Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

A pivoting algorithm for linear programming with linear complementarity constraints

Khatere Ghorbani-Moghadam[1], **Reza Ghanbari**[2], **Javad Mohammadnia**[3]

1. Corresponding Author, Mosaheb Institute of Mathematics, Kharazmi University, Tehran, Iran. E-mail: k.ghorbani@khu.ac.ir
2. Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad. E-mail: rghanbari@um.ac.ir
3. Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad. j.mohammadnia@gmail.com

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 9 August 2024
Received in revised form: 23 July 2025
Accepted: 30 July 2025
Published online: 3 November 2025

Keywords:
Linear programming problem with linear complementarity constraints,
Linear complementarity constraints,
Zero-one programming,
Branch and bound algorithm.

ABSTRACT

Linear programming problems with linear complementarity constraints (LPCCs) are widely encountered in operations research and are classified as NP-hard due to the nonlinear and complex nature of complementarity conditions. This study investigates a specific subclass of LPCCs in which the complementarity constraint appears in the form $x_p x_m = 0$. Such constraints frequently arise in practical optimization problems, particularly in models involving expressions like absolute values. The main contribution of this research lies in the development of a dedicated branch-and-bound algorithm tailored to this special class of LPCCs, without resorting to conventional linearization techniques such as the introduction of binary variables and large-M constraints, which typically increase model size, weaken lower bounds, and reduce solution accuracy in complementarity-constrained problems. The proposed method directly exploits the structural properties of the special complementarity form, leading to reduced computational complexity, preservation of the original linear structure, and improved performance in small- and medium-scale instances compared to classical methods such as linearization and generic branch-and-bound algorithms. The algorithm is fully developed and its performance is evaluated through numerical experiments and comparisons with existing standard approaches. The results demonstrate that the proposed method outperforms traditional techniques in terms of both accuracy and computational efficiency.

How to cite: Khatere Ghorbani-Moghadam, Reza Ghanbari, Javad Mohammadnia. (2025). A pivoting algorithm for linear programming with linear complementarity constraints. *Mathematical Researches*, 11(2),59– 74.

 Publisher: Kharazmi University

پژوهش‌های ریاضی

شـاپـا چـاپـی: ٢٥٨٨-٢٥٤٦
شاپا الکترونیکی: ٢٥٨٨-٢٥٥٤

دانشگاه خوارزمی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

ارائه یک الگوریتم محورگیری برای برنامه‌ریزی خطی با قیدهای مکمل خطی

خاطره قربانی مقدم[۱]، رضا قنبری[۲]و جواد محمدنیا[۳]

[۱] عضو هیئت علمی موسسه تحقیقات ریاضی دکتر مصاحب، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران، k.ghorbani@khu.ac.ir، نویسنده مسئول

[۲] عضو هیئت علمی دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران، rghanbari@um.ac.ir

[۳] دانش‌آموخته مقطع کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران، j.mohammadnia@gmail.com

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۵/۱۸
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۵/۱
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۵/۸
تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۸/۱۲

واژه‌های کلیدی:
واژه۱، برنامه‌ریزی خطی با قیدهای مکمل خطی (LPCC)
واژه۲، قیدهای مکمل خطی
واژه۳، برنامه‌ریزی صفر و یک
واژه۴، الگوریتم شاخه و کران

چکیده

مساله‌های برنامه‌ریزی خطی با قیدهای مکمل خطی[۱] (LPCC) جز مساله‌های پرکاربرد در رشته تحقیق در عملیات هستند و حل آن‌ها به‌دلیل ماهیت غیرخطی و پیچیده قیدهای مکملی، در رده مسائل NP-hard قرار می‌گیرد. در این مقاله، یک حالت خاص از LPCC مورد بررسی قرار گرفته است که در آن قید مکملی از نوع $x_p\, x_m = 0$ ظاهر می‌شود. این نوع قید در بسیاری از مسائل کاربردی بهینه‌سازی، به‌ویژه در مدل‌هایی که شامل عباراتی نظیر قدرمطلق هستند، دیده می‌شود. نوآوری اصلی این پژوهش در ارائه یک الگوریتم شاخه و کران اختصاصی برای حل این نوع خاص از LPCC است، بدون نیاز به استفاده از روش‌های مرسوم خطی‌سازی مانند معرفی متغیرهای دودویی و قیدهای M-بزرگ[۲] ، که معمولاً موجب افزایش بعد مدل، ضعیف شدن کران پایین و کاهش دقت حل در مسائل با قید مکملی می‌شوند. مزیت روش پیشنهادی در بهره‌گیری مستقیم از ساختار حالت خاص قید مکملی است که باعث کاهش حجم محاسبات، حفظ فرم خطی اصلی، و عملکرد بهتر در مسائل با ابعاد کوچک و متوسط نسبت به روش‌های کلاسیک مانند خطی‌سازی و الگوریتم‌های عمومی شاخه و کران می‌شود. الگوریتم پیشنهادی به‌صورت کامل توسعه داده شده و عملکرد آن از طریق حل مثال‌های عددی و مقایسه با روش‌های مرسوم موجود مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که رویکرد پیشنهادی از نظر دقت و کارایی نسبت به روش‌های رایج برتری دارد.

