Mathematical Researches

Kharazmi University

Print ISSN: 2588-2546

Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Solving linear fractional programming problem in uncertainty environment with grey parameters

F. Pourofoghi[1]

1. Department of Mathematics, Payame Noor University, Tehran, Iran. E-mail: f_pourofoghi@pnu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 27 October 2024
Received in revised form: 27 July 2025
Accepted: 30 July 2025
Published online: 3 November 2025

Keywords:
Uncertainly,
Fractional programming,
Grey system,
Interval Grey Numbers.

ABSTRACT

Introduction

Grey linear fractional programming is a model of grey systems for decision-making under uncertainty. This model is an extension of the linear fractional programming method. A grey linear fractional programming model has many advantages. Grey linear fractional programming has the ability to deal with weak, incomplete, or uncertain problems in systems.

In this study, considering the advantages of grey system theory for dealing with uncertainty in real-world problems, a new direct approach to solving the grey linear fractional programming problem is introduced. It can preserve the uncertainty of the input data in the final solution and provide better solutions than previous methods. The basis of the method is that, according to the type of objective function of the grey linear fractional programming problem, we transform it into two grey linear programming problems, which can be solved without whitening the grey parameters by the method of Nasseri et al. (primary simplex) [25], or the method of Saffar et al. [34]. In this paper, we have used the primitive simplex method.

By implementing the proposed method, the solution to the grey linear fractional programming problem is determined as interval grey numbers, and as a result, the uncertainty in the objective function is reflected in the final result. In the section on comparing solutions from different methods, we show that the solution obtained from the proposed method is better than other methods.

Material and Methods

In this article, we present a model more compatible with the real world, where the coefficients of the objective function are of grey type. In this article, a new approach based on converting grey linear fractional programming problems into two grey linear programming problems was presented. The advantage of this method of solving fractional linear programming problems with grey coefficients is that the solutions are closer to reality.

Results and discussion

To solve real problems with uncertain parameters, the linear programming problem method cannot be used directly, so using the whitening method, the uncertain parameters are first made definite and the problem is converted into a problem with definite parameters. Therefore, the solution obtained by this

method is only an approximation of the solution to the problem with imprecise parameters and cannot reflect the uncertainty of the uncertain parameters of the original problem in the final solution.

Comparing the solutions obtained by the proposed method with other methods, considering the two grey number ranking methods of Hu and Wang, center and grey degree, shows that the solution obtained by the proposed method is better than other methods.

Conclusion

The following conclusions are obtained from this research

- By implementing the proposed method, the optimal solution to the grey linear fractional programming problem is determined as interval grey numbers, and as a result, the uncertainty in the objective function is reflected in the final result.
- In this paper, an algorithm is presented based on which, according to the type of objective function of the grey linear fractional programming problem, it is transformed into two grey linear programming Subproblems.
- Achieves optimal solutions in limited iterations.
- Shows practical potential for various real-world scenarios

How to cite: Pourofoghi,Farid. (2025). Solving linear fractional programming problem in uncertainty environment with grey parameters. *Mathematical Researches*, 11 (2), 16– 38.

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

حل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی در محیط عدم قطعیت با پارامترهای خاکستری

فرید پورافقی[۱]

۱. گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. رایانامه: f_pourofoghi@pnu.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۸/۵
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۵/۵
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۵/۸
تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۸/۱۲

واژه‌های کلیدی:
عدم قطعیت،
برنامه ریزی کسری،
سیستم خاکستری،
اعداد بازه‌ای خاکستری.

