Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546

Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Interpolation theorem in generalized Orlicz spaces

Alireza Bagheri Salec[1] ✉

1. Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, University of Qom, Qom, Iran. E-mail: r-bagheri@qom.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 16 July 2024
Received in revised form: 27 July 2025
Accepted: 26 August 2025
Published online: 3 November 2025

Keywords:
Riesz-Thorian theorem,
Banach function space,
generalized Orlicz space,
intermediate space,
Caldero′n product.

ABSTRACT

Introduction

Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ be a measure space. For each $p \in [1, \infty)$, the Lebesgue space

$$L^p(\Omega) = \left\{ f \in L^0(\Omega) : \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

is a very prominent Banach function space. One of the important generalizations of Lebesgue spaces is Orlicz spaces, which are obtained by replacing the function $|\cdot|^p$ with a convex function Φ. Various generalizations have also been proposed for Orlicz spaces. A particularly interesting generalization of Orlicz spaces has been redefined in [6] and [21]. This generalization is, in fact, obtained by replacing the space $L^1(\Omega)$ with a Banach function space $\mathcal{X}$, in the definition of Orlicz spaces.

Our main goal is to present a generalization of the Riesz–Thorin theorem for generalized weighted Orlicz spaces associated with a Banach function space. From this generalization, several proven theorems corresponding to other spaces can be derived as corollaries.

Material and Methods

In this article, in the first section, the necessary definitions and symbols are presented. In the second section, the complex Riesz-Thorian interpolation theorem in weighted generalized Orlicz spaces is investigated. In the third section, results regarding complex interpolation spaces $[\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]}, \mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]}]_\theta$, and caldron product spaces $(\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]})^{1-\theta}(\mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]})^\theta$, are presented.

Results and discussion

Let $\mathcal{X}$ be a Banach function space in measure space $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, Φ an N-function and w a weight function on Ω. In this article, the issue of interpolation in Lebesgue spaces to weighted generalized Orlicz spaces $\mathcal{X}_w^\Phi$ corresponding to the Banach function space $\mathcal{X}$ is explained. The following Theorem is the main result in this regard.

Theorem: Let $\mathcal{X}$ and $\mathcal{X}'$ be two solid Banach function spaces on σ-finite spaces Ω and Ω' respectively, v_0 and v_1 are weight functions on Ω, and w_0 and w_1 are weight functions on Ω'. Let $S := \{z \in \mathbb{C} : 0 \le Rez \le 1\}$, and two maps

$$\Gamma : \Omega' \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad \text{and} \quad \Upsilon : \Omega \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

satisfy the following properties:

1. $\Gamma(\cdot, z) \in \mathcal{X}'$ and $\Upsilon(\cdot, z) \in \mathcal{X}$ for each $z \in \mathbb{C}$, and the maps

$$z \mapsto \Gamma(\cdot, z) : S \longrightarrow \mathcal{X}' \quad \text{and} \quad z \mapsto \Upsilon(\cdot, z) : S \longrightarrow \mathcal{X}$$

are bounded and continuous in S and analytic on S°.

2. For each $y \in \Omega'$ and $t \in \mathbb{R}$,
$$|\Gamma(y, it)| \leq w_0(y) \text{ and } |\Gamma(y, 1+it)| \leq w_1(y).$$
3. For each $x \in \Omega$ and $t \in \mathbb{R}$,
$$|\Upsilon(x, it)| \leq \frac{1}{v_0(x)} \text{ and } |\Upsilon(x, 1+it)| \leq \frac{1}{v_1(x)}.$$
4. For each $0 < \theta < 1$, $x \in \Omega$ and $y \in \Omega'$, $\Gamma(y,\theta) > 0$ and $\Upsilon(x,\theta) > 0$. Let
$$w_\theta(y) := \Gamma(y,\theta) \quad \text{and} \quad v_\theta(x) := \frac{1}{\Upsilon(x,\theta)} \qquad (x \in \Omega, y \in \Omega').$$

If for each $f \in \mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]}(\Omega)$ and $g \in \mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]}(\Omega)$,
$$\|T(f)\|_{\tilde{\Phi}_0, w_0} \leq M_0 \, \|f\|_{[\Phi_0], v_0}.$$
and
$$\|T(g)\|_{\tilde{\Phi}_1, w_1} \leq M_1 \, \|g\|_{[\Phi_1], v_1},$$
then for all $f \in \mathcal{X}_{v_\theta}^{[\Phi_\theta]}(\Omega)$,
$$\|Tf\|_{\tilde{\Phi}_\theta, w_\theta} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \, \|f\|_{[\Phi_\theta], v_\theta}.$$
This Theorem is a generalization of corresponding cases in weighted Lebesgue and Orlicz spaces. Also, results on the relationship between generalized Orlicz spaces and interpolation spaces and also Caldero′n product spaces in weighted generalized Orlicz spaces $\mathcal{X}_w^{\Phi}$ have been presented.

Conclusion

The following conclusions are obtained from this research.

- The Riesz-Thorian interpolation theorem in weighted generalized Orlicz spaces $\mathcal{X}_w^{\Phi}$ corresponding to the Banach function space $\mathcal{X}$ is valid.
- Generalizations of interpolation spaces $[\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]}, \mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]}]_\theta$, and Caldron′n product spaces $(\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]})^{1-\theta}(\mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]})^{\theta}$, can be defined and interesting properties of these spaces are proved. These properties generalize several well-known theorems in Lebesgue spaces and Orlicz spaces.

How to cite: Alireza Bagheri Salec. (2025). Interpolation theorem in generalized Orlicz spaces. *Mathematical Researches*, **11** (2), 39– 58.

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴٦-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵٤-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

قضیهٔ درونیابی در فضاهای اورلیش تعمیم‌یافته

علیرضا باقری ثالث[1] ✉

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران. رایانامه: r-bagheri@qom.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۴/۲۵
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۵/۵
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۶/۴
تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۸/۱۲

چکیده

فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای تابعی باناخ در فضای اندازهٔ $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$، Φ یک N-تابع و w یک تابع وزن روی Ω باشد. در این مقاله قضیهٔ درونیابی در فضاهای لبگ به فضاهای اورلیش تعمیم یافتهٔ وزندار $\mathcal{X}_w^\Phi$ متناظر با فضای تابعی باناخ $\mathcal{X}$ بیان می‌شود. این قضیه تعمیم قضایای متناظر در فضاهای لبگ و اورلیش وزندار نیز می‌باشد. هم‌چنین نتایجی در مورد رابطهٔ فضاهای اورلیش تعمیم‌یافته با فضاهای میانی و نیز فضای حاصل‌ضرب کالدرن در فضاهای اورلیش تعمیم یافتهٔ وزندار $\mathcal{X}_w^\Phi$ ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی:
واژه۱، قضیهٔ درونیابی ریس-تورین
واژه۲، فضاهای باناخ تابعی
واژه۳، فضاهای اورلیش تعمیم یافته
واژه۴. فضاهای میانی
واژه ۵: ضرب کالدرن

استناد: باقری ثالث، علیرضا؛ (۱۴۰۴). قضیهٔ درونیابی در فضاهای اورلیش تعمیم‌یافته. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۱** (۲)،۳۹ – ۵۸.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

فرض کنیم $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازه با خاصیت زیرمجموعه متناهی[۱] باشد. بنابراین $\mathcal{A}$ یک جبر روی Ω، μ یک اندازهٔ نامنفی روی $\mathcal{A}$، و برای هر $E\in\mathcal{A}$ با اندازهٔ مثبت، عنصر $F\in\mathcal{A}$ با اندازهٔ کراندار موجود است که $F\subseteq E$. فضای برداری تمام توابع $(\mathcal{A}-\mathrm{Borel})$ اندازه پذیر $f:\Omega\to\mathbb{C}$ را با $L^0(\Omega)$ نمایش می‌دهیم. در تمام زیر فضاهای $L^0(\Omega)$ دو تابع که μ-تقریباً همه جا برابر هستند را یکی در نظر می‌گیریم. برای هر $p\geq 1$ فضای لبگ[۲] $L^p(\Omega)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L^p(\Omega)=\left\{f\in L^0(\Omega):\|f\|_p=\left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\}.$$

در این مقاله تمرکز ما روی قضیهٔ ریس-تورین می‌باشد. اگر $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ و $(\Omega',\mathcal{A}',\mu')$ دو فضای اندازه و p_0، $\widetilde{p_0}$، p_1 و $\widetilde{p_1}$ اعدادی در $[1,\infty)$ باشند که $p_0\neq p_1$ و $\widetilde{p_0}\neq\widetilde{p_1}$، قضیهٔ ریس-تورین به صورت زیر می‌باشد. اثبات این قضیه را برای نمونه می‌توانید در [۳] ملاحظه نمایید.

قضیه (قضیهٔ ریس-تورین): برای $i=0,1$ فرض کنید $T:L^{p_i}\to L^{\widetilde{p_i}}$ تابعی خطی و کراندار با نرم M_i باشد. در این صورت برای هر $0<\theta<1$ اگر $\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}$ و $\frac{1}{\tilde{p}}=\frac{1-\theta}{\widetilde{p_0}}+\frac{\theta}{\widetilde{p_1}}$ آنگاه $T:L^p\to L^{\tilde{p}}$ کراندار است و نرم آن کوچکتر یا مساوی $M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$ می‌باشد.

نمونه‌هایی از قضیهٔ ریس-تورین برای تعمیم‌های فضاهای لبگ بیان شده است. برای مثال [۱،۹،۱۰،۲۰] را ببینید. هم‌چنین برای ملاحظهٔ تعمیم‌هایی از این قضیه در فضاهای باناخ وزندار [۵،۸،۱۱،۱۲،۱۵] را ببینید.

یکی از تعمیم‌های با اهمیت فضاهای لبگ فضاهای اورلیش[۳] می‌باشد که با جایگزین نموده تابع $|\cdot|^p$ با یک تابع محدب به دست می‌آید. برای فضاهای اورلیش هم تعمیم‌هایی ارائه شده است. تعمیم بسیار جالبی از فضاهای اورلیش نیز در [۶] و [۲۱] بازتعریف شده است. این تعمیم در واقع با جایگزین نمودن فضای $L^1(\Omega)$ با یک فضای تابعی باناخ در تعریف فضاهای اورلیش به دست می‌آید. هدف اصلی ما ارائهٔ تعمیم قضیهٔ ریس-تورین برای فضاهای اورلیش تعمیم یافتهٔ وزندار مرتبط با یک فضای تابعی باناخ می‌باشد. از این تعمیم می‌توان چندین قضیهٔ اثبات شده متناظر در فضاهای دیگر را نتیجه گرفت. در بخش بعد تعاریف فضاهای اورلیش، تعمیم‌های آن و برخی خواص آنها را بیان می‌کنیم.