استناد: خاطره قربانی مقدم، رضا قنبری و جواد محمدنیا(۱۴۰۴). ارائه یک الگوریتم محورگیری برای برنامه‌ریزی خطی با قیدهای مکمل خطی

پژوهش‌های ریاضی، ۱۱ (۲)، ۵۹ – ۷۴.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

[1] Linear Programming with Linear Complementarity Constraints
[2] Big-M

۱. مقدمه

برنامه‌ریزی‌های مکمل خطی در ابتدا توسط ایباراکی[3] در سال ۱۹۷۱ مورد تحقیق و بررسی قرار گرفتند[۷] . فلچر[4] و همکارانش در سال ۱۹۸۹ [۳] و لیو[5] و همکارانش [۸] در سال ۱۹۹۶ روی برنامه‌ریزی ریاضی با قیدهای متعادل (MPEC[6]) کار کردند. در سال ۲۰۰۰، اسچیل[7] و همکارانش روی برنامه‌ریزی با قیدهای مکمل به نتایج خوبی رسیدند [۹] . همچنین لایفر[8] در سال‌های ۲۰۰۳، ۲۰۰۴ و ۲۰۰۶ مقاله‌هایی را در همین رابطه منتشر کرد [۱۳-۱۰] . فیشتی و موناسی[9] [۱۷] مسئله برنامه‌ریزی دوخطی مختلط صحیح (MIBLP[10]) را به‌عنوان یکی از صورت‌بندی‌های متداول در حوزه‌ی برنامه‌ریزی غیرخطی مختلط مورد بررسی قرار داده‌اند؛ مسئله‌ای که به دلیل ساختار دوخطی و غیرمحدب خود، با چالش‌های محاسباتی قابل توجهی همراه است. در این مقاله، الگوریتمی جدید از نوع شاخه-و-برش برای حل دقیق این مسئله ارائه شده که در آن از یک قاعده‌ی شاخه‌زنی ویژه برای جملات دوخطی و نیز از خانواده‌ای نوآورانه از برش‌های تقاطعی استفاده شده است. این برش‌ها، که بر پایه‌ی تفکیک‌های خاص دوخطی طراحی شده‌اند، با هدف بهبود کران پایین و تقویت فرمول‌بندی مدل به کار گرفته می‌شوند. نتایج محاسباتی بر روی مجموعه‌ای گسترده از مسائل آزمون نشان می‌دهد که الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با حل‌کننده‌های پیشرفته‌ای مانند SCIP عملکردی رقابتی دارد، و در برخی موارد، به‌ویژه با به‌کارگیری برش‌های تقاطعی، کاهش چشمگیری در زمان حل مشاهده شده است.

در ادامه‌ی این خط پژوهش، ژانگ[11] و همکاران [۲۰] با تمرکز بر برنامه‌های درجه دوم نامعین[12] و مدل‌های LPCC که ساختار غیرمقعر و غیرمحدب دارند، روشی ابتکاری موسوم به برنامه‌ریزی عدد صحیح تدریجی[13] پیشنهاد کرده‌اند. این روش برخلاف فرموله‌سازی‌های کامل و پرهزینه‌ی MILP، با حل مجموعه‌ای از زیرمسئله‌های ترکیبی کوچک‌تر که در آن‌ها تنها بخشی از متغیرهای دودویی فعال هستند، به‌تدریج کیفیت راه‌حل را بهبود می‌بخشد. تحلیل‌های نظری و تجربی نشان می‌دهند که این الگوریتم ضمن حفظ کران‌های کیفیتی، در بسیاری موارد قادر است راه‌حل‌های محلی با کیفیت بالا یا حتی بهینه‌ی جهانی تولید کند. ویژگی کلیدی این روش، بهره‌گیری هم‌زمان از مزایای روش‌های غیرخطی محلی و فرموله‌سازی‌های ترکیبی MILP است که آن را به گزینه‌ای کارآمد برای حل مسائل LPCC و به‌ویژه QPهای سخت و بزرگ‌مقیاس تبدیل می‌کند. در راستای تلاش‌ها برای حل دقیق مدل‌های غیرمحدب با قیود متمم‌بودن، یو[14] و همکاران [۱۸] یک الگوریتم شاخه-و-برش تخصصی برای حل مدل‌های LPCC ارائه داده‌اند. این مدل‌ها که در برنامه‌ریزی‌های سطح دو، بازی‌های استکلبرگ [15]و مدل‌های تعادل به‌کار می‌روند، به دلیل ساختار متمم‌بودن‌شان به صورت ذاتی ناحیه قابل‌قبول غیرمحدب دارند و حل دقیق آن‌ها چالش‌برانگیز است. در الگوریتم

3 Ibaraki
4 Fletcher
5 Luo
6 Mathematical Programming with Equilibrium Constraints
7 Scheel
8 Leyffer
9 Fischetti and Monaci
10 Mixed-Integer bilinear programming
11 Zhang
12 Indefinite QPs
13 Progressive Integer Programming – PIP
14 Yu
15 Stackelberg

پیشنهادی، بر خلاف روش‌های کلاسیک که از فرم‌های M–بزرگ[۱۶] استفاده می‌کنند، مستقیماً بر روی قیود متمم‌بودن شاخه‌زنی انجام می‌شود و با بهره‌گیری از برش‌های معتبر، کران‌های بالایی و پایینی مدل بهبود می‌یابد. نتایج محاسباتی نشان می‌دهد که این روش نه‌تنها در یافتن جواب‌های بهینه موفق عمل می‌کند، بلکه در مقایسه با حل‌کننده‌های عمومی مانند CPLEX عملکردی به‌مراتب سریع‌تر و مؤثرتر دارد، به‌ویژه در مسائل با ابعاد بالا یا قیود غیرمحدود.

فیشر و فتش[۱۷] [۱۹] روشی نوین برای حل مسائل بهینه‌سازی خطی با محدودیت‌های نوع SOS1[18] را ارائه می‌دهند؛ به‌ویژه در حالتی که این محدودیت‌ها با یکدیگر هم‌پوشانی دارند (یعنی متغیرهای مشترکی در چند محدودیت ظاهر می‌شوند). آن‌ها با بهره‌گیری از ساختار گراف تضاد[۱۹]، الگوریتمی مبتنی بر شاخه و برش طراحی می‌کنند که شامل قواعد شاخه‌زنی جدید، تکنیک‌های پیش‌پردازش، ابتکاری‌های اولیه و برش‌های ناپیوسته است. نتایج محاسباتی نشان می‌دهد که این رویکرد در بسیاری از کاربردها ـ مانند سیستم‌های ارتباطی، لجستیک، مالی و زمان‌بندی ـ کارآمدتر از مدل‌سازی‌های عدد صحیح مختلط (MIP[20]) سنتی عمل می‌کند، به‌ویژه زمانی که متغیرهای درگیر دارای کران‌های بالا باشند.