چکیده

مسئله برنامه ریزی کسری، یک ابزار برنامه‌ریزی غیرخطی مهم است که در زمینه‌های مختلف از جمله تخصیص منابع، حمل و نقل، برنامه‌ریزی تولید و غیره استفاده می‌شود. با توجه به عدم قطعیت در مسائل دنیای واقعی، تعیین ضرایب قطعی برای مدل ریاضی مسائل بسیار دشوار است. بنابراین، ضرایب مدل ریاضی مسائل به صورت غیر قطعی در نظر گرفته می‌شوند. یکی از رویکردهای مقابله با عدم قطعیت، در کنار نظریه احتمال، تصادفی، فازی ، نظریه سیستم‌های خاکستری است. در این مقاله، مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با ضرایب خاکستری در تابع هدف در نظر گرفته شده است. برای حل این مسائل اغلب از روش سفیدسازی پارامترهای خاکستری استفاده می‌شود که باعث می‌شود جواب به دست آمده در این روش، عدم قطعیت پارامترهای خاکستری را در جواب بهینه منعکس نکند. برای حل این مشکل، در این مقاله، الگوریتمی ارائه شده است که بر اساس آن با توجه به نوع تابع هدف مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی خاکستری، آن را به دو زیر مسئله برنامه‌ریزی خطی خاکستری تبدیل کرده و سپس جواب مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی خاکستری، از طریق حل آن دو زیر مسئله تعیین شده است. با اجرای روش پیشنهادی جواب مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی خاکستری به صورت اعداد خاکستری بازه‌ای تعیین می‌شود و در نتیجه عدم قطعیت در تابع هدف در نتیجه نهایی منعکس می‌شود. در پایان برای نشان دادن اثربخشی روش پیشنهادی، یک مثال با روش پیشنهادی حل شده است. برای نمایش دادن کارایی روش پیشنهادی، جواب به دست آمده از روش پیشنهادی با جواب‌های بدست آمده از روش‌های دیگر برای مثال ارائه شده با دو روش رتبه‌بندی اعداد خاکستری هو و وانگ و مرکز و درجه خاکستری ارزیابی شد. و نشان داده شد که جواب بدست آمده از روش پیشنهادی بهتر از روش‌های حل دیگر می‌باشد.

استناد: پورافقی، فرید. (۱۴۰۴). حل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی در محیط عدم قطعیت با پارامترهای خاکستری
. ***پژوهش‌های ریاضی*، ۱۱ (۲)، ۱۶ – ۳۸.**