۱. تعاریف و مقدمات

در این بخش نمادها و تعاریف مورد نیاز در مقاله را بیان می‌کنیم. تابع محدب $\Phi:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ یک تابع یانگ[۴] نامیده می‌شود هرگاه $\Phi(0)=\lim_{x\to 0}\Phi(x)=0$ و $\lim_{x\to\infty}\Phi(x)=\infty$. می‌گوییم تابع یانگ Φ در خاصیت Δ_2 صدق می‌کند هرگاه اعداد $c>0$ و $x_0\geq 0$ موجود باشد که برای هر $x\geq x_0$ داشته باشیم $\Phi(2x)\leq c\,\Phi(x)$. اگر این نامساوی به ازای $x_0=0$ برقرار باشد می‌گوییم Φ در خاصیت Δ_2 به طور کلی[۵] صدق می‌کند. تابع Φ در خاصیت Δ_2 به طور کلی صدق می‌کند اگر و تنها اگر برای هر $\lambda>1$ عدد $\Lambda>1$ موجود باشد که برای هر $t\geq 0$ داشته

[1]- finite subset property
[2]- Lebesgue space
[3]- Orlicz spaces
[4]- Young function
[5]- globally

باشیم $\Phi(\lambda t) \leq \Lambda\Phi(t)$. تابع یانگ پیوستهٔ $\Phi: \mathbb{R} \to [0,\infty)$ یک N-تابع[۱] نامیده می‌شود، هرگاه داشته باشیم $\lim_{x\to 0}\Phi(x)/x = 0$، $\lim_{x\to\infty}\Phi(x)/x = \infty$ و $\Phi(x) = 0$ معادل $x = 0$ باشد. مکمل[۲] تابع یانگ Φ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Psi(x) := \sup\{y|x| - \Phi(y) : y \geq 0\}, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

در این صورت زوج مرتب (Φ, Ψ) را زوج مکمل[۳] می‌نامیم. همچنین برای هر تابع یانگ Φ و هر $x > 0$ ، $\Phi^{-1}(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\Phi^{-1}(x) := \inf\{t : \Phi(t) > x\}$$

در ادامه همواره فرض می‌کنیم $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه σ-متناهی باشد. بنابراین دنبالهٔ $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ در σ-جبر $\mathcal{A}$ موجود است که $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $\mu(A_n) < \infty$. فرض σ-متناهی بودن فضای اندازهٔ $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ خاصیت زیرمجموعه متناهی را نیز ایجاب می‌کند. هر تابع اندازه پذیر $w: \Omega \to (0, \infty)$ را یک تابع وزن[۴] می‌نامیم. برای هر وزن w قرار می‌دهیم $w^{-1} := \frac{1}{w}$.

هر زیر فضای $\mathcal{X}$ از $L^0(\Omega)$، که با نرم $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ یک فضای باناخ باشد را یک فضای تابعی باناخ[۵] می‌نامیم. فضای تابعی باناخ را جامد[۶] می‌نامیم هرگاه برای هر $f \in \mathcal{X}$ و هر $g \in L^0(\Omega)$ اگر $|g| \leq |f|$ μ-ت.ه. آنگاه $g \in \mathcal{X}$ و $\|g\|_{\mathcal{X}} \leq \|f\|_{\mathcal{X}}$. یادآور می‌شویم که اگر خواص نرم برای تابع $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}: [0, +\infty)$ برقرار باشد ولی در نامساوی مثلثی به ازای یک ثابت $K > 0$ برای هر $f, g \in \mathcal{X}$ داشته باشیم $\|f + g\|_{\mathcal{X}} \leq K(\|f\|_{\mathcal{X}} + \|g\|_{\mathcal{X}})$، آنگاه $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ را یک شبه فضای تابعی باناخ[۷] می‌نامیم. در [۶،۲۱] شبه فضاهای تابعی باناخ توابع حقیقی مقدار بررسی شده است. با فرایند مختلط سازی ارائه شده در فصل دوم [۱۸] می‌توانیم خواص این فضاها را به توابع مختلط مقدار توسیع دهیم. در ادامه چند خاصیت دیگر در مورد (شبه) فضاهای تابعی باناخ آورده شده است. این خواص در مراجعی مانند [۶] و [۷] بیان شده‌اند.

شبه فضای تابعی باناخ $\mathcal{X}$ در خاصیت σ-فاتو[۸] صدق می‌کند هرگاه برای هر دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ از عناصر نامنفی $\mathcal{X}$ که $\sup_n \|f_n\|_{\mathcal{X}} < \infty$ و به صورت نقطه به نقطه $f_n \longrightarrow f$، داشته باشیم $f \in \mathcal{X}$ و $\sup_n \|f_n\|_{\mathcal{X}} < \infty$.

همچنین شبه نرم $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ روی فضای تابعی شبه باناخ $\mathcal{X}$ اکیداً صعودی[۹] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $f, g \in \mathcal{X}$ که $0 \leq f < g$ داشته باشیم $\|f\|_{\mathcal{X}} < \|g\|_{\mathcal{X}}$.

فضای تابعی باناخ $\mathcal{X}$ روی Ω یک PCS-فضا نامیده می‌شود هرگاه برای هر دنباله مانند $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ که در $\mathcal{X}$ همگرا به تابعی مانند f باشد، زیردنباله‌ای از $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ موجود باشد که μ-تقریباً همه جا روی Ω به f همگرا باشد.

1- N-function (or nice function)

2- complementary

3- complementary pair

4- weight function

5- Banach function space

6- solid

7- quasi Banach function space

8- *σ-Fatou property*

9-strictly monotone

شبه فضای تابعی باناخ $\mathcal{X}$ σ-مرتبهٔ پیوسته[۱] نامیده می‌شود، هرگاه برای هر دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ از عناصر نامنفی X که نقطه به نقطه μ -ت.ه. روی به $f \in \mathcal{X}$ همگرا می‌باشد، داشته باشیم $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{\mathcal{X}} = 0$.

فضاهای اورلیش وزندار

فرض کنیم Φ یک تابع یانگ باشد. برای هر تابع اندازه پذیر $f: \Omega \to \mathbb{C}$ قرار می‌دهیم

$$\|f\|_{[\Phi]} := \inf\left\{\lambda > 0: \int_\Omega \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) d\mu(x) \le 1\right\}.$$

در این‌صورت فضای برداری $L^\Phi(\Omega)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$L^\Phi(\Omega) = \{f \in L^0(\Omega): \|f\|_{[\Phi]} < \infty\}.$$

با توجه به فرض زیر مجموعه متناهی بودن، $\left(L^\Phi(\Omega), \|\cdot\|_{[\Phi]}\right)$ یک فضای نرمدار کامل می‌باشد[۲۳]. برای هر عدد حقیقی $1 \le p < \infty$ با در نظر گرفتن تابع $\Phi_{(p)}(x) = |x|^p$ ملاحظه می‌کنیم که $L^{\Phi(p)}(\Omega) = L^p(\Omega)$. بنابراین فضاهای اورلیش تعمیم بسیار گسترده‌ای از فضاهای لبگ می‌باشند که با جایگزین نموده تابع $|\cdot|^p$ با یک تابع یانگ دلخواه مانند Φ به دست می‌آیند. برای هر تابع وزن $w: \Omega \to (0,\infty)$ فضای اورلیش وزن‌دار $L_w^\Phi(\Omega)$ مطابق معمول فضاهای وزندار به صورت زیر تعریف می‌شود

$$L_w^\Phi(\Omega) = \{f \in L^0(\Omega):\ fw \in L^\Phi(\Omega)\}.$$

$L_w^\Phi(\Omega)$ نیز با نرم $\|f\|_{[\Phi],w} := \|fw\|_{[\Phi]}$ یک فضای باناخ می‌باشد. اگر $\Phi \in \Delta_2$ آنگاه با رابطهٔ دوگانی

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)\, d\mu(x)$$

دوگان فضای $L_w^\Phi(\Omega)$ فضای اورلیش $L_{w^{-1}}^\Psi(\Omega)$ می‌باشد، که در آن Ψ مکمل Φ می‌باشد ([۱۹]).
تحقیقات زیادی روی فضاهای اورلیش انجام شده است. برای ملاحظهٔ برخی از این موارد می‌توانید [۲،۱۹،۲۶،۲۷،۲۸] را ببینید.

فضاهای اورلیش وزندار مرتبط با یک فضای تابعی باناخ

فرض کنیم $\mathcal{X}$ یک شبه فضای تابعی باناخ جامد و Φ یک تابع یانگ باشد. برای هر $f \in L^0(\Omega)$ قرار می‌دهیم

$$\|f\|_{[\Phi]} := \inf\left\{\lambda > 0: \Phi\circ\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) \in \mathcal{X},\ \left\|\Phi\circ\left(\frac{|f|}{\lambda}\right)\right\|_{\mathcal{X}} \le 1\right\}, \tag{۱.۱}$$

این تابع را نرم لگزومبورگ[۲] می‌نامیم. فضای برداری همهٔ $f \in L^0(\Omega)$ که $\|f\|_{[\Phi]} < \infty$ را با $\mathcal{X}^{[\Phi]}(\Omega)$ نمایش و آن را فضای اورلیش تعمیم یافته مرتبط با شبه فضای تابعی باناخ $\mathcal{X}$ می‌نامیم. ملاحظه می‌شود این تعریف با جایگزین نمودن $L^1(\Omega)$ با فضای $\mathcal{X}$ در تعریف فضاهای اورلیش به دست می‌آید. بنابراین داریم، $(L^1)^{[\Phi]}(\Omega) = L^{[\Phi]}(\Omega)$ و $(L^1)^{|\cdot|^p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. این نشان می‌دهد که فضاهای اورلیش تعمیم یافته مرتبط با شبه فضای تابعی باناخ $\mathcal{X}^{[\Phi]}(\Omega)$ تعمیم فضاهای لبگ و فضاهای اورلیش می‌باشد. ملاحظه نمایید که برای هر $f \in \mathcal{X}^\Phi(\Omega)$ و هر $E \in \mathcal{A}$ با خاصیت $0 < \mu(A) < \infty$ داریم

$$\|f\chi_E\|_{\mathcal{X}} \le \frac{1}{\Psi^{-1}(\|\chi_E\|_{\mathcal{X}})}\|f\chi_E\|_{[\Phi]}. \tag{۱.۲}$$

---
[۱]- *σ-order continuous*
[۲]- Luxemburg's norm

علاوه بر نرم لگزومبورگ نرم دیگری به نام نرم اولیش[1] نیز برای هر $f \in L^0(\Omega)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|f\|_\Phi := \sup\{\||fv|\|_\mathcal{X} : \Psi \circ |v| \in \mathcal{X} \ \text{ and } \ \|\Psi \circ (|v|)\|_\mathcal{X} \le 1\}. \qquad (۱.۳)$$

فضای تمام توابع $f \in L^0(\Omega)$ که $\|f\|_\Phi < \infty$ را با $\mathcal{X}^\Phi(\Omega)$ نمایش می‌دهیم.

یادآوری ۱.۲: اگر $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ فضای یک فضای اندازهٔ متناهی باشد آنگاه طبق قضیهٔ ۴.۱۱ از [۶] $(\mathcal{X}^{[\Phi]}(\Omega), \|\cdot\|_{[\Phi]})$ یک شبه فضای تابعی باناخ می‌باشد. هم‌چنین طبق قضیهٔ ۴.۶ از [۶] اگر $\mathcal{X}$ یک فضای باناخ باشد آنگاه $(\mathcal{X}^{[\Phi]}(\Omega), \|\cdot\|_{[\Phi]})$ یک فضای تابعی باناخ می‌باشد. با توجه به قضیهٔ ۵.۱ از [۲۱] برای هر $f \in \mathcal{X}^\Phi(\Omega)$ داریم $\|f\|_\Phi \le 2\|f\|_{[\Phi]}$. بنابراین $\mathcal{X}^{[\Phi]}(\Omega) \subseteq \mathcal{X}^\Phi(\Omega)$. علاوه بر این اگر $\mathcal{X}^{[\Phi]}(\Omega)$ با نرم اورلیش $\|\cdot\|_\Phi$ کامل باشد آنگاه طبق قضیهٔ گراف بسته نرم‌های $\|\cdot\|_{[\Phi]}$ و $\|\cdot\|_\Phi$ معادل هستند.