مساله برنامه‌ریزی خطی با قیدهای مکمل خطی به شکل زیر است:

$$(\text{LPCC})\begin{cases}\min g^T x, & \\ s.t., & \\ \quad a_i^T x \geq b_i, & i = \ 1 \ ,\cdots, m, \\ 0 \leq (a_i^T x - b_i) \perp \left(a_{p+i}^T x - b_{p+i}\right) \geq 0, & i = m+1,\cdots, m+p.\end{cases} \qquad (1)$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n$. علامت $y \perp z$ به این معنی است که y عمود بر z است. که در حالت برداری به صورت $y^T z = 0$ و برای مقادیر اسکالر به صورت $yz = 0$ نوشته می‌شود. بدون از دست دادن کلیت، می‌توان نامعادلات را دوباره مرتب کرد به طوری که $2p$ نامعادله آخر در p شرط مکمل قرار گیرند[۲] .

نامعادله‌های $a_i^T x \geq b_i$ را برای $i = 1,\cdots, m$ قیدهای استاندارد و برای $i = m+1,\cdots, m+p$ قیدهای مکمل می‌نامیم. در حالت کلی، این مسایل را می‌توان با قیدهای تساوی یا حالتی که شرایط مکمل آن‌ها آمیخته باشد، نیز بیان کرد. برای راحتی مسائل LPCC را به صورت مساله (۱) در نظر می‌گیریم.
LPCC کاربردهای فراوانی دارد[۱،۳،۴،۵،۶] که از آن جمله می‌توان به بهینه‌سازی مرتبه‌ای (سلسله مراتبی) اشاره کرد. یک برنامه بهینه‌سازی مرتبه‌ای[۲۱] می‌تواند چندین مساله‌ی سطح پایین داشته باشد و مساله‌های سطح پایین نیز ممکن است چند زیر مساله داشته باشند، که می‌توان آن را با چند LPCC نمایش داد، ولی در اینجا مساله مرتبه‌ای را در نظر می‌گیریم که تنها یک مساله سطح پایین دارد. به عبارتی، مساله زیر را خواهیم داشت:

[16] Big-M
[17] Fischer and Pfetsch
[18] Special Ordered Set type 1
[19] Conflict graph
[20] Mixed Integer Program
[21] Hierachical Optimization

$$
\begin{cases}
\min\limits_{x,y}, c^T x + \sum\limits_{i=1}^{r} h^{i^T} y^i \ , \\
s.t., \\
Ax + \sum\limits_{i=1}^{r} B^i y^i \geq b, \\
y^i \in argmin_{v^i}\, d^{i^T} v^i + \frac{1}{2}\left(v^i\right)^T Q v^i \ , \\
\quad s.t., \\
\quad C^i v^i \geq g^i - Fx - \sum\limits_{i \neq j, j=1} G^i y^i,
\end{cases} \tag{2}
$$

به طوری که، $x \in \mathbb{R}^n$، $y^i, v^i \in \mathbb{R}^{p^i}$، $b \in \mathbb{R}^m$ و $g^i \in \mathbb{R}^{q^i}$ است، که هر Q^i متقارن و نیمه معین مثبت است و c، d^i، h^i، A، B^i، C^i، F، G^i و Q^i همگی ابعاد مناسبی دارند. این مساله تنها یک متغیر تصمیم y^i دارد. چون هر زیر مساله محدب است، پس بهینگی باید در شرایط K.K.T صدق کند. به عبارتی مساله (۲) را می‌توان بر حسب یک مساله LPCC به صورت زیر نوشت:

$$
\begin{cases}
min, \quad c^T x + \sum\limits_{i=1}^{r} h^{i^T} y^i \ , \\
\quad s.t., \\
Ax + \sum\limits_{i=1}^{r} B^i y^i \geq b, \\
Fx + C^i y^i + \sum\limits_{i \neq j, j=1}^{r} G^j y^j - w^i = g^i, & i = 1, \cdots, r, \\
d^i + Q^i y^i \ - C^{i^T} \lambda^i = 0, & i = 1, \cdots, r, \\
0 \leq w^i \perp \lambda^i \geq 0, & i = 1, \cdots, r.
\end{cases} \tag{3}
$$

روش‌های متفاوتی برای حل مسایل LPCC وجود دارد که می‌توانند نقطه بهینه سراسری را بدست می‌آورند مانند، روش‌صفحه برش که هو [۲۲] و همکارانش بررسی کرده‌اند [۱۳] ، الگوریتم شاخه و کران که بارد[۲۳] و همکارانش روی آن کار کردند [۱۴] ، روش جریمه‌ای که توسط اونال[۲۴]

22 Hu
23 Bard
24 Onal

مورد بررسی قرار گرفته است [۱۵] ، روش تجزیه بندرز[۲۵] [۱۶] و روش شاخه و برش[۲۶] [۱۶] . از آنجایی که این روش‌ها از لحاظ پیاده‌سازی مقرون به صرفه نیستند، لذا به دنبال روش‌هایی برای به دست آوردن می‌نیمم محلی هستیم. از جمله روش‌هایی نقطه بهینه محلی را به دست می‌آورند می‌توان به [۲،۳،۱۱] اشاره کرد. رایج‌ترین روش‌های موجود (مانند روش‌های صفحه برش، جریمه‌ای و شاخه و کران کلاسیک) به دلیل پیچیدگی محاسباتی بالا، کارایی لازم برای مسایل با قیدهای مکمل خطی را ندارند. این مقاله با ارائه یک الگوریتم شاخه و کران بهینه‌سازی‌شده، این شکاف را پر می‌کند. به‌ویژه برای حالتی که تنها قید مکملی به فرم $x_p x_m = 0$ ظاهر می‌شود. در این حالت خاص، الگوریتم پیشنهادی با ساختاری ساده و بدون نیاز به متغیر دودویی، مزایای محاسباتی قابل توجهی نسبت به روش‌های موجود ارائه می‌دهد.