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

مسئله برنامه‌ریزی کسری یک مورد خاص از تحقیق در عملیات است. با توجه به اینکه بسیاری از مدل‌های دنیای واقعی را نمی‌توان در قالب برنامه‌ریزی خطی توضیح داد، مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی شاخه‌ای از برنامه‌ریزی غیرخطی است که در دهه ۱۹۶۰ توسعه یافت. مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی برای مسائلی که تابع هدف آنها به صورت کسری تعریف شده است بسیار مناسب است. مسائل مربوط به مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی زمانی به وجود می‌آیند که نیاز به بهینه‌سازی کارایی چندین فعالیت، سود کسب شده توسط شرکت به ازای واحد هزینه نیروی انسانی، هزینه تولید به ازای هر واحد محصول تولید شده، کالری رژیم غذایی در هر واحد هزینه و غیره وجود دارد. برای جزئیات بیشتر به [۱، ۵، ۶، ۹، ۳۷] مراجعه کنید. در همین حال، مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی به دلیل کاربرد آن در تصمیم‌گیری‌های دنیای واقعی، مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است [۲، ۳، ۷، ۸، ۱۹، ۲۸، ۳۵]. این محققان روش‌های مختلفی را برای حل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی ارائه کرده‌اند. بیتران و ناواس [۳] برای حل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی روشی مبتنی بر به روز رسانی تابع هدف مسئله و حل آن بر اساس دنباله‌ای از مسائل برنامه‌ریزی خطی ارائه کردند. چارنز و کوپر [۷] روشی را بر اساس تغییر متغیرها ارائه کردند. داس و ماندال [۱۰] نیز از روش‌های حل متفاوتی بر اساس روش سیمپلکس برای حل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی استفاده کرده‌اند. غالباً به دلیل اطلاعات ناقص و نادرست در مورد مسائل واقعی زندگی روزمره، تصمیم‌گیری‌ها همیشه با داده‌های دقیق انجام نمی‌شود و نمی‌توان از روش‌های ذکر شده استفاده کرد. در چنین مسائلی، نظریه‌هایی که با عدم قطعیت سروکار دارند مانند نظریه مجموعه‌های فازی و نظریه سیستم خاکستری می‌توانند برای بیان ضرایب نادقیق استفاده شوند. با توجه به ویژگی‌های خاص هر یک از این نظریه‌ها در برخورد با عدم قطعیت‌های موجود در داده‌های واقعی، تلاش برای شناسایی واضح عدم قطعیت در مسئله در مرحله اول بسیار مهم است. سپس با توجه به شرایط حاکم بر مسئله باید از این نظریه‌ها به درستی استفاده کنیم .نظریه مجموعه‌های فازی اولین بار توسط پروفسور زاده [۳۹] معرفی شد. اخیراً تعدادی از محققین به حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی فازی علاقه نشان داده‌اند [۱۱، ۱۲، ۱۳، ۲۳]. چینادورای و موتوکومار [۸] روشی را برای حل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی فازی با استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی ریاضی فازی پیشنهاد کردند. داس و همکاران [۱۴] یک الگوریتم مبتنی بر مسئله برنامه‌ریزی کسری چند هدفه برای حل مسئله مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی فازی پیشنهاد کردند. سرینیواسان [۳۶] مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی فازی را برای مسئله‌ای که ضرایب تابع هدف آن اعداد فازی هستند مورد مطالعه قرار داد و الگوریتمی بر اساس روش‌های رتبه‌بندی پیشنهاد کرد. اما در محیط‌های واقعی، زمانی که با مسائلی سروکار داریم که تعداد متخصص‌ها و سطح تجربه آنقدر کم است که نمی‌توان توابع عضویت را به دست آورد یا داده‌های کافی و نمونه بزرگی وجود ندارد. در این صورت استفاده از نظریه مجموعه های فازی برای حل مسئله برنامه‌ریزی کسری با ضرایب غیر دقیق امکان پذیر نخواهد بود. برای رویارویی با چنین مسائلی، پروفسور دنگ نظریه سیستم خاکستری را در سال ۱۹۸۲ معرفی کرد [۱۵]. نظریه سیستم خاکستری به مطالعه نمونه‌های کوچک و سیستم‌هایی با اطلاعات ضعیف می‌پردازد، سیستم‌هایی که بخشی از اطلاعات مربوط به آنها شناخته شده و بخشی ناشناخته است. با توسعه نظریه سیستم خاکستری، این نظریه به یک شاخه علمی جدید تبدیل شده است که ساختار نظری آن شامل تکنیک‌های تجزیه و تحلیل سیستم، مدل سازی، پیش بینی، تصمیم‌گیری، کنترل و بهینه‌سازی است. از کاربردهای علمی نظریه سیستم خاکستری می‌توان برای حل مسائل واقعی و موارد عملی در زمینه‌های علوم اجتماعی، مهندسی، از جمله متالورژی، نفت، صنایع شیمیایی، الکترونیک، صنایع روشنایی، منابع انرژی، حمل و نقل، داروسازی، بهداشت و سلامت استفاده کرد. این

