی بیان می‌کند، وجود دارد.

اگر $f : N \to M$ یک پوشش برای یک خمینه سه بعدی بسته از درجه متناهی n باشد که روی لینک L منشعب شده‌است، می‌توان فرض کرد که یک لینک هذلولوی روی M و یک متر هذلولوی به همراه یک متریک هذلولوی روی مکمل آن وجود دارد. همین ساختار را می‌توان روی N القا کرد. فرض کنید L اجتماع از ژئودزیک‌های بسته و K یک ژئودزیک بسته هذلولوی در M باشد که یک مؤلفه از L یا کاملا مجزا از آن باشد. فرض کنید $f^{-1}(K) = K_1 \cup \cdots \cup K_r$ یک لینک داری $r = r(K)$ مولفه باشد. فرض کنید V_K یک همسایگی لوله‌ای از K و V_i یک مولفه همبندی از $f^{-1}(V_K)$ باشد که شامل K_i است. اگر K_i شامل $f^{-1}(V_K)$ باشد، V_i یک مؤلفه همسایگی لوله‌ای از K_i است، با در نظر گرفتن $b \in \partial V_K$ به‌عنوان نقطه پایه و $f^{-1}(b) = \{b_1, \ldots, b_n\}$ و همچنین نمایش مونودرومی

$$\psi : G_L = \pi_1(M \setminus L, b) \longrightarrow \mathrm{Aut}(f^{-1}(b)).$$

پوشش متناهی $g : \bar{N} \to N$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $f \circ g : \bar{N} \to M$ یک پوشش گالوا منشعب‌شونده روی L باشد. با فرض $G = \mathrm{Gal}(\bar{N}/M), H = \mathrm{Gal}(\bar{N}/N)$، ψ روی G فاکتورگیری می‌شود و از طریق نمایش جایگشتی G روی $H\backslash G = \{H\sigma_1, ..., H\sigma_n\}$ شناسایی می‌شود. برای یک گره $\bar{K}$ در $\bar{N}$ روی K، گروه تجزیه‌ی $\bar{K}$ را تعریف کرد:

$$D(\bar{K}) := \{\sigma \in G \mid \sigma(\bar{K}) = \bar{K}\}.$$

هر $\sigma \in D(\overline{K})$ یک تبدیل پوششی از $\overline{K}$ به K القا می‌کند. در ضمن همریختی

$$D(\bar{K}) \ni \sigma \mapsto \sigma|_{\overline{K}} \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$$

را نیز داریم. گروه اینرسی $\overline{K}$ به صورت زیر است:

$$I(\overline{K}) := \{\sigma \in D(\overline{K}) \mid \sigma|_{\overline{K}} = id_{\overline{K}}\}.$$

برای انتخاب دیگری از $\overline{K}$ روی K، $I(\overline{K})$ و $G(\overline{K})$ در حد مزدوج شدن تغییر می‌کنند. مجموعهٔ مدارهای O_j از $f^{-1}(b)$ تحت عمل $D(\overline{K})$ از طریق ψ را می‌توان از مجموعهٔ گره‌های K_i شناسایی کرد:

$$f^{-1}(b)/D(\overline{K}) \simeq \{K_1, \ldots, K_r\}, \qquad \psi(D(\overline{K}))(b_j) \mapsto q(\sigma_j(\overline{K})).$$

از لحاظ هندسی، مدار O_j مربوط به K_j با مجموعه‌ای از b_iها که $b_i \in \partial V_j$ باشند مشخص شده‌اند. اگر $f(K_j)$ درجهٔ پوششی K_j روی K باشد و شاخص انشعاب $e(K_j)$ مربوط به K_j را به صورت $(\#O_j/f(K_j))$ تعریف کنیم، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$n = \sum_{j=1}^{r} e(K_j)\, f(K_j).$$

برای یک پوشش گالوا $f : N \to M$ به همراه گروه گالوا G، شاخص‌های انشعاب و درجه‌های پوشش مستقل

از K_j ها بوده‌اند و به ترتیب برابر با $e(k)$ و $f(k)$ هستند.

قضیهٔ ۱.۵ ([۲۴])): اگر $f : N \to M$ یک پوشش گالوا باشد، دنباله‌ی دقیق کوتاه زیر را داریم:

$$1 \to I(K_j) \to D(K_j) \to \mathrm{Gal}(K_j/K) \to 1,$$

که با تغییرات زیر مشابه تعاریف ما می‌شود:

$$\#I(K_j) = e(K), \qquad \#D(K_j) = e(K)f(K), \qquad n = e(K)f(K)r(K).$$

حال فرض کنید $\pi_1(M \setminus L)$ به طور نرمال با نصف‌النهارهای مؤلفه‌های L تولید شده‌است. این شرط وقتی برقرار است که M یک کره‌ی همولوژی سه بعدی (نمایش ویرتینگر) باشد. در آن صورت:

قضیه ۵.۲ ([۲۴]): برای هر کلاس ازوداج C از $\mathrm{Gal}(N/M)$، تعداد نامتناهی از ژئودزیک‌های بسته K در $M \setminus L$ وجود دارد. به طوری که کلاس ازوداج تصویر K در $\mathrm{Gal}(N/M)$ تحت نگاشت

$$\pi_1(M \setminus L) \to \mathrm{Gal}(N/M)$$

برابر با C است.