طبق گزارهٔ ۵.۴ از [۷] اگر شبه فضای تابعی باناخ $\mathcal{X}$ دارای خاصیت σ-فاتو باشد و شبه نرم $\|\cdot\|_\mathcal{X}$ روی $\mathcal{X}$ اکیداً صعودی باشد آنگاه برای هر $0 \ne f \in \mathcal{X}^\Phi(\Omega)$ داریم $\left\|\Phi(\frac{|f|}{\|f\|_\Phi})\right\|_\mathcal{X} \le 1$ و $\|f\|_{[\Phi]} \le \|f\|_\Phi$. بنابراین اگر $\mathcal{X}$ دارای خاصیت σ-فاتو باشد و شبه نرم $\|\cdot\|_\mathcal{X}$ روی $\mathcal{X}$ اکیداً صعودی باشد (برای نمونه در حالت $\mathcal{X} = L^1(\Omega)$)، برای هر $f \in \mathcal{X}^\Phi(\Omega)$ داریم

$$\|f\|_{[\Phi]} \le \|f\|_\Phi \le 2\|f\|_{[\Phi]}. \qquad (۱.۴)$$

در نتیجه در این حالت نیز داریم $\mathcal{X}^{[\Phi]}(\Omega) = \mathcal{X}^\Phi(\Omega)$. قضیهٔ ۵.۵ از [۷] نیز مرتبط با این موضوع در شبه فضاهای باناخ می‌باشد. علاوه بر این نامساوی هلدر[2] را در مورد فضاهای اورلیش تعمیم‌یافته مرتبط شبه فضای تابعی باناخ $\mathcal{X}$ به صورت زیر داریم (قضیهٔ ۶.۲ از [۲۱] را ببینید).

نامساوی هلدر: اگر $f \in \mathcal{X}^\Phi(\Omega)$ و $g \in \mathcal{X}^\Psi(\Omega)$ آنگاه $f, g \in \mathcal{X}$ و

$$\|fg\|_X \le \|f\|_\Phi \|g\|_{[\Phi]}. \qquad (۱.۵)$$

برای ملاحظهٔ خواص بیشتر از فضاهای اورلیش مرتبط با یک شبه فضای تابعی باناخ مراجع [۶،۷،۲۱] را ببینید.

در ادامه حالت وزندار فضاهای $\mathcal{X}^{[\Phi]}(\Omega)$ و $\mathcal{X}^\Phi(\Omega)$ را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۳: اگر w یک تابع وزن روی باشد آنگاه فضاهای وزندار $\mathcal{X}_w(\Omega)$، $\mathcal{X}_w^{[\Phi]}(\Omega)$ و $\mathcal{X}_w^\Phi(\Omega)$ به صورت‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathcal{X}_w(\Omega) := \{f \in L^0(\Omega) : fw \in \mathcal{X}\}$$
$$\mathcal{X}_w^\Phi(\Omega) := \{f \in L^0(\Omega) : fw \in \mathcal{X}^\Phi\}$$
$$\mathcal{X}_w^{[\Phi]}(\Omega) := \{f \in L^0(\Omega) : fw \in \mathcal{X}^{[\Phi]}\}$$

به وضوح اگر $\mathcal{X}$ یک شبه فضای باناخ باشد آنگاه فضای $\mathcal{X}_w(\Omega)$ با نرم $\|f\|_{\mathcal{X},w} = \|fw\|_\mathcal{X}$ یک شبه فضای باناخ می‌باشد. هم‌چنین فضاهای $\mathcal{X}_w^\Phi(\Omega)$ و $\mathcal{X}_w^{[\Phi]}(\Omega)$ به ترتیب با نرم‌های $\|f\|_{[\Phi],w} = \|fw\|_{[\Phi]}$ و $\|f\|_{\Phi,w} = \|fw\|_\Phi$ فضاهای نرمدار هستند.

گزارهٔ زیر در مورد نرم‌های لگزومبورگ و اولیش با اهمیت می‌باشد. قبل از بیان این گزاره این نکته لازم است که اگر $L^0(\Omega)$ را با توپولوژی همگرایی روی مجموعه‌های با اندازهٔ متناهی در نظر بگیریم، آنگاه فضای تابعی باناخ $\mathcal{X}$ روی فضای اندازه σ-متناهی $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ یک PCS-فضا است، اگر و تنها اگر نشانندهٔ $\mathcal{X}$ به توی $L^0(\Omega)$ پیوسته باشد. اگر $\mathcal{X}$ یک فضای تابعی

[1]- Orlicz norm

[2]- Hölder's inequality

باناخ جامد روی یک فضای اندازهٔ σ-متناهی باشد آنگاه نشانندهٔ $\mathcal{X}$ به توی $L^0(\Omega)$ پیوسته است (گزارهٔ ۲.۲(i) در [۱۸] را ببینید). بنابراین با توجه به فرض σ-متناهی بودن فضای $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ در این مقاله، فضای تابعی باناخ $\mathcal{X}$ همواره PCS-فضا می‌باشد.

گزارهٔ ۱.۴: فرض کنیم $\mathcal{X}$ یک فضای تابعی باناخ در فضای اندازهٔ σ-متناهی $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ باشد. در این صورت فضاهای $(\mathcal{X}_w^{\Phi}(\Omega),\|\cdot\|_{\Phi,w})$ و $(\mathcal{X}_w^{[\Phi]}(\Omega),\|\cdot\|_{[\Phi],w})$ کامل هستند.

اثبات: با توجه به این‌که $(\mathcal{X}_w^{[\Phi]}(\Omega),\|\cdot\|_{[\Phi],w})$ (یا $(\mathcal{X}_w^{\Phi}(\Omega),\|\cdot\|_{\Phi,w})$)کامل است اگر و تنها اگر $(\mathcal{X}^{[\Phi]}(\Omega),\|\cdot\|_{[\Phi]})$ (یا $(\mathcal{X}^{\Phi}(\Omega),\|\cdot\|_{\Phi})$) کامل باشد کافی است گزاره را در حالت $w=1$ ثابت کنیم. هم‌چنین اثبات کامل بودن $(\mathcal{X}^{[\Phi]}(\Omega),\|\cdot\|_{[\Phi]})$ مشابه کامل بودن حالت متناهی در قضیهٔ ۴.۱۱ [۶] ثابت می‌شود. بنابراین فقط کامل بودن $(\mathcal{X}^{\Phi}(\Omega),\|\cdot\|_{\Phi})$ را ثابت می‌کنیم.

فرض کنید $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنبالهٔ کوشی مثبت و صعودی دلخواه در $\mathcal{X}^{\Phi}(\Omega)$ باشد. طبق قضیهٔ آمیمیا[1] (قضیهٔ ۲ در [۱۳] یا قضیهٔ ۳.۲ در [۶]) برای اثبات کامل بودن $\mathcal{X}^{\Phi}(\Omega)$ کافی است ثابت کنیم $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\in\mathcal{X}^{\Phi}(\Omega)$. با توجه به این‌که فضای اندازه σ-متناهی نظر گرفته شده است، دنبالهٔ $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{A}$ موجود است که $\Omega=\cup_{n=1}^{\infty}A_n$ و نیز برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $\mu(A_n)<\infty$. برای هر $m\in\mathbb{N}$ طبق (1.3) دنبالهٔ $\{f_n\chi_{A_m}\}_{n=1}^{\infty}$ در $\mathcal{X}$ کوشی است. بنابراین با توجه به کامل بودن $\mathcal{X}$ طبق قضیهٔ آمیمیا برای هر $m\in\mathbb{N}$ داریم $h_m:=\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\chi_{A_m}\in\mathcal{X}$. فرض کنید،

$$M=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_{\Phi} \text{ و } f=\sup_{m\in\mathbb{N}}h_m.$$

آنگاه طبق نامساوی هلدر(1.5) برای هر تابع $g\in L^0(\Omega)$ با خاصیت $\|\Psi(|g|)\|_{\mathcal{X}}\le 1$ دنبالهٔ $\{f_ng\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنبالهٔ کوشی در $\mathcal{X}$ است. بنابراین چون $\mathcal{X}$ کامل است عنصر $h_g\in\mathcal{X}$ موجود است که $\lim_{n\to\infty}\|f_ng\to h_g\|_{\mathcal{X}}=0$. اما طبق توضیح قبل از گزاره $\mathcal{X}$ یک PCS-فضا می‌باشد، بنابراین زیر دنباله ای از $\{f_ng\}_{n=1}^{\infty}$ مانند $\{f_{n_k}g\}_{k=1}^{\infty}$ موجود است که $f_{n_k}g\to h_g$ μ-ت.ه. از این‌جا چون $|f_{n_k}g|\to|fg|$ μ-ت.ه. داریم $h_g=|fg|$. بنابراین برای اندیس n به اندازهٔ کافی بزرگ داریم

$$\|fg\|_X\le K\|f_ng-f|g|\|_X+K\|f_ng\|_X\le K+K\|f_n\|_{\Phi}\le K(1+M)<\infty,$$

که در آن K ثابت نامساوی مثلثی در شبه نرم می‌باشد. نامساوی بالا نشان می‌دهد $f\in\mathcal{X}^{\Phi}(\Omega)$ و حکم ثابت است.

در ادامه $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ و $(\Omega',\mathcal{A}',\mu')$ فضاهای σ-متناهی در نظر گرفته شده‌اند، و $\mathcal{X}$ و $\mathcal{X}'$ به ترتیب شبه فضاهای تابعی باناخ روی Ω و Ω' هستند که:

(۱.۶) برای هر $A\in\mathcal{A}$ با $\mu(A)<\infty$ داریم $\chi_A\in\mathcal{X}$ و برای هر $A\in\mathcal{A}'$ با $\mu'(A)<\infty$ داریم $\chi_A\in\mathcal{X}'$.

بنابراین توابع اندازه پذیر با محمل متناهی در $\mathcal{X}$ و $\mathcal{X}'$ قرار دارند. به خصوص توابع ساده که محمل با اندازهٔ متناهی دارند در $\mathcal{X}$ و $\mathcal{X}'$ قرار دارند. در حالت وزن‌دار نیز فرض می‌کنیم،

(۱.۷)برای هر $A\in\mathcal{A}$ با $\mu(A)<\infty$ داریم $w\chi_A\in\mathcal{X}$ و برای هر $A\in\mathcal{A}'$ با $\mu'(A)<\infty$ داریم $w\chi_A\in\mathcal{X}'$.

[1]- Amemiya ،s theorem

۲. قضیهٔ ریس-تورین مختلط

در این بخش قضیهٔ درونیابی ریس-تورین برای فضاهای اورلیش تعمیم‌یافته مرتبط با یک فضای تابعی باناخ ارائه می‌شود. در ادامه متناظر با هر فضای اندازهٔ $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$، هر فضای تابعی باناخ $\mathcal{X}$ روی Ω و هر تابع یانگ Φ، مجموعهٔ تمام توابع ساده در $\mathcal{X}$ را با $\mathcal{S}_\Phi(\mathcal{X})$ نمایش می‌دهیم. هم‌چنین قرار می‌دهیم $S := \{z \in \mathbb{C}: 0 \leq \mathrm{Re}z \leq 1\}$.

تعریف۲.۱: برای هر زوج (Φ_0, Φ_1) از توابع یانگ و هر عدد ثابت $0 < \theta < 1$، تابع میانی Φ_θ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Phi_\theta^{-1} := (\Phi_0^{-1})^{1-\theta}\,(\Phi_1^{-1})^{\theta}. \qquad (۲.۱)$$

توجه کنید که اگر و Δ_2-منظم (N-تابع) باشند، آنگاه تابع میانی متناظر آنها نیز Δ_2-منظم (N-تابع) می‌باشد ([۲۳] لم ۲ از بخش ۶.۳ را ببینید). در لم زیر قضیهٔ سه-خط[1] را یادآوری می‌کنیم.