هدف این مقاله، ارائه و تحلیل یک الگوریتم شاخه و کران اختصاصی برای حل حالت خاصی از مسائل LPCC است، حالتی که در آن قید مکملی به صورت $x_p\ x_m = 0$ ظاهر می‌شود، و در بسیاری از مدل‌های کاربردی بهینه‌سازی، از جمله مسائل شامل قدرمطلق، مشاهده می‌شود. در بخش دوم، الگوریتم پیشنهادی به‌طور کامل معرفی و تشریح شده است. بخش سوم به ارزیابی عملکرد الگوریتم از طریق حل مثال‌های عددی و مقایسه با روش‌های مرسوم اختصاص دارد. در بخش چهارم، جمع‌بندی نتایج و نتیجه‌گیری کلی از پژوهش ارائه شده است.

۲. مسایل LPCC در حالت خاص

در این بخش می‌خواهیم یک حالت خاص در LPCC را بررسی کنیم. این حالت خاص وقتی رخ می‌دهد که بخواهیم حاصلضرب دو متغیر صفر شوند، یعنی $x_p\ x_m = 0$.

۲-۱. مساله برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای عمود بر هم

مساله (P) را به عنوان مساله اصلی به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$(P)\begin{cases} min, \quad g^T x, & \\ s.t., & \\ Ax \geq b, & \\ x_{mi} \geq 0, & i = 1, \cdots, t, \\ x_{pi} \geq 0, & i = 1, \cdots, t, \\ x_{0i} \geq 0, & i = 1, \cdots, q \\ \left(x_{pi}\right)^T (x_{mi}) = 0, & i = 1, \cdots, t\,. \end{cases} \tag{4}$$

که در آن $x = (x_{0i}, x_{pi}, x_{mi})$. برای حل این مساله، ابتدا مساله فوق را بدون در نظر گرفتن قید

$$\left(x_{pi}\right)^T (x_{mi}) = 0, \ \ i = 1, \cdots, t,$$

با استفاده از روش سیمپلکس حل می‌کنیم، اگر در تکرار نهایی به ازای هر قید مکمل، یکی از متغیرهای x_{pi} و x_{mi} در پایه نباشد، در این صورت جواب فوق جواب بهینه مساله اصلی نیز خواهد بود. اگر هر دو متغیر x_{pi} و x_{mi} به ازای هر قید مکمل در پایه باشند،

[25] Benders decomposition
[26] Branch and Cut

با توجه به این که $x_{pi} \geq 0$ و $x_{mi} \geq 0$ می‌باشند، اگر قید $x_{pi} \leq 0$ یا $x_{mi} \leq 0$ را به مساله اضافه کنیم، موجب می‌شود که $x_{pi} = 0$ یا $x_{mi} = 0$ به دست بیابید، برای این منظور، از روش شاخه و کران به صورت زیر استفاده می‌کنیم. در حالی که الگوریتم پیشنهادی به لحاظ نظری دارای پیچیدگی نمایی در بدترین حالت است، اما در عمل با توجه به ساختار ساده و خاص قید مکملی مورد بررسی، شاخه‌زنی به‌طور مؤثری محدود می‌شود. این مسئله باعث شده است که در بسیاری از نمونه‌های عددی، زمان حل به‌مراتب کمتر از روش‌های کلاسیک مانند استفاده از متغیر دودویی و قیود M-بزرگ باشد. همچنین، از آنجایی که الگوریتم پیشنهادی مبتنی بر حل مکرر مسائل خطی ساده است، از نظر پیاده‌سازی نیز سبک‌تر و قابل استفاده‌تر در مسائل عملی است.

الگوریتم ۱ الگوریتم شاخه و کران برای حل مساله

گام ۰: اگر مساله LP آزاد شده نشدنی باشد توقف کن، مساله اصلی نشدنی است.

گام ۱: $z^* \leftarrow \infty$، $L \leftarrow \emptyset$.

گام ۲: اگر جواب مساله آزاد شده، جواب مساله اصلی نیز باشد z^* را برابر مقدار بهینه قرار دهید و خارج شو در غیر این صورت قرار ده: $L \leftarrow L \cup (LP, z_{LP}, k)$ (که LP مساله آزاد شده مساله اصلی و z_{LP} مقدار بهینه مساله LP و k تعداد قیدهای مکمل نقض شده است).

گام ۳: تا هنگامی که $L \neq \emptyset$ است انجام بده:

۳-۱. مساله (LP, z_{LP}, k) را در L که دارای کمترین تعداد قیدهای مکمل نقض شده است، انتخاب کن و مساله‌های $LP' = LP \cup \{(x_{pi}) \leq 0\}$ و $LP'' = LP \cup \{(x_{mi}) \leq 0\}$ را حل کن، هر کدام از مساله‌های LP' و LP'' که نشدنی شدند را حذف کن و قرار بده:

۳-۱-۱. z' و z'' جواب بهینه مساله‌های LP' و LP''.

۳-۱-۲. k' و k'' تعداد قیدهای مکمل نقض شده در جواب بهینه مساله‌های LP' و LP''.

۳-۲. اگر $k' = 0$ و $k'' = 0$ در این صورت $z^* \leftarrow \min\{z^*, z', z''\}$ و به ۳-۵ برو.

۳-۳. اگر $k' = 0$ در این‌صورت $z^* \leftarrow \min\{z^*, z'\}$ و به ۳-۵ برو در غیر این صورت قرار بده

$$L \leftarrow L \cup (LP', z', k')$$

۳-۴. اگر $k'' = 0$ در این‌صورت $z^* \leftarrow \min\{z^*, z'\}$ و به ۳-۵ برو در غیر این صورت قرار بده

$$L \leftarrow L \cup (LP'', z'', k'')$$

۳-۵. مساله (LP, z_{LP}, k) که در گام ۳ انتخاب شد را از L حذف کن و هم‌چنین اگر مقدار z^* بهبود یافته است، هر مساله (LP, z_{LP}, k) با z_{LP} را از L حذف کن.

گام ۴: اگر $z^* = +\infty$ چاپ کن"مساله جواب شدنی ندارد"، در غیر این صورت، جواب بهینه مساله را چاپ کن.