مک‌مولن نسخه زیر از قضیه‌ی چبوتارف را اثبات کرده‌است که در اینجا به زبان ژئودزیک‌های بسته فرمول‌بندی کرده‌ایم:

قضیه ۵.۳ ([۶]): گره‌های K در $M \setminus L$ که به ترتیب طول هذلولوی مرتب شده‌اند، به‌طور مناسب توزیع شده‌اند. یعنی تعداد ژئودزیک‌های K از یک کلاس ازوداج C در $\mathrm{Gal}(N/M)$ تحت نگاشت

$$\pi_1(M \setminus L) \to \mathrm{Gal}(N/M)$$

متناسب با $\#C/\#\,\mathrm{Gal}(N/M)$ است.

مراجع

[1] Mazur, B.,1973. *Notes on étale cohomology of number fields*. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure.

[2] Kapranov, M., 1996. *Analogies between number fields and 3-manifolds*. Unpublished note.

[3] Reznikov, A., 1997. *Three-manifolds class field theory (Homology of coverings for a nonvirtually b 1-positive manifold)*. Selecta Mathematica, 3(3), pp. 361–399.

[4] Reznikov, A.,2000. *Embedded incompressible surfaces and homology of ramified coverings of three-manifolds*. Selecta Mathematica, 6(1), p. 1.

[5] Mazur, B.,2008. *Finding meaning in error terms*. Bulletin of the American Mathematical Society, 45(2), pp. 185–228.

[6] McMullen, C.T.,2013. *Knots which behave like the prime numbers*. Compositio Mathematica, 149(8), pp. 1235–1244.

[7] Morishita, M.,2009. *Analogies between knots and primes, 3-manifolds and number rings*. arXiv preprint arXiv:0904.3399.

[8] Gauss, C.F.,1833. *Zur Mathematischen Theorie der Electrodynamische Wirkungen*. Collected Works Vol. 5. Königlichen Gesellschaft des Wissenschaften, Göttingen, p. 605.

[9] Gauss, C.F.,1966. *Disquisitiones arithmeticae*. Vol. 157. Yale University Press.

[10] Waldspurger, J.-L.,1976. *Entrelacements sur Spec (Z)*. Bull. Sc. Math., 100, pp. 113–139.

[11] Kohno, T., 2002. *Conformal field theory and topology*. Vol. 210. American Mathematical Society.

[12] Koch, H.,1970. *Galoische Theorie der p–Erweiterungen*. Berlin VEB, Deutscher Verlag der Wissenschaften.

[13] Milnor, J.W.,1954. *Isotopy of links*. Princeton University.

[14] Turaev, V.G.,1979. *Milnor invariants and Massey products*. Journal of Soviet Mathematics, 12(1), pp. 128–137.

[15] Hillman, J., D. Matei, and M. Morishita., 2005. *Pro-p link groups and p-homology groups*. arXiv preprint math/0505433.

[16] Anick, D.J.,1987. *Inert sets and the Lie algebra associated to a group*. Journal of Algebra, 111(1), pp. 154–165.

[17] Maeda, T., 1985. *Lower Central Series of Link Groups*.

[18] Massey, W. and L. Traldi., 1986. *On a conjecture of K. Murasugi*. Pacific Journal of Mathematics, 124(1), pp. 193–213.

[19] Morishita, M.,2002. *On certain analogies between knots and primes*. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik,550, pp. 141–167.

[20] Labute, J.,2006. *Mild pro-p-groups and Galois groups of p-extensions of* $\mathbb{Q}$. Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal), 596, pp. 155–182.

[21] Schmidt, A., 2006. *Circular sets of prime numbers and p-extensions of the rationals*. Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal), 596, pp. 115–130.

[22] Kapranov, M.M.,1995. *Analogies between the Langlands correspondence and topological quantum field theory*, in *Functional analysis on the eve of the 21st century*. Springer, pp. 119–151.

[23] Morishita, C. and M. Morishita., 2003. *Analogies between knots and primes, 3-manifolds and number fields*.

[24] Sikora, A.S.,2003. *Analogies between group actions on 3-manifolds and number fields*. Commentarii Mathematici Helvetici, 78(4), pp. 832–844.