لم ۲.۲ (قضیهٔ سه-خط): فرض کنید $(X, \|\cdot\|_X)$ یک فضای باناخ و $F: S \to X$ یک تابع کراندار و پیوسته باشد که روی

$$S^\circ = \{z \in \mathbb{C}: 0 < Re z < 1\}$$

تحلیلی است. در این‌صورت برای هر $0 < \theta < 1$ داریم،

$$\|F(\theta)\|_X \leq (\sup\{\|F(it)\|_X: t \in \mathbb{R}\})^{1-\theta}\,(\sup\{\|F(1+it)\|_X: t \in \mathbb{R}\})^{\theta}.$$

اثبات: تمرین ۲.۱.۳.۲ از فصل ۲ [۱۷] را ببینید.

بنابراین مطابق لم ۲.۲ اگر $M_0, M_1 > 0$ ثابت‌هایی باشند که

$$\| F(it) \|_X \leq M_0, \quad \| F(1+it) \|_X \leq M_1, \quad (-\infty < t < \infty),$$

آنگاه برای هر $0 < \theta < 1$ داریم

$$\| F(\theta) \|_X \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}, \quad (-\infty < t < \infty).$$

در ادامه به گزارهٔ زیر نیاز داریم. در این گزاره مجموعهٔ تمام عناصر $f \in L^0(\Omega)$ که $\Phi \circ |f| \in \mathcal{X}$ با $\widetilde{\mathcal{X}}^\Phi$ یا به طور دقیق‌تر با $\widetilde{\mathcal{X}}^\Phi(\Omega)$ نمایش داده شده است. توجه داریم که به وضوح $\widetilde{\mathcal{X}}^\Phi \subseteq \mathcal{X}^{[\Phi]}$. هم‌چنین مشابه اثبات ارائه شده در قضیهٔ ۴.۱۳ از [۶] اگر Φ Δ_2-منظم کلی و $\mathcal{X}$ جامد باشد، می‌توانیم ثابت کنیم $\mathcal{X}^{[\Phi]} \subseteq \widetilde{\mathcal{X}}^\Phi$. زیرا اگر فرض کنیم $\Phi \circ (\frac{|f|}{\lambda}) \in \mathcal{X}$ و $\lambda > 1$. آنگاه داریم،

$$\Phi \circ (|f|) = \Phi \circ \left(\lambda \frac{|f|}{\lambda}\right) \leq \lambda \Phi \circ \left(\frac{|f|}{\lambda}\right) \in \mathcal{X}.$$

از طرفی اگر $\Phi \circ (\frac{|f|}{\lambda}) \in \mathcal{X}$ و $\lambda > 1$ آنگاه با توجه به Δ_2-منظم کلی بودن Φ عدد $\Lambda > 1$ وجود دارد که $\Phi \circ (|f|) = \Phi \circ \left(\lambda \frac{|f|}{\lambda}\right) \leq \Lambda \Phi \circ \left(\frac{|f|}{\lambda}\right) \in \mathcal{X}$. بنابراین با توجه به جامد بودن $\mathcal{X}$ داریم $\Phi(|f|) \in \mathcal{X}$ و حکم ثابت است.

گزارهٔ ۲.۳: فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای تابعی باناخ σ-مرتبهٔ پیوسته، σ-فاتو و جامد روی فضای اندازهٔ $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ باشد. در این صورت اگر Φ یک تابع یانگ Δ_2-منظم کلی باشد آنگاه $\mathcal{S}_\Phi(\mathcal{X})$ در $(\mathcal{X}^{[\Phi]}, \|\cdot\|_{[\Phi]})$ چگال است.

اثبات: فرض کنید $f \in \mathcal{X}^{[\Phi]}$. با توجه به این‌که Δ_2-منظم کلی است، طبق توضیح ارائه شده قبل از گزاره داریم $f \in \widetilde{\mathcal{X}}^\Phi$. اما طبق گزارهٔ ۳.۶ از [21] $\widetilde{\mathcal{X}}^\Phi$ یک فضای برداری است. بنابراین برای هر $\alpha > 0$ داریم $\alpha f \in \widetilde{\mathcal{X}}^\Phi$. به طور

---

[1]- Three-Line Theorem

معادل برای هر $\lambda > 0$ داریم $\Phi(\frac{f}{\lambda}) \in \mathcal{X}$. از طرفی چون f یک تابع اندازه پذیر است، دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ از توابع ساده چنان موجود است که $s_n \xrightarrow{a.e.} f$ و $|s_1| \leq |s_2| \leq \cdots \leq |f|$. بنابراین با توجه به جامد بودن $\mathcal{X}$ (و در نتیجه $\mathcal{X}^{[\Phi]}$) داریم،

۱- برای هر $n \in \mathbb{N}$، $s_n \in \mathcal{X}^{[\Phi]}$،

۲- برای هر $n \in \mathbb{N}$، $0 \leq \Phi \circ \left(\frac{|s_n - f|}{\lambda}\right) \leq \Phi \circ \left(\frac{2|f|}{\lambda}\right) \in \mathcal{X}$،

۳- $\Phi \circ \left(\frac{|s_n - f|}{\lambda}\right) \xrightarrow{a.e.} 0$ روی $\mathcal{X}$.

چون برای هر تابع مختلط مقدار f روی Ω توابع نامنفی f_1، f_2، f_3، و f_4 روی Ω موجودند که می‌توانیم f را به صورت $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$ بنویسیم. با توجه به جامد بودن $\mathcal{X}^{[\Phi]}$ داریم

$f \in \mathcal{X}^{[\Phi]}$ اگر و تنها اگر $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathcal{X}^{[\Phi]}$.

بدون از دست رفتن کلیت می‌توانیم فرض کنیم f نامنفی است. با توجه به (۲) دنبالهٔ

$$\left\{\Phi \circ \left(\frac{2|f|}{\lambda}\right) - \Phi \circ \left(\frac{|s_n - f|}{\lambda}\right)\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\Phi \circ \left(\frac{2f}{\lambda}\right) - \Phi \circ \left(\frac{f - s_n}{\lambda}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

صعودی است. هم‌چنین با توجه به (۳) این دنباله μ-تقریباً همه جا روی Ω به $\Phi \circ \left(\frac{2|f|}{\lambda}\right)$ همگرا می‌باشد. بنابراین چون $\mathcal{X}$ σ-مرتبه پیوسته در نظر گرفته شده است، داریم

$$\lim_{n\to 0} \left\|\Phi \circ \left(\frac{|s_n - f|}{\lambda}\right)\right\|_{\mathcal{X}} = 0, \qquad (\lambda \in (0, \infty)).$$

بنابراین برای هر $k \in \mathbb{N}$ عدد طبیعی N_k موجود است که برای هر $n \geq N_k$ داریم $\left\|\Phi\left(\frac{|s_n - f|}{\frac{1}{k}}\right)\right\|_{\mathcal{X}} \leq 1$.

در نتیجه برای هر $n \geq N_k$ داریم $\|s_n - f\|_{[\Phi]} \leq \frac{1}{k}$. پس می‌توانیم دنبالهٔ $\{s_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ از $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ را چنان انتخاب کنیم که $\lim_{k\to\infty} \left\|s_{n_k} - f\right\|_{[\Phi]} = 0$.

چگال بودن توابع ساده در فضاهای تابعی باناخ بسیار با اهمیت می‌باشد. در این زمینه گزارهٔ زیر را نیز می‌توانیم بیان کنیم. توجه نمایید که مشابه با قضیهٔ ۴.۱۳ در [۶] اگر $\Phi \in \Delta_2$ آنگاه برای هر دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $\mathcal{X}^{[\Phi]}$ داریم

$$\|\Phi(f_n)\|_{\mathcal{X}} \longrightarrow 0, \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \|f_n\|_{[\Phi]} \longrightarrow 0. \tag{۲.۲}$$

گزاره ۲.۴: فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای تابعی باناخ جامد و σ-مرتبهٔ پیوسته باشد. در این صورت

۱- $\mathcal{S}_{\Phi}$ در $\mathcal{X}$ چگال است.

۲- اگر $\Phi \in \Delta_2$ آنگاه $\mathcal{S}_{\Phi}$ در $\mathcal{X}^{[\Phi]}$ چگال است.

اثبات: ۱) فرض کنید $f \in \mathcal{X}$. بدون از دست رفتن کلیت مسئله می‌توانیم f نامنفی است. بنابراین دنبالهٔ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ از توابع سادهٔ نامنفی به شکل $\sum_k \alpha_k \chi_{A_k}$ با $\mu(\bigcup_k A_k) < \infty$ موجود است که $s_n \longrightarrow f$ μ-ت.ه. بنابراین با توجه به فرض σ-مرتبه پیوسته بودن $\mathcal{X}$ داریم $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{X}$ و $\|f - s_n\|_{\mathcal{X}} \longrightarrow 0$.

۲) فرض کنید $\Phi \in \Delta_2$. اگر f عنصری نامنفی در $\mathcal{X}^{[\Phi]}$ و $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای نامنفی از توابع ساده باشد که $s_n \longrightarrow f$ μ-ت.ه. آنگاه $\Phi(f - s_n) \downarrow 0$ و در نتیجه با توجه به (2.2) داریم $\|f - s_n\|_{[\Phi]} \longrightarrow 0$.

اثبات لم زیر نیز با توجه تعریف نرم فضاهای وزن‌دار واضح است اما در این مبحث سودمند است.

لم ۲.۵: اگر $\mathcal{S}$ زیر مجموعه‌ای چگال از $(\mathcal{X}^{[\Phi]}, \|\cdot\|_{[\Phi]})$ (یا $(\mathcal{X}^{\Phi}, \|\cdot\|_{\Phi})$) باشد، آنگاه برای هر تابع وزن v روی Ω

مجموعهٔ $\{\frac{f}{v}: f \in \mathcal{S}\}$ در $(\mathcal{X}_v^{[\Phi]}, \|\cdot\|_{[\Phi],v})$ (یا $(\mathcal{X}_v^{\Phi}, \|\cdot\|_{\Phi,v})$) چگال است.

نکته: در ادامه برای $(i = 1,2)$ زوج‌های (Φ_i, Ψ_i) و $(\widetilde{\Phi}_i, \widetilde{\Psi}_i)$ زوج‌های مکمل از N-توابع در نظر گرفته شده‌اند. بنابراین توابع Φ_i، Ψ_i، $\widetilde{\Phi}_i$، و $\widetilde{\Psi}_i$ اکیداً صعودی هستند و در نقاط ناصفر ناصفر هستند (گزارهٔ ۱ از صفحه ۱۳ از [۲۳] را ببینید). برای هر $0 < \theta < 1$ Φ_θ را تابع میانی متناظر با Φ_0 و Φ_1، و $\widetilde{\Phi}_\theta$ را تابع میانی متناظر با $\widetilde{\Phi}_0$ و $\widetilde{\Phi}_1$ در نظر می‌گیریم. با توجه به لم ۲ در صفحهٔ ۲۲۳ از [۲۳] توابع Φ_θ و $\widetilde{\Phi}_\theta$ نیز N -تابع هستند. هم‌چنین فرض می‌کنیم $\mathcal{X}$ و $\mathcal{X}'$ به ترتیب فضاهای تابعی باناخ جامد روی Ω و Ω' هستند که $\mathcal{S}_{\Phi_\theta}(\Omega)$ و $\mathcal{S}_{\widetilde{\Psi}_\theta}(\Omega')$ به ترتیب در $\mathcal{X}^{\Phi_\theta}(\Omega)$ و $\mathcal{X}^{\widetilde{\Psi}_\theta}(\Omega')$ چگال هستند. در گزاره‌های ۲.۳ و ۲.۴ و یادآوری ۱.۲ شرایطی برای چگال بودن توابع ساده بیان شده است. به علاوه با توجه به این‌که فضاهای تابعی باناخ $\mathcal{X}$ و $\mathcal{X}'$ را کامل در نظر می‌گیریم طبق گزارهٔ 1.4 برای $(i = 1,2)$ فضاهای $\mathcal{X}^{[\Phi_i]}(\Omega)$ و $\mathcal{X}'^{\widetilde{\Phi}_i}(\Omega')$ نیز کامل هستند. هم‌چنین طبق لم ۲ از صفحهٔ ۲۲۳ [۲۳] فضاهای $\mathcal{X}^{[\Phi_\theta]}(\Omega)$ و $\mathcal{X}'^{\widetilde{\Phi}_\theta}(\Omega')$ نیز کامل هستند.