قضیه۱. الگوریتم ۱ خاتمه پیدا می‌کند و پیچیدگی آن $O(2^t l)$ است که در آن l زمان مورد نیاز برای حل مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی است.

برهان: این الگوریتم به صورت یک درخت دودویی در سطح پیاده‌سازی می‌شود و اگر تعداد قیدهای مکمل t تا باشد، در بدترین حالت، در 2^t گره درخت، تمام قیدهای مکمل بررسی خواهند شد، به عبارتی، الگوریتم به تعداد قیدهای مکمل تکرار می‌شود، لذا زمان مورد نیاز در بدترین حالت برای این الگوریتم $O(2^t l)$ خواهد بود.

قضیه۲. در صورت شدنی بودن مساله B، جواب تولید شده توسط الگوریتم ۱، بهینه سراسری خواهد بود.

برهان: با توجه به ساختار الگوریتم شاخه و کران واضح است.

تبصره ۱. اگر مساله آزاد شده را با استفاده از روش سیمپلکس حل کنیم، جدول نهایی را ذخیره کنیم، اگر از روش سیمپلکس اصلاح شده، مساله آزاد شده را حل کردیم، B^{-1} را ذخیره کنیم. در این صورت می‌توانیم به صورت بهینه الگوریتم شاخه و کران را پیاده‌سازی کنیم و در صورت نیاز از الگوریتم سیمپلکس دوگان استفاده می‌کنیم. نقش این نکته در بهبود کارایی عملی الگوریتم است. در فرآیند شاخه‌زنی، گره‌های فرزند معمولاً تنها با یک قید اضافی نسبت به گره پدر تفاوت دارند. بنابراین، اگر جدول نهایی سیمپلکس از گره والد ذخیره شده باشد، می‌توان از آن به‌عنوان نقطه شروع برای حل گره فرزند (با سیمپلکس دوگان) استفاده کرد. این کار منجر به کاهش چشم‌گیر زمان حل هر گره و بهینه‌سازی اجرای الگوریتم در عمل می‌شود. بنابراین، این نکته به یک جنبه عملی و اجرایی مهم در پیاده‌سازی الگوریتم پیشنهادی اشاره دارد.

۳. نتایج عددی

در این بخش الگوریتم پیشنهادی را بر روی مساله‌های مختلف پیاده‌سازی خواهیم کرد.

مثال۱. مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \min 2x_0 - x_{p1} + x_{m1} \\ s.t., \\ x_0 - x_{p1} - 2x_{m1} \geq 2, \\ -x_0 + 2x_{p1} + x_{m1} \geq 3, \\ 2x_0 + x_{p1} - 2x_{m1} \geq 3, \\ x_{p1}x_{m1} = 0 \\ x_0,\ \ x_{p1},\ \ x_{m1} \geq 0 \end{cases}$$

اگر مساله را بدون در نظر گرفتن قید مکمل با روش سیمپلکس حل کنیم، جواب بهینه مساله آزاد شده $x = (x_0, x_{p1}, x_{m1}) = (7,5,0)$ با تابع هدف ۹، خواهد بود که جواب مساله اصلی نیز است. حال می‌خواهیم این مثال را

با روشی که فانگ[27] و همکارانش [۲] و روشی که فلچر [28] و همکارانش [۳] ارایه کرده‌اند، نیز حل کنیم. ابتدا با روش فانگ و همکارانش به حل این مثال می‌پردازیم. نقطه شروع این مساله $\hat{x} = (7,5,0)$ بدست می‌آید. مجموعه‌ی کاری در این نقطه، $W = \{1,2,5\}$ است، داریم:

$$\hat{y} = A^{-1}g = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{y}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

چون تمام ضرایب نامنفی هستند، پس قید خروجی نداریم و نقطه $\hat{x} = (7,5,0)^T$ بهینه است.

حال با روش فلچر و همکارانش [۳] مساله را حل می‌کنیم. نقطه شروع را همان $\hat{x} = (7,5,0)^T$ در نظر می‌گیریم، اینک مساله اصلی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \min 2x_0 - x_{p1} + x_{m1}, \\ s.t., \\ x_0 - x_{p1} - 2x_{m1} \geq 2, \\ -x_0 + 2x_{p1} + x_{m1} \geq 3, \\ 2x_0 + x_{p1} - 2x_{m1} \geq 3, \\ x_{p1}, x_{m1} \leq 0, \\ x_0, x_{p1}, x_{m1} \geq 0, \end{cases}$$

و این مساله را با روش SQP حل می‌کنیم، که جواب آن $\hat{x} = (7,5,0)^T$ است.

مثال۲. مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \min 2x_0 - x_{p1} + x_{p2} + x_{m1} + x_{m2}, \\ s.t., \\ x_0 - x_{p1} + 2x_{p2} - x_{m1} + 2x_{m2} \geq 1, \\ -x_0 + x_{p1} - x_{p2} + x_{m1} + x_{m2} \geq 2, \\ x_0 + x_{p1} + x_{p2} - x_{m1} + 2x_{m2} \geq 1, \\ x_0 - x_{p1} + x_{p2} + x_{m1} - x_{m2} \geq 2, \\ x_{p1}x_{m1} = 0 \\ x_{p2}x_{m2} = 0, \\ x_0, x_{p1}, x_{p2}, x_{m1}, x_{m2} \geq 0 \end{cases}$$

اگر مساله را بدون در نظر گرفتن قید مکمل با روش سیمپلکس حل کنیم، جواب بهینه مساله آزاد شده $x = (x_0, x_{p1}, x_{p2}, x_{m1}, x_{m2})^T = (0,3,3,2,0)^T$ با مقدار تابع هدف ۲ خواهد بود، این مساله ۱ قید مکمل نقض شده دارد، به عبارتی، $k = 1$. حال با توجه به الگوریتم ۱ خواهیم داشت:

---
27 Fang
28 Fletcher

تکرار اول:

گام ۱: $z^* \leftarrow +\infty$، $L \leftarrow \emptyset$.

گام۲: چون جواب مساله آزاد شده جواب مساله اصلی نیست پس $L \leftarrow \emptyset \cup (LP, 2,1)$.