کاربردها مزایای اقتصادی و اجتماعی قابل توجهی را در جامعه ایجاد کرده‌اند و گستره وسیعی از کاربردهای نظریه سیستم خاکستری را به ویژه در شرایطی که اطلاعات موجود ناقص یا داده‌های جمع‌آوری شده نادقیق است، نشان می‌دهند [۲۰]. با ترکیب نظریه خاکستری با اصل و روش مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی، مدل برنامه‌ریزی کسری خطی بر اساس نظریه خاکستری ایجاد می‌شود. برنامه‌ریزی کسری خطی خاکستری مدلی از سیستم‌های خاکستری برای تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت است. این مدل، توسعه روش برنامه‌ریزی کسری خطی است. یک مدل برنامه‌ریزی کسری خطی خاکستری مزایای زیادی دارد. برنامه‌ریزی کسری خطی خاکستری توانایی مقابله با مشکلات ضعیف، ناقص یا عدم قطعیت در سیستم‌ها را دارد. یک روش برای حل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی خاکستری بر پایه سفیدسازی پارامترهای خاکستری و تبدیل مسئله به یک مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با پارامترهای دقیق است که با استفاده از روش چارلز و کوپر [۷]، حل شده و جواب دقیقی برای مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی خاکستری ارائه می‌دهد. که نمی‌تواند عدم قطعیت داده‌های ورودی را در جواب نهایی منعکس کند. پورافقی و همکاران [۲۹] روشی برای برای حل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی خاکستری ارائه کرده‌اند که عدم قطعیت داده‌های ورودی را در جواب پایانی حفظ می‌کند.

در این مطالعه، با توجه به مزایای نظریه سیستم خاکستری برای رویارویی با عدم قطعیت در مسائل دنیای واقعی، یک رویکرد مستقیم جدید برای حل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی خاکستری معرفی شده است. که بتواند عدم قطعیت داده‌های ورودی را در جواب پایانی حفظ کرده و نسبت به روش‌های قبلی جواب‌های بهتری ارائه دهد. اساس روش این است، که با توجه به نوع تابع هدف مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی خاکستری، آن را به دو مسئله برنامه‌ریزی خطی خاکستری تبدیل می‌کنیم که برای حل آنها بدون سفیدسازی پارامترهای خاکستری، می‌توان از روش ناصری و همکاران (سیمپلکس اولیه) [۲۵]، یا روش صفار و همکاران [۳۴] استفاده کرد. که ما در این مقاله از روش سیمپلکس اولیه استفاده کرده‌ایم.

با اجرای روش پیشنهادی جواب مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی خاکستری به صورت اعداد خاکستری بازه‌ای تعیین می‌شود و در نتیجه عدم قطعیت در تابع هدف در نتیجه نهایی منعکس می‌شود. در قسمت مقاسیه جوابها از روش‌های مختلف، نشان می‌دهیم که جواب بدست آمده از روش پیشنهادی بهتر از روش‌های دیگر می‌باشد.

این مقاله به شرح زیر تنظیم شده است: در بخش دوم، نظریه سیستم خاکستری و برخی مفاهیم مورد نیاز در این مقاله ارائه شده است. در بخش سوم مسئله برنامه‌ریزی کسری معرفی شده است. در بخش چهارم، مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی خاکستری و الگوریتم پیشنهادی معرفی شده است. در بخش پنجم، برای نشان دادن اثربخشی روش پیشنهادی، یک مثال با روش پیشنهادی حل شده است. در بخش ششم، نتایج به دست آمده از روش پیشنهادی با نتایج بدست آمده از روش‌های سفیدسازی و روش پورافقی و همکاران [۲۹] با هم مقایسه شده است. در نهایت در قسمت هفتم نتیجه‌گیری مقاله ارائه شده است.

۱. مفاهیم اساسی

این بخش به مفاهیم مربوط به نظریه سیستم خاکستری اختصاص دارد.

۱.۱ نظریه سیستم خاکستری

نظریه سیستم خاکستری یکی از مهمترین دستاوردهای علمی در زمینه نحوه استفاده از اطلاعات نامطمئن است. این نظریه روشی جدید برای بررسی مسائل با نمونه‌های کوچک و اطلاعات ضعیفی است که دارای دامنه مشخص و ماهیت غیر قطعی هستند. نظریه سیستم خاکستری محققان بسیاری را به خود جذب کرده است [۱۶، ۲۱، ۲۲، ۲۵، ۲٦، ۲۷، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳٤، ۳۸].