قضیهٔ بعد قضیهٔ اصلی این بخش می‌باشد. برای ملاحظه این قضیه در فضاهای اورلیش قضیهٔ ۳.۷ در [۸]، قضیهٔ ۱۰.۱ از [۱۱]، قضیهٔ ۱.۱ از [۱۵]، قضیهٔ ۲ فصل ۱ از [۲۴] و قضیهٔ ۵ فصل از VI [۲۳] را ببینید. هم‌چنین این قضیه در فضاهای لبگ را می‌توان در [۹،۱۰،۲۰] ملاحظه کرد.

قضیه ۲.۶: فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{X}'$ به ترتیب فضاهای تابعی باناخ جامد به ترتیب روی Ω و Ω' باشند. هم‌چنین فرض کنید v_0 و v_1 دو وزن روی Ω و w_0 و w_1 وزن‌هایی روی Ω' باشند. فرض کنید توابع

$$\Gamma: \Omega' \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad \text{و} \quad \Upsilon: \Omega \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

در خواص زیر صدق کنند:

۱- برای هر $z \in \mathbb{C}$ داشته باشیم $\Gamma(\cdot, z) \in \mathcal{X}'$ و $\Upsilon(\cdot, z) \in \mathcal{X}$ و هم‌چنین نگاشت‌های

$$z \mapsto \Upsilon(\cdot, z): S \longrightarrow \mathcal{X} \text{ و } z \mapsto \Gamma(\cdot, z): S \longrightarrow \mathcal{X}'$$

روی S کراندار و پیوسته و روی S° تحلیلی باشند.

۲- برای هر $y \in \Omega'$ و هر $t \in \mathbb{R}$

$$|\Gamma(y, it)| \le w_0(y) \quad \text{و} \quad |\Gamma(y, 1 + it)| \le w_1(y).$$

۳- برای هر $x \in \Omega$ و هر $t \in \mathbb{R}$

$$|\Upsilon(x, it)| \le \frac{1}{v_0(x)} \quad \text{و} \quad |\Upsilon(x, 1 + it)| \le \frac{1}{v_1(x)}.$$

۴- برای هر $0 < \theta < 1$، هر $x \in \Omega$ و هر $y \in \Omega'$ داشته باشیم $\Gamma(y, \theta) > 0$ و $\Upsilon(x, \theta) > 0$.

در این صورت با فرض $w_\theta(y) := \Gamma(y, \theta)$ و $v_\theta(x) := \frac{1}{\Upsilon(x,\theta)}$ $(x \in \Omega, y \in \Omega')$، اگر برای هر $f \in \mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]}(\Omega)$ و هر $g \in \mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]}(\Omega)$

$$\|T(f)\|_{\widetilde{\Phi}_0, w_0} \le M_0 \, \|f\|_{[\Phi_0], v_0}. \tag{۲.۳}$$

و

$$\|T(g)\|_{\widetilde{\Phi}_1, w_1} \le M_1 \, \|g\|_{[\Phi_1], v_1}, \tag{۲.۴}$$

آنگاه برای هر $f \in \mathcal{X}_{v_\theta}^{[\Phi_\theta]}(\Omega)$ داریم

$$\|Tf\|_{\widetilde{\Phi}_\theta,w_\theta} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}\ \|f\|_{[\Phi_\theta],v_\theta}.$$

اثبات: فرض کنید $\widetilde{\Psi}_\theta$ تابع مکمل $\widetilde{\Phi}_\theta$، f تابعی ساده روی Ω باشد که $\|f\|_{[\Phi_\theta]} \leq 1$ و g تابعی ساده روی Ω' با خاصیت $\left\|\widetilde{\Psi}_\theta \circ (|g|)\right\|_Y \leq 1$ باشد. برای هر $x \in \Omega$، هر $y \in \Omega'$ و هر $z \in \mathbb{C}$ قرار می‌دهیم،

$$A(x,z) := sgn(f(x))\ [\Phi_0^{-1}(\Phi_\theta(|f(x)|))]^{1-z}\ [\Phi_1^{-1}(\Phi_\theta(|f(x)|))]^{z}\ \Upsilon(x,z),$$
$$B(y,z) := sgn(g(y))\ [\widetilde{\Psi}_0^{-1}(\widetilde{\Psi}_\theta(|g(y)|))]^{1-z}\ [\widetilde{\Psi}_1^{-1}\left(\widetilde{\Psi}_\theta(|g(y)|)\right)]^{z}\ \Gamma(y,z).$$

در این صورت با توجه به تعریف تابع میانی داریم $A(\cdot,\theta) = \frac{f}{v_\theta}$ و $B(\cdot,\theta) = gw_\theta$. همچنین با توجه به صعودی بودن $\widetilde{\Psi}_0$ و فرض (۱) برای هر $y \in \Omega'$ و هر $t \in \mathbb{R}$ داریم

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi}_0(|B(y,it)|\ w_0^{-1}(y)) &= \widetilde{\Psi}_0\big(\widetilde{\Psi}_0^{-1}(\widetilde{\Psi}_\theta(|g(y)|))\ |\Gamma(y,it)|\ w_0^{-1}(y)\big)\\ &\leq \widetilde{\Psi}_0\big(\widetilde{\Psi}_0^{-1}(\widetilde{\Psi}_\theta(|g(y)|))\big)\\ &= \widetilde{\Psi}_\theta(|g(y)|).\end{aligned}$$

چون $(\mathcal{X}',\|\cdot\|_{\mathcal{X}'})$ یک فضای تابعی باناخ جامد می‌باشد و $\|\ \widetilde{\Psi}_\theta \circ |g|\ \|_Y \leq 1$ داریم،

$$\left\|\widetilde{\Psi}_0 \circ (|B(\cdot,it)|\ w_0^{-1}(\cdot))\right\|_Y \leq \left\|\widetilde{\Psi}_\theta \circ (|g(\cdot)|)\right\|_Y \leq 1. \qquad (۲.۵)$$

بنابراین با توجه به تعریف نرم لگزومبورگ،

$$\|B(\cdot,it)\|_{[\widetilde{\Psi}_0],w_0^{-1}} \leq 1. \qquad (۲.۶)$$

به طور مشابه برای هر $t \in \mathbb{R}$ داریم،

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{\Psi}_1 \circ (|B(\cdot\,,1+it)|\ w_1^{-1}(\cdot))\right\|_{\mathcal{X}'} &= \left\|\widetilde{\Psi}_1 \circ \big(\widetilde{\Psi}_1^{-1} \circ (\widetilde{\Psi}_\theta \circ (|g(\cdot)|)\ |\Gamma(\cdot\,,1+it)|\ w_1^{-1}(\cdot)\big)\right\|_{\mathcal{X}'}\\ &\leq \left\|\widetilde{\Psi}_1 \circ \big(\widetilde{\Psi}_1^{-1} \circ (\widetilde{\Psi}_\theta \circ (|g(\cdot)|)\big)\right\|_{\mathcal{X}'}\\ &= \left\|\widetilde{\Psi}_\theta \circ (|g|)\right\|_{\mathcal{X}'} \leq 1,\end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\|B(\cdot\,,1+it)\|_{[\widetilde{\Psi}_1],w_1^{-1}} \leq 1. \qquad (۲.۷)$$

با روش(۲.۸) فوق و با توجه به جامد بودن $\mathcal{X}'$ و فرض (۲) ملاحظه می‌شود که برای هر $t \in \mathbb{R}$ داریم،

$$\|A(\cdot,it)\|_{[\Phi_0],v_0} \leq 1 \quad \text{and} \quad \|A(\cdot\,,1+it)\|_{[\Phi_1],v_1} \leq 1, \qquad (۲.۸)$$

حال تابع $F: S \to \mathcal{X}'$ را با ضابطهٔ زیر در نظر می‌گیریم:

$$F(z) := T(A(\cdot,z))B(\cdot,z), \qquad (z \in S \subset \mathbb{C}).$$

در این صورت با توجه به نامساوی هلدر (1.5) و رابطه‌های (2.3)، (2.6)، و (2.8) داریم،

$$\begin{aligned}\|F(it)\|_{\mathcal{X}'} &= \|T(A(\cdot,it))B(\cdot,it)\|_{\mathcal{X}'}\\ &\leq \|T(A(\cdot,it))\|_{\widetilde{\Phi}_0,w_0}\ \ \|B(\cdot,it)\|_{[\widetilde{\Psi}_0],w_0^{-1}}\\ &\leq \|T(A(\cdot,it))\|_{\widetilde{\Phi}_0,w_0}\\ &\leq M_0\ \|A(\cdot,it)\|_{[\Phi_0],v_0} \leq M_0.\end{aligned}$$

به طور مشابه با استفاده از روابط (۲.۴) ، (۲.۷) و (۲.۸) برای هر $t \in \mathbb{R}$ داریم

$$\begin{aligned}\|F(1+it)\|_Y &= \|T(A(\cdot\,,1+it))B(\cdot\,,1+it)\|_{\mathcal{X}'}\\ &\leq \|T(A(\cdot\,,1+it))\|_{\widetilde{\Phi}_1,w_1}\ \ \|B(\cdot\,,1+it)\|_{[\widetilde{\Psi}_1],w_1^{-1}}\\ &\leq \|T(A(\cdot\,,1+it))\|_{\widetilde{\Phi}_1,w_1}\\ &\leq M_1\ \|A(\cdot\,,1+it)\|_{[\Phi_1],v_1} \leq M_1.\end{aligned}$$

از طرفی توابع

$$z \mapsto A(\cdot, z): S \longrightarrow \mathcal{X}$$

و

$$z \mapsto B(\cdot, z): S \longrightarrow \mathcal{X}'$$

روی S کراندار و پیوسته و روی S° تحلیلی هستند. زیرا اگر $f := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$، که در آن برای هر $i = 1, \dots, n$ $\alpha_i \in \mathbb{C}$ و $\{E_1, \dots, E_n\}$ زیرمجموعه‌هایی دو به دو جدا از هم از Ω هستند، آنگاه برای هر $x \in \Omega$ و هر $z \in \mathbb{C}$

$$A(x,z) = sgn(f(x)) \ \sum_{i=1}^{n} [\Phi_0^{-1}(\Phi_\theta(|\alpha_i|))]^{1-z} \chi_{E_i} \ \times \sum_{i=1}^{n} [\Phi_1^{-1}(\Phi_\theta(|\alpha_i|))]^{z} \chi_{E_i}\, \Upsilon(x,z),$$