گام ۳: مساله $(LP, 2,1)$ را در L در نظر می‌گیریم و مساله‌های

$$LP' = LP \cup \{(x_{p1}) \leq 0\} \text{ و } LP'' = LP \cup \{(x_{m1}) \leq 0\}$$

را حل می‌کنیم. در مساله LP' خواهیم داشت:

$$x' = \left(x_0, x_{p1}, x_{p2}, x_{m1}, x_{m2}\right)^T = (0,0,1,2,1)^T,$$
$$z' = 4, \quad k' = 1,$$

و مساله LP'' نشدنی می‌شود پس آن را حذف می‌کنیم چون $k' \neq 0$ پس:

$$L \leftarrow L \cup (LP, 4,1),$$

حال مساله $(LP, 2,1)$ را از L حذف می‌کنیم.

تکرار دوم:

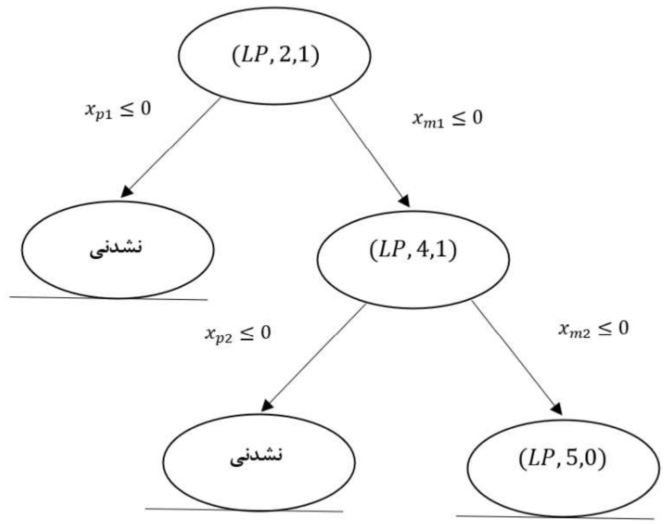
مساله $(LP, 4,1)$ را در L انتخاب کرده و مساله‌های

$$LP' = LP \cup \{(x_{p2}) \leq 0\} \text{ و } LP'' = LP \cup \{(x_{m2}) \leq 0\}$$

را حل می‌کنیم. در مساله LP' داریم:

$$x' = \left(x_0, x_{p1}, x_{p2}, x_{m1}, x_{m2}\right)^T = (1,0,0,2,1)^T,$$
$$z' = 5, \quad k' = 0,$$

و مساله LP'' نشدنی می‌شود پس آن را حذف می‌کنیم چون $k' = 0$ پس $z^* = 5$ خواهد بود. حال مساله $(LP, 4,1)$ را از L حذف می‌کنیم. که در این حالت الگوریتم ۱ به پایان می‌رسد و نقطه $x = (1,0,0,2,1)$ جواب مساله خواهد بود.



حال این مثال را با روش فانگ و همکارانش [2] حل می‌کنیم. نقطه شروع برای این مساله $\hat{x} = (1,0,0,2,1)^T$ به دست می‌آید، که یک نقطه تباهیده است. مجموعه کاری در این نقطه، $W = \{1,2,4,5,6\}$ است، داریم:

$$\hat{y} = A^{-1}g = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{y}_4 \\ \hat{y}_5 \\ \hat{y}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.99 \\ 0.49 \\ 1.5 \\ 1 \\ -1.99 \end{bmatrix},$$

تنها ضریب منفی $\hat{y}_6 = -1.99$ است، می‌تواند یک کاندید قید خروجی باشد، اما چون $c(6) = 8 \notin W$، (یا حتی فعال هم نیست) پس قید ۶ام نمی‌تواند خارج شود، چون ضریب منفی دیگری نداریم، پس قید خروجی نخواهیم داشت و نقطه $\hat{x} = (1,0,0,2,1)^T$ بهینه است. حال روش فلچر و همکارانش [۳] را حل می‌کنیم. نقطه شروع را همان $\hat{x} = (1,0,0,2,1)^T$ در نظر می‌گیریم.

می‌گیریم، اینک مساله اصلی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \min 2x_0 - x_{p1} + x_{p2} + x_{m1} + x_{m2}, \\ s.t., \\ x_0 - x_{p1} + 2x_{p2} - x_{m1} + 2x_{m2} \ge 1, \\ -x_0 + x_{p1} - x_{p2} + x_{m1} + x_{m2} \ge 2, \\ x_0 + x_{p1} + x_{p2} - x_{m1} + 2x_{m2} \ge 2, \\ x_0 - x_{p1} + x_{p2} + x_{m1} - x_{m2} \ge 2, \\ x_{p1}x_{m1} \le 0, \\ x_{p2}x_{m2} \le 0, \\ x_0, x_{p1}, x_{p2}, x_{m1}, x_{m2} \ge 0 \end{cases}$$

و این مساله را با روش SQP حل می‌کنیم، که جواب آن $\hat{x} = (1,0,02,1)^T$ است.

در مثال زیر خواهیم دید که الگوریتم ۱ نسبت به روش پیشنهادی فلچر و همکاران[۳] و روش فانگ و همکاران[۲] ، روی آن بهتر عمل کند.

مثال ۳. مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \min x_0 + x_{p1} + x_{p2} - x_{m1} + x_{m2}, \\ s.t., \\ x_0 + 2x_{p1} - x_{p2} - x_{m1} + x_{m2} \geq 1, \\ -x_0 + x_{p1} + 2x_{p2} + x_{m1} + x_{m2} \geq 2, \\ x_0 - x_{p1} + x_{p2} + 2x_{m1} - x_{m2} \geq 3, \\ x_0 - x_{p1} + x_{p2} - x_{m1} + x_{m2} \geq 2, \\ x_{p1}x_{m1} = 0, \\ x_{p2}x_{m2} = 0 \\ x_0, x_{p1}, x_{p2}, x_{m1}, x_{m2} \geq 0 \end{cases}$$

اگر مساله را بدون در نظر گرفتن قید مکمل با روش سیمپلکس حل کنیم،جواب بهینه مساله آزاد شده به صورت زیر است:

$$x = \left(x_0, x_{p1}, x_{p2}, x_{m1}, x_{m2}\right)^T = (1.42,0.5,1.17,1.25)^T$$

با مقدار تابع هدف ۲ خواهد بود، این مساله ۱ قید مکمل نقض شده دارد، به عبارتی $k = 1$. حال با توجه به الگوریتم ۱ خواهیم داشت:

تکرار اول:

گام ۱: $z^* \leftarrow +\infty$، $L \leftarrow \emptyset$.