تعریف ۱: [۴] عدد خاکستری بازه‌ای یک عدد بازه‌ای است که مرزهای بالایی و پایینی آن مشخص است، اما مکان آن بین کران بالا و پایین نامشخص است.

تعریف ۲: [۲۴] سفید شده عدد خاکستری بازه‌ای $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ را با نماد $\otimes \tilde{x}$ نشان داده و به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\otimes \tilde{x} = \alpha \bar{x} + (۱-\alpha)\underline{x} \quad , \qquad \alpha \in [۰,۱] \tag{۱}$$

α وزنی است که برای سفید کردن عدد خاکستری بازه‌ای، مورداستفاده قرار می‌گیرد. اگر $\alpha = \frac{۱}{۲}$ باشد، به مقادیر پایین و بالای بازه وزن برابر داده‌شده و نتیجه حاصل، سفید شده میانگین با وزن برابر نامیده می‌شود.

این مقدار، مربوط به حالتی است که اطلاعات توزیع عدد خاکستری مشخص نبوده و شواهدی مبنی بر ارجحیت بخشی از این بازه نسبت به بخش دیگر وجود نداشته باشد.

برای مثال، سفید شده عدد خاکستری بازه‌ای $\otimes x \in [۲,۸]$ برای α های مختلف به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned}
&\otimes \tilde{x} = ۸\alpha + (۱-\alpha)۲,\ \alpha \in [۰,۱] \\
&\alpha = ۰ \Rightarrow \otimes \tilde{x} = ۸(۰) + (۱-۰)۲ = ۲ \\
&\alpha = ۰/۵ \Rightarrow \otimes \tilde{x} = ۸(۰/۵) + (۱-۰/۵)۲ = ۵ \\
&\alpha = ۱ \Rightarrow \otimes \tilde{x} = ۸(۱) + (۱-۱)۲ = ۸
\end{aligned}$$

تعریف ۳: [۲۴] مرکز عدد خاکستری $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ را با نماد $\otimes \hat{x}$ و عرض (شعاع) آن را با نماد $\otimes x'$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\otimes \hat{x} = \frac{\underline{x} + \bar{x}}{۲} \quad , \quad \otimes x' = \frac{\bar{x} - \underline{x}}{۲} \tag{۲}$$

تعریف ۴: [۲۴] فرض کنید $\otimes x_۱ \in [\underline{x}_۱, \bar{x}_۱]$ و $\otimes x_۲ \in [\underline{x}_۲, \bar{x}_۲]$ دو عدد خاکستری باشند. می‌توان مفاهیم مربوط به روابط بین اعداد خاکستری را برای اعداد خاکستری بازه‌ای به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned}
&\otimes x_1+\otimes x_2=\left[\underline{x}_1+\underline{x}_2,\bar{x}_1+\bar{x}_2\right]\\
&\otimes x_1-\otimes x_2=\otimes x_1+\left(-\otimes x_2\right)=\left[\underline{x}_1-\bar{x}_2,\bar{x}_1-\underline{x}_2\right]\\
&\otimes x_1\times\otimes x_2=\left[\min\left\{\underline{x}_1\underline{x}_2,\bar{x}_1\bar{x}_2,\bar{x}_1\underline{x}_2,\underline{x}_1\bar{x}_2\right\},\max\left\{\underline{x}_1\underline{x}_2,\bar{x}_1\bar{x}_2,\bar{x}_1\underline{x}_2,\underline{x}_1\bar{x}_2\right\}\right]\\
&\frac{\otimes x_1}{\otimes x_2}=\otimes x_1\times\otimes x_2^{-1}=\left[\min\left\{\frac{\underline{x}_1}{\underline{x}_2},\frac{\underline{x}_1}{\bar{x}_2},\frac{\bar{x}_1}{\underline{x}_2},\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}\right\},\max\left\{\frac{\underline{x}_1}{\underline{x}_2},\frac{\underline{x}_1}{\bar{x}_2},\frac{\bar{x}_1}{\underline{x}_2},\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2}\right\}\right]\quad 0\notin\left[\underline{x}_2,\bar{x}_2\right]
\end{aligned}\tag{۳}$$