و برای هر $\beta, \gamma \in L^0(\Omega)$ نگاشت‌های

$$z \mapsto \beta(\cdot)^{1-z} \chi_E: S \longrightarrow \mathcal{X}$$

و

$$z \mapsto \gamma(\cdot)^{z} \chi_E: S \longrightarrow \mathcal{X}',$$

روی S کراندار و پیوسته و روی S° تحلیلی هستند. همین خواص برای تابع با ضابطهٔ $z \to B(\cdot, z): S \mapsto \mathcal{X}'$ برقرار است و در نتیجه با توجه به فرض (۳) قضیه، تابع F روی S کراندار و پیوسته و روی S° تحلیلی می‌باشد. بنابراین با استفاده از قضیهٔ سه‌−خط (۲.۲) داریم

$$\left\| T\left(\frac{f}{v_\theta}\right) \cdot g w_\theta \right\|_{\mathcal{X}'} = \|F(\theta)\|_Y \le M_0^{1-\theta}\, M_1^{\theta}. \qquad (۲.۹)$$

در نتیجه با توجه به فرض چگال بودن $\mathcal{S}_{\widetilde{\Psi}_\theta}(\mathcal{X}')$ در $({\mathcal{X}'}^{\widetilde{\Psi}_\theta}(\Omega'), \|\cdot\|_{\widetilde{\Psi}_\theta})$ داریم،

$$\begin{aligned}
\left\| T\left(\frac{f}{v_\theta}\right) \right\|_{\widetilde{\Phi}_\theta, w_\theta} &= \left\| T\left(\frac{f}{v_\theta}\right) w_\theta \right\|_{\widetilde{\Phi}_\theta} \\
&= \sup\left\{ \left\| T\left(\frac{f}{v_\theta}\right) w_\theta h \right\|_{\mathcal{X}'} : \left\| \widetilde{\Psi}_\theta \circ (|h|) \right\|_{\mathcal{X}'} \le 1 \right\} \\
&= \sup\left\{ \left\| T\left(\frac{f}{v_\theta}\right) w_\theta k \right\|_{\mathcal{X}'} : \left\| \widetilde{\Psi}_\theta \circ (|k|) \right\|_{\mathcal{X}'} \le 1 \text{ است و } k \text{ یک تابع ساده} \right\} \\
&\le M_0^{1-\theta}\, M_1^{\theta}.
\end{aligned}$$

حال چون طبق لم ۲.۵ مجموعهٔ $\left\{ \frac{f}{v_\theta} : f \in \mathcal{S}_\Phi(\mathcal{X}) \right\}$ در $(\mathcal{X}_{v_\theta}^{\Phi_\theta}, \|\cdot\|_{[\Phi_\theta], v_\theta})$ چگال است، اثبات قضیه کامل می‌باشد.

مثال ۲.۷: فرض کنید v_0 و v_1 تابع‌های وزن روی Ω و w_0 و w_1 تابع‌های وزن روی Ω' باشند. آنگاه زوج توابع زیر در خواص قضیهٔ ۲.۶ صدق می‌کنند.

$$1 - \quad \begin{cases} \Gamma(y,z) := & w_0(y)^{1-z}\, w_1(y)^{z}, \qquad (y \in \Omega', \quad z \in \mathbb{C}), \\ \Upsilon(x,z) := & v_0(x)^{z-1} v_1(x)^{-z}, \qquad (x \in \Omega, \ z \in \mathbb{C}). \end{cases}$$

$$2 - \quad \begin{cases} \Gamma(y,z) := & \min\{w_0(y), w_1(y)\}, \qquad (y \in \Omega', \quad z \in \mathbb{C}), \\ \Upsilon(x,z) := & \min\left\{\frac{1}{v_0(x)}, \frac{1}{v_1(x)}\right\}, \qquad (x \in \Omega, \ z \in \mathbb{C}). \end{cases}$$

یادآوری ۲.۸: ۱- اگر توابع Γ و Υ را با ضابطه‌های زیر تعریف کنیم،

$$\begin{cases} \Gamma(y,z) := & |w_0(y)^{1-z}|^{1-z} |w_1(y)^{z}|^{z}, \quad (y \in \Omega', \ z \in \mathbb{C}), \\ \Upsilon(x,z) := & |v_0(x)^{1-z}|^{1-z} |v_1(x)^{z}|^{z}, \quad (x \in \Omega, \ z \in \mathbb{C}). \end{cases}$$

آنگاه این توابع در تمام شرایط قضیهٔ ۲.۶ صدق می‌کنند به جز این‌که توابع $\Gamma(\cdot, z)$ و $\Upsilon(\cdot, z)$ در z تحلیلی نیستند.

۲- با نمادها و مفروضات قضیهٔ ۲.۶ اگر $\mathcal{X}$ و $\mathcal{X}'$ σ-فاتو باشند و برای $i=0,1$ نگاشت‌های

$$T:(\mathcal{X}_{v_i}^{[\Phi_i]},\|\cdot\|_{[\Phi_i],v_i})\to(\mathcal{X}_{w_i}^{\tilde{\Phi}_i},\|\cdot\|_{\tilde{\Phi}_i,w_i})$$

خطی و کراندار با نرم‌های M_i باشند، آنگاه نگاشت

$$T:\left(\mathcal{X}_{v_\theta}^{[\Phi_\theta]},\|\cdot\|_{[\Phi_\theta],v_\theta}\right)\to\left(\mathcal{X}_{w_\theta}^{\tilde{\Phi}_\theta},\|\cdot\|_{\tilde{\Phi}_\theta,w_\theta}\right),$$

نیز کراندار با نرم کوچک‌تر یا مساوی $M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$ می‌باشد. هم‌چنین اگر در اثبات قضیهٔ ۲.۶ به جای توابع سادهٔ f روی Ω که $\|f\|_{[\Phi_\theta],v_\theta}\le 1$، توابع سادهٔ با خاصیت $\|f\|_{\Phi_\theta,v_\theta}\le 1$ را در نظر بگیریم، با استفاده از رابطهٔ (۱.۴)، نگاشت خطی

$$T:\left(\mathcal{X}_{v_\theta}^{\Phi_\theta},\|\cdot\|_{\Phi_\theta,v_\theta}\right)\to\left(\mathcal{X}_{w_\theta}^{\tilde{\Phi}_\theta},\|\cdot\|_{\tilde{\Phi}_\theta,w_\theta}\right)$$

کراندار است و داریم، $\|T\|\le M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$.

۳- اگر در روابط (۲.۳) و (۲.۴) هر چهار فضا را بانرم‌های لگزومبورگ در نظر بگیریم، یعنی فرض کنیم برای $i=0,1$ توابع

$$T:\left(\mathcal{X}_{v_i}^{[\Phi_i]},\|\cdot\|_{[\Phi_i],v_i}\right)\to\left(\mathcal{X}_{w_i}^{[\tilde{\Phi}_i]},\|\cdot\|_{[\tilde{\Phi}_i],w_i}\right)$$

نگاشت‌های خطی و کراندار با نرم‌های کمتر یا مساوی با M_i هستند، آنگاه با استفاده از قسمت دوم رابطهٔ (1.4) و نامساوی هلدر (۱.۵) برای هر $t\in\mathbb{R}$ داریم،

$$\begin{aligned}\|F(it)\|_{\mathcal{X}'}&=\|T(A(\cdot,it))B(\cdot,it)\|_{\mathcal{X}'}\\&\le\|T(A(\cdot,it))\|_{\tilde{\Phi}_0,w_0}\ \|B(\cdot,it)\|_{[\tilde{\Psi}_0],w_0^{-1}}\\&\le 2\ \|T(A(\cdot,it))\|_{[\tilde{\Phi}_0],w_0}\\&\le 2M_0\ \|A(\cdot,it)\|_{[\Phi_0],v_0}\le ۲\cdot M_0.\end{aligned}$$

به طور مشابه برای هر $t\in\mathbb{R}$ داریم $\|F(1+it)\|_{\mathcal{X}'}\le 2\cdot M_1$. در نتیجه،

$$\|F(\theta)\|_{\mathcal{X}'}\le(2M_0)^{1-\theta}(2M_1)^{\theta}=2M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}.$$

این نشان می‌دهد که نگاشت خطی $T:\left(\mathcal{X}_{v_\theta}^{[\Phi_\theta]},\|\cdot\|_{[\Phi_\theta],v_\theta}\right)\to\left(\mathcal{X}_{w_\theta}^{[\tilde{\Phi}_\theta]},\|\cdot\|_{[\tilde{\Phi}_\theta],w_\theta}\right)$ نیز کراندار است و نرم عملگری آن حداکثر $2M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$ است. با روشی مشابه اگر در روابط (۲.۳) و (۲.۴) تمامی نرم‌ها را نرم اورلیش (۱.۳) در نظر بگیریم، آنگاه نگاشت $T:\left(\mathcal{X}_{v_\theta}^{\Phi_\theta},\|\cdot\|_{\Phi_\theta,v_\theta}\right)\to\left(\mathcal{X}_{w_\theta}^{\tilde{\Phi}_\theta},\|\cdot\|_{\tilde{\Phi}_\theta,w_\theta}\right)$ نیز کراندار با نرم کمتر یا مساوی ۲ $M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$ می‌باشد.

۴- اگر $\|T\|_{A\to B}$ نرم عملگری نگاشت $T:A\to B$ را نمایش دهد که A و B فضاهای نرم‌دار هستند، آنگاه تخمین ثابت C که

$$\|T\|_{L^{\Phi_\theta}\to L^{\tilde{\Phi}_\theta}}\le C\left(\|T\|_{L^{\Phi_0}\to L^{\tilde{\Phi}_0}}\right)^{1-\theta}\left(\|T\|_{L^{\Phi_1}\to L^{\tilde{\Phi}_1}}\right)^{\theta},$$

در بسیاری از تحقیقات مورد توجه بوده است. این ثابت C که ثابت میانی[۱] نامیده می‌شود، در فضای مورد بحث [۱۵] در حالت مختلط ۴ و در حالت حقیقی ۸ محاسبه شده است. ثابت متناظر در [۴] و [۲۲] به ترتیب ۲ و ۴ می‌باشد. در [۱۵] ثابت میانی در هر دو حالت نرم لگزومبورگ و نرم اورلیش با خاصیت

$$\|T\|_{L^{\Phi}\to L^{\Phi}}\le C(\|T\|_{L^{p_0}\to L^{p_0}})^{1-\theta}(\|T\|_{L^{p_1}\to L^{p_1}})^{\theta}$$

[1]- intermediate constant

برای یک تابع معقر ρ[۱]، $\Phi^{-1}(x) = x^{\frac{1}{p_0}}\rho(x^{\frac{1}{p_1}}/x^{\frac{1}{p_0}})$ می‌باشد، محاسبه شده است. یادآوری می‌شود که تعریف تابع مقعر عکس تابع محدب می‌باشد، به این صورت که $\rho: A \to B$ را مقعر می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in A$ و هر عدد حقیقی $0 \le t \le 1$ داشته باشیم،

$$\rho\big((1-t)x + ty\big) \ge (1-t)\rho(x) + t\rho(y).$$

بنابراین قسمت‌های ۱ و ۲ این یادآوری در واقع تحت شرایط قضیهٔ ۲.۶، تخمینی برای ثابت میانی در نگاشت‌های کراندار روی فضاهای اورلیش تعمیم یافته مرتبط با یک فضای تابعی باناخ ارائه می‌دهد.

۳. فضاهای درونیابی مختلط $[\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]}, \mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]}]_\theta$

در این بخش نشان می‌دهیم که اگر Φ_0 و Φ_1 دو N-تابع Δ_2-منظم، و v_0 و v_1 تابع‌های وزنی روی Ω باشند، آنگاه برای هر $0 < \theta < 1$ با در نظر گرفتن Φ_θ به عنوان تابع میانی Φ_0 و Φ_1 و $v_\theta = v_0^{1-\theta}\, v_1^{\theta}$، فضای درونیابی مختلط متناظر $(\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]}, \mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]})$ معادل فضای اورلیش تعمیم‌یافتهٔ وزن‌دار $\mathcal{X}_{v_\theta}^{[\Phi_\theta]}$ می‌باشد.