گام۲: چون جواب مساله آزاد شده جواب مساله اصلی نیست پس $L \leftarrow \emptyset \cup (LP, 2,1)$.

گام ۳: مساله $(LP, 2,1)$ را در L در نظر می‌گیریم و مساله‌های

$$LP'' = LP \cup \{(x_{m1}) \leq 0\} \text{ و } LP' = LP \cup \left\{\left(x_{p1}\right) \leq 0\right\}$$

را حل می‌کنیم. در مساله LP' خواهیم داشت:

$$x' = \left(x_0, x_{p1}, x_{p2}, x_{m1}, x_{m2}\right)^T = (1.42,0,0.05,1.17,1.25)^T,$$

$$z' = 2, \quad k' = 1,$$

و مساله LP'' نیز داریم:

$$x'' = \left(x_0, x_{p1}, x_{p2}, x_{m1}, x_{m2}\right)^T = (1.78,0.44,1.67,0,0)^T,$$
$$z'' = 3.89, \quad k'' = 0,$$

چون $k' \neq 0$ پس:

$$L \leftarrow \emptyset \cup (LP, 2,1),$$

از طرفی چون $k'' = 0$ پس $z^* = 3.89$ خواهد بود، حال مساله $(LP, 2,1)$ را از L حذف می‌کنیم.

تکرار دوم:

مساله $(LP, 2,1)$ را در L انتخاب کرده و مساله‌های

$$LP' = LP \cup \left\{\left(x_{p2}\right) \leq 0\right\} \text{ و } LP'' = LP \cup \{(x_{m2}) \leq 0\}$$

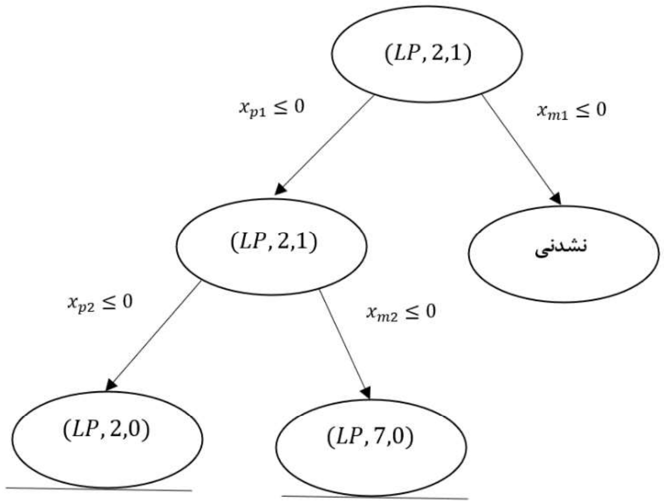
را حل می‌کنیم. در مساله LP' داریم:

$$x' = \left(x_0, x_{p1}, x_{p2}, x_{m1}, x_{m2}\right)^T = (1.67,0,0,1.67,2)^T,$$
$$z' = 2, \quad k' = 0,$$

و در مساله LP'' نیز داریم:

$$x'' = \left(x_0, x_{p1}, x_{p2}, x_{m1}, x_{m2}\right)^T = (4,0,3,0,0)^T,$$
$$z'' = 2, \quad k'' = 0,$$

چون $k' = 0$ و $k'' = 0$ پس قرا می‌دهیم $z^* = \min\{2,3.89,7\} = 2$. حال مساله $(LP, 2,1)$ را از L حذف می‌کنیم، از طرفی چون $L = \emptyset$ می‌شود پس الگوریتم ۱ به پایان می‌رسد و نقطه $x = (1.67,0,0,1.67,2)^T$ جواب بهینه خواهد بود.



حال این مثال را با روش فلچر و همکاران حل می‌کنیم، برای این منظور مساله اصلی به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \min x_0 + x_{p1} + x_{p2} - x_{m1} + x_{m2} \\ s.t., \\ x_0 + 2x_{p1} - x_{p2} - x_{m1} + x_{m2} \geq 1, \\ -x_0 + x_{p1} + 2x_{p2} + x_{m1} + x_{m2} \geq 2, \\ x_0 - x_{p1} + x_{p2} + 2x_{m1} + x_{m2} \geq 2, \\ x_{p1}x_{m1} \leq 0, \\ x_{p2}x_{m2} \leq 0, \\ x_0, x_{p1}, x_{p2}, x_{m1}, x_{m2} \geq 0 \end{cases}$$

اگر نقطه شروع را $\hat{x} = (4,0,3,0,0)^T$ در نظر بگیریم، و این مساله را با روش SQP حل کنیم، جواب آن $\hat{x} = (1.78,0.44,1.67,0,0)^T$ با تابع هدف ۳.۸۹ به دست می‌آید، پس جواب الگوریتم ۱ بهتر می‌باشد.

حال می‌خواهیم این مثال را با روش فانگ و همکاران حل می‌کنیم. برای این منظور ابتدا نقطه شروع را تعیین کنیم، که نقطه $\hat{x} = (1.78,0.44,1.67,0,0)^T$ به دست می‌آید. مجموعه کاری مربوط به این نقطه $W = \{1,2,3,7,8\}$ می‌باشد، حال برای تعیین کردن قید خروجی و ورودی خواهیم داشت:

$$\hat{y} = A^{-1}g = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{y}_3 \\ \hat{y}_7 \\ \hat{y}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.66 \\ 0.44 \\ 0.78 \\ -2.34 \\ 0.66 \end{bmatrix},$$

تنها ضریب منفی مربوط به قید هفتم است ولی چون قید پنجم در مجموعه کاری قرار ندارد پس قید هفتم نمی‌تواند خارج شود، به عبارتی، قید خارج شونده نخواهیم داشت، لذا نقطه‌ی $\hat{x} = (1.78,0.44,1.67,0,0)^T$ جواب بهینه با مقدار تابع هدف ۳.۸۹ است. ملاحظه شد که جواب الگوریتم ۱ نسبت به هردو روش پیشنهادی فلچر و همکاران و فانگ و همکاران بر روی این مثال خیلی خوب عمل کرد.