رتبه بندی اعداد بازه‌ای خاکستری نقش بسیار مهمی در تصمیم‌گیری و کاربردهای نظریه سیستم خاکستری ایفا می‌کند. درویشی و همکاران [۱۷] رتبه‌بندی اعداد بازه‌ای خاکستری را با جزئیات بیشتری بررسی کره‌اند.

تعریف ۵: [۲۴] تساوی دو عدد خاکستری بازه‌ای $\otimes x=\left[\underline{x},\bar{x}\right]$ و $\otimes y=\left[\underline{y},\bar{y}\right]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\otimes\left[\underline{x},\bar{x}\right]=_G\otimes\left[\underline{y},\bar{y}\right]\Leftrightarrow \underline{x}=\underline{y}\quad and\quad \bar{x}=\bar{y}$$

تعریف ۶: [۱۸] فرض کنید $\otimes x=\left[\underline{x},\bar{x}\right]$ و $\otimes y=\left[\underline{y},\bar{y}\right]$ دو عدد خاکستری بازه‌ای، با مرکزهای $\otimes\hat{x}$ و $\otimes\hat{y}$ و عرض‌های $\otimes x'$ و $\otimes y'$ باشند. در این حالت، رابطه ترتیب بر اساس روش پیشنهادی هو و وانگ به صورت زیر خواهد بود:

$\otimes x\preceq_G\otimes y$ اگر و تنها اگر

$$\begin{aligned}
&1)\quad \otimes\hat{x}\neq\otimes\hat{y}\Rightarrow\otimes\hat{x}<\otimes\hat{y}\\
&2)\quad \otimes\hat{x}=\otimes\hat{y}\Rightarrow\otimes x'\geq\otimes y'
\end{aligned}\tag{۴}$$

همچنین $\otimes x\prec_G\otimes y$ اگر و تنها اگر $\otimes x\preceq_G\otimes y$ و $\otimes x\neq_G\otimes y$.

مرکز و عرض عدد خاکستری بازه‌ای به ترتیب به عنوان مقدار مورد انتظار و عدم قطعیت پارامترها در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین، هنگامی که مراکز اعدد خاکستری بازه‌ای برابر هستند، از عرض اعدد خاکستری بازه‌ای برای مقایسه آنها استفاده می‌شود.

تعریف ۷: [۲۱] طول عدد خاکستری بازه‌ای $\otimes x=\left[\underline{x},\bar{x}\right]$ با نماد $\mu\left(\otimes x\right)$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu\left(\otimes x\right)=\left|\bar{x}-\underline{x}\right|$$

تعریف۸: [۲۱] فرض کنید عدد خاکستری $\underline{x}<\bar{x}$, $\otimes x\in\left[\underline{x},\bar{x}\right]$ داده شده باشد، با استفاده از طول عدد خاکستری بازه‌ای و هسته عدد خاکستری بازه‌ای $\otimes x$ ، درجه خاکستری بودن بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$g*\left(\otimes x\right)=\frac{\mu\left(\otimes x\right)}{\otimes\hat{x}}\,,\ \otimes\hat{x}\neq 0$$

تعریف۹: [۲۱] فرض کنید عدد خاکستری بازه‌ای $\otimes x=[\underline{x},\overline{x}]$ بر روی میدان اعداد خاکستری $\otimes x\in\Omega=_G[a,b]$ تعریف شده باشد. در این صورت طول میدان اعداد خاکستری به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu(\Omega)=|b-a|$$

تعریف۱۰: [۲۱] اگر Ω میدان اعداد خاکستری، $\otimes x\in\Omega$ و $\mu(\otimes x)$ طول عدد خاکستری بازه‌ای $\otimes x$ باشد. آنگاه درجه خاکستری بودن $\otimes x$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$g^{\circ}(\otimes x)=\frac{\mu(\otimes x)}{\mu(\Omega)}$$

که با نماد g° نشان داده می‌شود.