ابتدا تعاریف و نمادهایی از [۱۷] که جهت ارائهٔ نتایج مورد نیاز است را بیان می‌کنیم. فرض کنیم X_0 و X_1 فضاهای باناخ باشند. در این صورت زوج مرتب (X_0, X_1) را یک جفت درونیابی[۲] از فضاهای باناخ مختلط می‌نامند، هرگاه هر دو فضای X_0 و X_1 به طور پیوسته در یک فضای توپولوژیک هاوسدورف نشانده شده باشند. برای دو زوج (X_0, X_1) و (Y_0, Y_1) از جفت‌های درونیابی، نماد $T: (X_0, X_1) \longrightarrow (Y_0, Y_1)$ را برای تابع خطی $T: X_0 + X_1 \longrightarrow Y_0 + Y_1$ در نظر می‌گیریم که تحدیدهای $T|_{X_0}: X_0 \longrightarrow Y_0$ و $T|_{X_1}: X_1 \longrightarrow Y_1$ از آن خوشتعریف و پیوسته باشند. اگر (X_0, X_1) یک جفت درونیابی از فضاهای باناخ مختلط و مانند بخش قبل S نوار $\{z \in \mathbb{C}: 0 \le \mathrm{Re}z \le 1\}$ باشد، آنگاه $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ را فضای تمام توابع $F: S \to X_0 + X_1$ در نظر می‌گیریم که:

۱- F در تمام نقاط درون S تحلیلی و روی مرز آن کراندار و پیوسته است.

۲- نگاشت‌های $t \longmapsto F(it)$ و $t \longmapsto F(1+it)$ $(t \in \mathbb{R})$ به ترتیب در $C_b(\mathbb{R}, X_0)$ و $C_b(\mathbb{R}, X_1)$ قرار دارند، یعنی پیوسته و کراندار هستند و

$$\|F\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)} = \max\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}}\|F(it)\|_{X_0}, \sup_{t\in\mathbb{R}}\|F(1+it)\|_{X_1}\right\} < \infty.$$

برای هر $0 < \theta < 1$ فضای درونیابی مختلط[۳] $[X_0, X_1]_\theta$ به صورت تعریف می‌شود.

$$[X_0, X_1]_\theta = \{F(\theta): F \in \mathcal{F}(X_0, X_1)\}.$$

فضای $[X_0, X_1]_\theta$ با نرم زیر به یک فضای باناخ تبدیل می‌شود. هم‌چنین با توجه به گزاره ۲.۴ از [۱۷] داریم،

$$\|z\|_{[X_0,X_1]_\theta} = \inf_{F\in\mathcal{F}(X_0,X_1), F(\theta)=z}\|F\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)}, \quad (z \in [X_0, X_1]_\theta)$$

توجه نمایید که با توجه به گزاره ۲.۴ از [۱۷] داریم،

$$X_0 \cap X_1 \subseteq [X_0, X_1]_\theta \subseteq X_0 + X_1.$$

مطابق توضیحات صفحهٔ ۴۸ از [۱۷] می‌توانیم لم زیر را بیان کنیم.

لم ۳.۱ (اصل ماکسیمال): اگر X یک فضای باناخ و تابع $F: S \to X$ روی درون S تحلیلی و روی S کراندار و پیوسته باشد

---

[1]- concave function

[2]- interpolation couple

[3]- complex interpolation space

آنگاه برای هر $x \in S$ داریم،

$$\|F(x)\|_X \le \max\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}}\|F(it)\|_X, \sup_{t\in\mathbb{R}}\|F(1+it)\|_X\right\}.$$

کارائی لم فوق قضیهٔ زیر است. در این قضیه برای دو فضای نرم‌دار X و Y فضای تمام توابع خطی و کراندار از X به Y را با $L(X,Y)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳.۲: فرض کنیم (X_0,X_1) و $(\widetilde{X_0},\widetilde{X_1})$ جفت‌های درونیابی مختلط و $T \in L(X_0,\widetilde{X_0}) \cap L(X_1,\widetilde{X_1})$. در این صورت برای هر $\theta \in (0,1)$ تحدید T به $[X_0,X_1]_\theta$ یک نگاشت خطی کراندار از $[X_0,X_1]_\theta$ به توی $[\widetilde{X_0},\widetilde{X_1}]_\theta$ می‌باشد. به علاوه داریم،

$$\|T\|_{[X_0,X_1]_\theta\to[\widetilde{X_0},\widetilde{X_1}]_\theta} \le (\|T\|_{X_0\to\widetilde{X_0}})^{1-\theta}(\|T\|_{X_1\to\widetilde{X_1}})^{\theta}.$$

اثبات: قضیهٔ ۲.۶ از [۱۷] را ببینید.

برای ملاحظهٔ جزییات بیشتر از فضاهای درونیابی فصل دوم از [۱۷] یا [۴] را ببینید. قضیهٔ زیر توسیعی بسیار گسترده از مثال ۲.۱۱ از [۱۷] را ارائه می‌دهد. مجدداً یادآوری می‌کنیم که $\mathcal{X}$ یک فضای تابعی باناخ روی Ω، Φ_0 و Φ_1 دو N-تابع، $0<\theta<1$، Φ_θ تابع میانی متناظر با Φ_0 و Φ_1 و فضاهای $\mathcal{X}^{\Phi_0}$، $\mathcal{X}^{\Phi_1}$ و $\mathcal{X}^{\Phi_\theta}$ کامل هستند. هم‌چنین فرض کنیم v_0 و v_1 تابع‌های وزن روی Ω و $v_\theta = v_0^{1-\theta}\, v_1^{\theta}$ باشد.

قضیهٔ ۳.۳: $[\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]}, \mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]}]_\theta = \mathcal{X}_{v_\theta}^{[\Phi_\theta]}$.

اثبات: فرض کنید $f \in \mathcal{S}_{\Phi_\theta}(\Omega)$ و $\| f \|_{[\Phi_\theta]}=1$. مطابق قضیهٔ ۲.۶ برای هر $x\in\Omega$ و $z\in\mathbb{C}$ قرار می‌دهیم،

$$A(x,z) := sgn(f(x))\ [\Phi_0^{-1}(\Phi_\theta(|f(x)|))]^{1-z}\ [\Phi_1^{-1}(\Phi_\theta(|f(x)|))]^{z}\ \frac{1}{v_\theta(x)}.$$

در این‌صورت تابع با ضابطهٔ $z\longmapsto A(\cdot,z)$ با مقادیر توی $\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]}+\mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]}$ روی S کراندار و پیوسته و روی S° تحلیلی است. هم‌چنین تابع $t\longmapsto A(\cdot,it)$ با مقادیر توی $\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]}$ و تابع $t\longmapsto A(\cdot,1+it)$ با مقادیر توی $\mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]}$ پیوسته هستند. به علاوه همان‌طور که در اثبات قضیهٔ ۲.۶ ثابت شد، برای هر $t\in\mathbb{R}$ داریم،

$$\|A(\cdot,1+it)\|_{[\Phi_1],v_1} \le 1 \text{ و } \|A(\cdot,it)\|_{[\Phi_0],v_0} \le 1.$$

بنابراین تابع $z\longmapsto A(\cdot,z)$ به فضای $\mathcal{F}(\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]},\mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]})$ تعلق دارد و

$$\| A(\cdot,z) \|_{\mathcal{F}(\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]},\mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]})} = \max\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}}\|A(\cdot,it)\|_{[\Phi_0],v_0}, \sup_{t\in\mathbb{R}}\|A(\cdot,1+it)\|_{[\Phi_1],v_1}\right\} \le 1.$$

حال چون $A(\cdot,\theta)=\frac{f}{v_\theta}$ داریم،

$$\left\|\frac{f}{v_\theta}\right\|_{[\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]},\mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]}]_\theta} \le \|A(\cdot,z)\|_{\mathcal{F}(\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]},\mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]})} \le 1 = \left\|\frac{f}{v_\theta}\right\|_{[\Phi_\theta],v_\theta}.$$

بنابراین، $[\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]},\mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]}]_\theta \subseteq \mathcal{X}_{v_\theta}^{[\Phi_\theta]}$. برای اثبات عکس شمول فرض کنید $f\in\mathcal{X}_{v_\theta}^{[\Phi_\theta]}$ و $\|f\|_{[\Phi_\theta],v_\theta}=1$. در این‌صورت چون طبق فرض $\mathcal{S}_{\Phi_\theta}$ در $\mathcal{X}^{\Phi_\theta}$ چگال است،

$$1 = \|f\|_{\Phi_\theta,v_\theta} = \|fv_\theta\|_{\Phi_\theta} = \sup\{\|fv_\theta s\|_{\mathcal{X}} : s\in\mathcal{S}_{\Phi_\theta}(\mathcal{X}), \|\Psi_\theta(s)\|_{\mathcal{X}}\le 1\}.$$

برای هر $s\in\mathcal{S}_{\Phi_\theta}(\mathcal{X})$ با $\| \Psi_\theta(s) \|_{\mathcal{X}}\le 1$ مشابه قضیهٔ ۲.۶ تابع B را روی $\Omega\times\mathbb{C}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$B(x,z) := sgn(s(x))\ [\widetilde{\Psi}_0^{-1}(\widetilde{\Psi}_\theta(|s(x)|))]^{1-z}\ [\widetilde{\Psi}_1^{-1}(\widetilde{\Psi}_\theta(|s(x)|))]^{z}\ v(x).$$

در این‌صورت مانند اثبات قضیهٔ ۲.۶ داریم $\|B(\cdot,1+it)\|_{[\widetilde{\Psi}_1],v_1^{-1}} \le 1$ و $\|B(\cdot,it)\|_{[\widetilde{\Psi}_0],v_0^{-1}} \le 1$. حال فرض کنید $T\in\mathcal{F}(\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]},\mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]})$ عنصری باشد که $T(\theta)=f$. قرار می‌دهیم

$$F_B(z) := T(z)(\cdot)B(\cdot,z), \qquad (z\in S).$$

تابع F_B روی درون S تحلیلی و روی S کراندار و پیوسته است. بنابراین طبق لم ۳.۱ برای هر $z \in S$ داریم،

$$\|F_B(z)\|_{\mathcal{X}} \le \max\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}}\|F_B(it)\|_{\mathcal{X}},\ \sup_{t\in\mathbb{R}}\|F_B(1+it)\|_{\mathcal{X}}\right\}.$$

اما طبق نامساوی هلدر (۱.۵) داریم

$$\|F_B(it)\|_{\mathcal{X}} \le \|T(it)(\cdot)v_o\|_{\Phi_0}\left\|B(\cdot,it)\frac{1}{v_0}\right\|_{[\Psi_0]} \le \|T(it)(\cdot)\|_{\Phi_0,v_0},$$

$$\|F_B(1+it)\|_{\mathcal{X}} \le \|T(1+it)(\cdot)v_1\|_{\Phi_1}\left\|B(\cdot\,,1+it)\frac{1}{v_1}\right\|_{[\Psi_1]} \le \|T(1+it)(\cdot)\|_{\Phi_1}.$$

در نتیجه،

$$\|F_B(z)\|_{\mathcal{X}} \le \max\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}}\|T(it)(\cdot)\|_{\Phi_0,v_0},\ \sup_{t\in\mathbb{R}}\|T(1+it)(\cdot)\|_{\Phi_1,v_1}\right\}$$
$$\le \| T \|_{\mathcal{F}(\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]},\mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]})}.$$

بنابراین برای هر $s \in \mathcal{S}_{\Phi_\theta}(\mathcal{X})$ داریم،

$$\|fv_\theta s\|_{\mathcal{X}} = \|T(\theta)(\cdot)B(\cdot,\theta)\|_{\mathcal{X}} = \|F_B(\theta)\|_{\mathcal{X}} \le \|T\|_{\mathcal{F}(\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]},\mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]})}.$$

این نشان می‌دهد،

$$\|fv_\theta\|_{\Phi_\theta} = \|f\|_{\Phi_\theta,v_\theta} \le \|T\|_{\mathcal{F}(\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]},\mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]})}.$$

چون $T \in \mathcal{F}(\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]},\mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]})$ با خاصیت $T(\theta) = f$ دلخواه انتخاب شده است داریم،

$$\|f\|_{\Phi_\theta,v_\theta} \le \|f\|_{[\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]},\mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]}]_\theta}.$$

حال توجه می‌کنیم با توجه به کامل بودن $\mathcal{X}_{v_\theta}^{\Phi_\theta}$ عدد $c > 0$ موجود است که $c\,\|\cdot\|_{[\Phi_\theta],v_\theta} \le \|\cdot\|_{\Phi_\theta,v_\theta}$ (یادآوری ۱.۲ را ببینید). بنابراین نرم‌های $\|\cdot\|_{[\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]},\mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]}]_\theta}$ و $\|\cdot\|_{[\Phi_\theta],v_\theta}$ معادل هستند.