۴. نتیجه‌گیری

LPCC جز مسائل NP-سخت هستند که عمدتا روش‌های بسیاری برای حل آن‌ها پیشنهاد شده است. در این مقاله یک حالت خاص مساله LPCC را بررسی کرده‌ایم. این حالت خاص زمانی رخ می‌دهد که حاصلضرب دو متغیر صفر شوند، یعنی $x_p x_m = 0$. الگوریتم شاخه و کران را برای حل این مساله پیشنهاد دادیم و مشاهده شد جواب بدست آمده از الگوریتم پیشنهادی بر روی نمونه‌های اجرایی از روش‌های پیشنهادی بهتر است. همچنین نشان دادیم که استفاده از ساختار خاص قید مکملی، می‌تواند موجب طراحی الگوریتم‌های کاراتر شود. با وجود پیچیدگی نمایی در نظریه، عملکرد عددی الگوریتم پیشنهادی نشان داد که در مسائل کوچک و متوسط، زمان حل و کیفیت جواب نسبت به الگوریتم‌های موجود (مانند روش‌های مبتنی بر M-بزرگ یا الگوریتم‌های عمومی شاخه و کران) بهبود یافته است. همچنین الگوریتم پیشنهادی به‌دلیل عدم استفاده از متغیرهای دودویی و حفظ ساختار خطی، برای پیاده‌سازی‌های کاربردی قابل اتکاتر است

۵. تقدیر و تشکر

نویسنده اول از مؤسسه تحقیقات ریاضی دکتر مصاحب، دانشگاه خوارزمی، و نویسندگان دوم و سوم از دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، به‌دلیل حمایت‌ها و پشتیبانی‌های علمی و پژوهشی از این مقاله، صمیمانه قدردانی می‌کنند.

۶. مراجع

1. C. Chen, H. Yang, X. Li L. Chen and M. Shi, Optimization of solar and heat pump complementary powered desiccant air conditioning system, Journal of Building Engineering, **87** (2024), https://doi.org/10.1016/j.jobe.2024.109084.
2. H. Fang, S. Leyffer, and T. Munson. A pivoting algorithm for linear programming with linear complementary constraint, Optimization Methods Software, **27** (2012) 89-114.
3. R. Fletcher, S. Leyffer, D. Ralph and S. Scholtes, Local convergence of SQP methods for mathematical programs with equilibrium constraints, SIAM Journal of Optimization, **17** (2006) 259-289.
4. Z. Guo, J. Wang, F. Dong and H. Xu, Multi-objective optimization of multi-energy complementary system based on cascade utilization of heat storage, Energy Conversion and Management, **299** (2024), https://doi.org/10.1016/j.enconman.2023.117864.
5. J. Hu, J. E. Mitchelly, J. S. Pangz and B. Yu. On Linear programs with Linear Complementary Constraints, Journal of Global Optimization, **53** (2012) 29-51.

6. J. Hu, J. E. Mitchell, J. S. Pang, K. P. Bennett, and G. Kunapuli, On the global solution of linear programs with linear complementary constraints, SIAM Journal on Optimization, **19** (2008) 445-471.
7. T. Ibaraki, Complementary programming, Operations Research, **19** (1971) 1523-1529.
8. Z. Luo, J. S. Pang and D. Ralph, Mathematical Programs with Equilibrium Constraints, Cambridge University Press, Cambridge, U. K. 1996.
9. H. Scheel and S. Scholtes, Mathematical program with complementarity constraints: Stationarity, optimality and sensitivity, Mathematics of Operations Research, **25** (2000) 1-22.
10. S. Leyffer, G. Lopez-Calva and J. Nocedal, Interior methods for mathematical programs with complementarity constraints, SIAM Journal on Optimization, **17** (2006) 52-77.
11. S. Leyffer, T. Munson, A globally convergent filter method for MPECs, Mathematics and Computer Science Division, 2007.
12. S. Leyffer, Mathematical programs with complementarity, SIAG/OPT Views and News, **14** (2003) 15-18.
13. J. Hu, J. E. Mitchell, J. S. Pang, K. P. Bennet and G. Kunapuli, On the Global solution of linear programs with linear complementarity constraints, SIAM Journal on Optimization, **19** (2008) 445-471.
14. J. F. Bard and J. T. Moore, A branch and bound algorithm for the bi-level programming problem, SIAM Journal on Scientific Computing (1990) 281-292.
15. H. Onal, A Modified simplex approach for solving bi-level linear programming problems, European Journal of Operational Reseach, **67** (1993) 126-133.
16. J. Hu, J. E. Mitchelly, J. S. Pangz and B. Yu, On Linear Programs with Linear Complementarity Constraints, Journal of Global Optimization, **53** (2012) 29-51.
17. M. Fischetti and M. Monaci, A branch-and-cut algorithm for mixed-integer bilinear programming. European Journal of Operational Research, **282** (2020) 506-514.
18. B. Yu, J. E. Mitchell and J. S., Pang Solving linear programs with complementarity constraints using branch-and-cut. Mathematical Programming Computation, **11** (2019) 267-310.
19. T. Fischer and M. E. Pfetsch, Branch-and-cut for linear programs with overlapping SOS1 constraints. Mathematical Programming Computation, **10** (2018) 33-68.
20. X. Zhang, Sh. Han and J. Pang, Improving the Solution of Indefinite Quadratic Programs and Linear Programs with Complementarity Constraints by a Progressive MIP Method (2024) 10.48550/arXiv.2409.09964.