تعریف۱۱: [۲۱] رتبه‌بندی دو عدد خاکستری بازه‌ای $\otimes x_1$ و $\otimes x_2$ بر اساس مرکز و درجه خاکستری به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\otimes\hat{x}_1<\otimes\hat{x}_2\Rightarrow\otimes x_1\prec_G\otimes x_2$$

$$\otimes\hat{x}_1=\otimes\hat{x}_2\Rightarrow\begin{cases} if\ \ g^{\circ}(\otimes x_1)=g^{\circ}(\otimes x_2)\Rightarrow\otimes x_1=_G\otimes x_2\\ if\ \ g^{\circ}(\otimes x_1)<g^{\circ}(\otimes x_2)\Rightarrow\otimes x_1\succ_G\otimes x_2\\ if\ \ g^{\circ}(\otimes x_1)>g^{\circ}(\otimes x_2)\Rightarrow\otimes x_1\prec_G\otimes x_2\end{cases}\tag{۵}$$

مثال: اعداد خاکستری $\otimes x_1=[-4,-2]$, $\otimes x_2=[1,7]$, $\otimes x_3=[1,5]$ را در میدان اعداد خاکستری $\Omega\in[-5,20]$ در نظر گرفته و آنها را بر اساس مرکز و درجه خاکستری مقایسه کنید.

$$\mu(\Omega)=25\ ,\ \mu(\otimes x_1)=2\ ,\ \mu(\otimes x_2)=6\ ,\ \mu(\otimes x_3)=12$$

مرکز و درجه خاکستری اعداد بازه‌ای داده شده را محاسبه می‌کنیم.

$$\otimes\hat{x}_1=-3\ ,\ \otimes\hat{x}_2=4\ ,\ \otimes\hat{x}_3=4$$

$$g^{\circ}(\otimes x_1)=\frac{\mu(\otimes x_1)}{\mu(\Omega)}=\frac{2}{25}=0.08$$

$$g^{\circ}(\otimes x_2)=\frac{\mu(\otimes x_2)}{\mu(\Omega)}=\frac{6}{25}=0.24$$

$$g^{\circ}(\otimes x_3)=\frac{\mu(\otimes x_3)}{\mu(\Omega)}=\frac{12}{25}=0.48$$

بر طبق حالت اول:

$$\otimes\hat{x}_1=-3<\otimes\hat{x}_2=4\Rightarrow\otimes x_1\prec_G\otimes x_2$$

طبق حالت دوم:

$$\otimes\hat{x}_2=4=\otimes\hat{x}_3=4$$

بنابراین:

$$g^{\circ}(\otimes x_2) = 0.24 < g^{\circ}(\otimes x_3) = 0.48 \Rightarrow \otimes x_2 \succ_G \otimes x_3$$

۲. مسئله برنامه‌ریزی کسری

مسئله برنامه‌ریزی کسری به عنوان یکی از فنون تحقیق در عملیات، یک ابزار مهم برنامه‌ریزی است. به این دلیل این نوع برنامه‌ریزی، کسری نامیده می‌شود که تابع هدف به صورت کسری و یا نسبت دو تابع است. این توابع می‌توانند خطی و غیرخطی از متغیرهای تصمیم مسأله باشند.

شکل عمومی یک برنامه ریزی کسری به صورت زیر است:

$$\min_{x \in S}\left(\max\right) W(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

به طوریکه:

$$S = \left\{x \in S_0 \subset R^n : h_j\left(x\right) \le 0 \, , j = 1,\dots,m\right\} \, , \, g\left(x\right) > 0$$

استان میناسیان [۳۵]، برنامه‌ریزی کسری، کاربردهای آن، روش‌های حل و مسائل مرتبط را مورد بررسی قرار داده است. مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی یک مورد خاص از مسئله برنامه‌ریزی کسری است.