در انتهای این بخش ارتباط فضای درونیابی $\mathcal{X}_{v_\theta}^{[\Phi_\theta]}$ و فضای حاصل‌ضرب کالدرن[1] $(\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]})^{1-\theta}(\mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]})^{\theta}$ را بیان می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم حاصل‌ضرب کالدرن $(X_0)^{1-\theta}(X_1)^{\theta}$ از دو فضای تابعی شبه باناخ X_0 و X_1 در $L^0(\Omega)$، فضای تابعی شبه باناخ تمام $f \in L^0(\Omega)$ می‌باشد که به ازای عناصری مانند $f_0 \in X_0$ و $f_1 \in X_1$ با نرم‌های کوچکتر یا مساوی ۱ و عدد $\lambda > 0$ داشته باشیم

$$|f| \le \lambda|f_0|^{1-\theta}|f_1|^{\theta},\quad \mu - \text{تقریباً همه جا}$$

و این فضا با نرم اینفیمم تمام اعداد λ با خاصیت بالا مجهز شده است.

قضیهٔ بعد حالت وزن‌دار گزارهٔ ۶.۳ از [۶] می‌باشد و اثبات آن با روش همان گزاره انجام شده است.

قضیه ۳.۴: فرض کنید v_0 و v_1 وزن‌هایی روی Ω، Φ_0 و Φ_1 دو تابع یانگ و $\mathcal{X}$ یک فضای تابعی شبه باناخ جامد در $L^0(\Omega)$ باشد. در این‌صورت اگر Φ_θ تابع میانی Φ_0 و Φ_1 و $v_\theta = v_0^{1-\theta}v_1^{\theta}$ آنگاه،

$$\left(\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]}\right)^{1-\theta}\left(\mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]}\right)^{\theta} = \mathcal{X}_{v_\theta}^{\Phi_\theta}.$$

[1]- Caldero'n product

اثبات: ابتدا فرض کنیم $0 \neq f \in \mathcal{X}_{v_\theta}^{[\Phi_\theta]}$. در این‌صورت عدد $\lambda > 0$ موجود است که

$$h = \Phi_\theta \circ \left(\frac{|f| \cdot v_\theta}{\lambda}\right) \in \mathcal{X}.$$

بنابراین $f_0 = \frac{\Phi_0^{-1} \circ h}{v_0} \in \mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]}$، $f_1 = \frac{\Phi_1^{-1} \circ h}{v_1} \in \mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]}$ و

$$\begin{aligned} |f| &= \frac{\lambda \Phi_\theta^{-1} \circ h}{v_\theta} \\ &= \lambda \left(\frac{\Phi_0^{-1} \circ h}{v_0}\right)^{1-\theta} \left(\frac{\Phi_1^{-1} \circ h}{v_1}\right)^{\theta} \\ &= \lambda \|f_0\|_{[\Phi_0],v_0}^{1-\theta} \|f_1\|_{[\Phi_1],v_1}^{\theta} \left(\frac{f_0}{\|f_0\|_{[\Phi_0],v_0}}\right)^{1-\theta} \left(\frac{f_1}{\|f_1\|_{[\Phi_1],v_1}}\right)^{\theta}. \end{aligned}$$

بنابراین، $f \in \left(\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]}\right)^{1-\theta} \left(\mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]}\right)^{\theta}$.

.

از طرفی اگر $f \in \left(\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]}\right)^{1-\theta} \left(\mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]}\right)^{\theta}$ آنگاه برای یک $f_0 \in \mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]}$، $f_1 \in \mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]}$ و یک $\lambda > 0$ داریم

$$|f| \leq \lambda |f_0|^{1-\theta} |f_1|^{\theta}, \ \mu - \text{ت.ه}.$$

حال اگر $\alpha > 0$ طوری انتخاب شود که $h_0 = \Phi_0 \circ \frac{|f_0| v_0}{\alpha} \in \mathcal{X}$ و $h_1 = \Phi_1 \circ \frac{|f_1| v_1}{\alpha} \in \mathcal{X}$ آنگاه داریم،

$$\begin{aligned} |f| &\leq \lambda |f_0|^{1-\theta} |f_1|^{\theta} \\ &= \frac{\lambda \alpha}{v_1^{1-\theta} v_1^{\theta}} \left(\frac{|f_0| v_0}{\alpha}\right)^{1-\theta} \left(\frac{|f_1| v_1}{\alpha}\right)^{\theta} \\ &= \frac{\lambda \alpha}{v_\theta} (\Phi_0^{-1} \circ h_0)^{1-\theta} (\Phi_1^{-1} \circ h_1)^{\theta} \\ &\leq \frac{\lambda \alpha}{v_\theta} (\Phi_0^{-1} \circ (h_0 + h_1))^{1-\theta} (\Phi_1^{-1} \circ (h_0 + h_1))^{\theta} \\ &= \frac{\lambda \alpha}{v_\theta} \Phi_\theta^{-1} \circ (h_0 + h_1) \in X_{v_\theta}^{[\Phi_\theta]}. \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به فرض جامد بودن $\mathcal{X}_{v_\theta}^{[\Phi_\theta]}$ داریم $f \in \mathcal{X}_{v_\theta}^{[\Phi_\theta]}$ و حکم ثابت است.

نتیجهٔ زیر با استفاده از قضایای ۳.۳ و ۳.۴ به دست می‌آید. برای ملاحظهٔ این قضیه در فضاهای اندازهٔ پولیش متناهی قضیهٔ ۳.۴ از [۱۴] را ببینید. این نتیجه از قضیهٔ ۳.۴ و توضیحات بخش ۱۳.۶ از [۴] نیز به دست می‌آید.

نتیجه ۳.۵: $[\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]}, \mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]}]_\theta = (\mathcal{X}_{v_0}^{[\Phi_0]})^{1-\theta} (\mathcal{X}_{v_1}^{[\Phi_1]})^{\theta}$.

References

1. A. R. Bagheri Salec and S. M. Tabatabaie, An extention of the interpolation theorem, Mathematical Analysis and Convex Optimization, **2** (2021), No. 1, 63-69.
2. A. R. Bagheri Salec, V. Kumar and S. M. Tabatabaie, Convolution properties of Orlicz spaces on hypergroups, Proc. Amer. Math. Soc., **150**(4) (2022), 1685–1696.
3. J. Bergh and J. Löfstr"om, Interpolation Spaces; An Introduction, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
4. A. P. Caldero′n, Intermediate spaces and interpolation, the complex method, Studia Math., **24** (1964), 113–190.
5. R. del Campo, A. Fernández, F. Mayoral and F. Naranjo, Complex interpolation of Orlicz

spaces with respect to a vector measure, Math. Nachr., **287** No.1 (2014), 23-31.
6. R. del Campo, A. Fernández, F. Mayoral and F. Naranjo, Orlicz spaces associated to a quasi-Banach function space, Applications to vector measures and interpolation, Collect. Math., (2020). https://doi.org/10.1007/s13348-020-00295-1.
7. R. del Campo, A. Fernández, F. Mayoral, F. Naranjo and E. A. Sánchez-Pérez, When and where the Orlicz and Luxemburg (quasi-) norms are equivalent?, J. Math. Anal. Appl., **491** No.1 (2020), 124302, DOI: 10.1016/j.jmaa.2020.124302.
8. M. Faragallah, Interpolation of weighted Orlicz spaces, Applied Mathematics and Computation, **145** (2003), 613–622
9. J.E. Gilbert, Interpolation between weighted L^p-spaces, Ark. Math., **10** (1972), 235–249.
10. C. Goulaouic, Prolongements de foncteurs d'interpolation et applications, Ann. Inst. Fourier, **18** (1968), 1-98.
11. J. Gustavsson, J. Peetre, Interpolation of Orlicz spaces, Stud. Math., **60** (1977), 33–59.
12. H.P. Heining, D. Vaughan, Interpolation in Orlicz spaces involving weights, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **64** (1978), 79-95.
13. L.V. Kantorovich and G.P. Akilov, Functional Analysis, Pergamon press, 1982.
14. N. Kalton and M. Mitrea, Stability results on interpolation scales of quasi-Banach spaces and applications, Trans. Amer. Math. Soc., **350** 10 (1998), 3903–3922.
15. Alexei Yu. Karlovich and Lech Maligranda, On the Interpolation Constant for Orlicz Spaces, Proc. Amer. Math. Soc., **129**(9) (2001), pp. 2727-2739.
16. M.A. Krasnoselskiĭ,Ya.B. Rutitskiĭ, Convex functions and Orlicz spaces, 1958 (Russian).
17. A. Lunardi, Interpolation Theory, Scuola Normale Superiore Pisa, 2018.
18. S. Okada, W. J. Ricker E. A. Sánchez Pérez, Optimal Domain and Integral Extension of Operators, Operator Theory: Advances and Applications, **180**, 2007.
19. A. Osançlıol and S. Öztop, Weighted Orlicz algebras on locally compact groups, J. Aust. Math. Soc., **99** (2015), 399-414.
20. J. Peetre, On interpolation of L^p-spaces with weight function, Acta Sci. Math., **28** (1967), 61–69.
21. P. Jain, L.E. Persson, and P. Upreti, Inequalities and properties of some generalized Orlicz classes and spaces, Acta Math. Hungar, **117**(no. 1-2) (2007), 161–174.
22. M.M. Rao, Interpolation, ergodicity, and martingales, J. Math. Mech., **16**(6) (1966), 543-567.
23. M.M. Rao and Z.D. Ren, Theory of Orlicz Spaces, Marcel Dekker, New York, 1991.
24. M. M. Rao and Z. D. Ren, Applications of Orlicz Spaces, Marcel Dekker, New York, 2002.
25. Ya. B. Rutitskii, Scales of Orlicz spaces and interpolation theorems, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **149**(1) (1963), 32–35.
26. S. M. Tabatabaie and A. R. Bagheri Salec, Convolution of two weighted Orlicz spaces on hypergroups, Revista Colombiana de Matemáticas Revista, **54** (2020), 117-128.
27. S. M. Tabatabaie, A. R. Bagheri Salec and M. Zare Sanjari, A note on Orlicz algebras, Oper. Matrices, **14**(1) (2020), 139–144.
28. S. M. Tabatabaie, A. R. Bagheri Salec and M. Zare Sanjari, Remarks on weighted Orlicz spaces on locally compact groups, Math. Ineq. Appl., **23**(3) (2020), 1015–1025.