شکل کلی یک مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} & Minimize\ W\left(x\right) = \frac{a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k + a_{k+1}}{c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k + c_{k+1}} \\ & s.t \\ & \qquad A_1 x_1 + \cdots + A_k x_k \le b \, , \\ & \qquad x_1 \ge 0 \, , \dots , x_k \ge 0 \, , \end{aligned} \tag{۶}$$

به طوریکه برای هر $x \in X$، که X ناحیه موجه مسئله (۶) است نامساوی $c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k + c_{k+1} > 0$ برقرار می‌باشد.

۳. مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی خاکستری

به طور کلی مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با ضرایب خاکستری در تابع هدف به شکل زیر نمایش داده می شود:

$$\begin{aligned} & Minimize\left(or\ \max imize\right)\otimes Z =_G \frac{\sum_{j=1}^{k}\otimes a_j x_j + \otimes a_{j+1}}{\sum_{j=1}^{k}\otimes c_j x_j + \otimes c_{j+1}} \\ & s.t \\ & \qquad \sum_{j=1}^{k} A_j x_j \le b \\ & \qquad x_j \ge 0 \quad j=1,\ldots,k \end{aligned} \tag{۷}$$

به عبارت دیگر:

$$\begin{aligned} & Minimize\left(or\ \max imize\right)\otimes Z =_G \frac{\otimes\left[\underline{a}_1,\overline{a}_1\right]x_1+\cdots+\otimes\left[\underline{a}_k,\overline{a}_k\right]x_k+\otimes\left[\underline{a}_{k+1},\overline{a}_{k+1}\right]}{\otimes\left[\underline{c}_1,\overline{c}_1\right]x_1+\cdots+\otimes\left[\underline{c}_k,\overline{c}_k\right]x_k+\otimes\left[\underline{c}_{k+1},\overline{c}_{k+1}\right]} \\ & s.t \\ & \qquad A_1x_1+\cdots+A_kx_k \le b \\ & \qquad x_1\ge 0,\ldots,x_k\ge 0 \end{aligned} \tag{۸}$$

با این فرض که:

$\otimes\left[\underline{c}_1,\overline{c}_1\right]x_1+\cdots+\otimes\left[\underline{c}_k,\overline{c}_k\right]x_k+\otimes\left[\underline{c}_{k+1},\overline{c}_{k+1}\right]>0$ برای هر $\left(x_1,\ldots,x_k\right)\in X$، که X ناحیه موجه مساله می‌باشد.

۱.۳. الگوریتم پیشنهادی

الگوریتم پیشنهادی برای حل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با ضرایب خاکستری به شرح زیر می باشد:
شکل کلی مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با ضرایب خاکستری به فرم (۷) را در نظر بگیرید:

مرحله ۱- اگر تابع هدف از نوع کمینه‌سازی باشد.

$$
\begin{aligned}
& Minimize\ \otimes Z =_G \frac{\sum_{j=1}^{k} \otimes a_j x_j + \otimes a_{j+1}}{\sum_{j=1}^{k} \otimes c_j x_j + \otimes c_{j+1}} \\
& s.t \\
& \qquad \sum_{j=1}^{k} A_j x_j \le b \\
& \qquad x_j \ge 0 \quad j = 1, \ldots, k
\end{aligned} \tag{۹}
$$

مرحله ۱-۱- مسئله بیشینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
& Maximize\ \otimes Z_1 =_G \sum_{j=1}^{k} \otimes c_j x_j + \otimes c_{j+1} \\
& s.t \\
& \qquad \sum_{j=1}^{k} A_j x_j \le b \\
& \qquad x_j \ge 0 \quad j = 1, \ldots, k
\end{aligned} \tag{۱۰}
$$

مرحله ۱-۲ – مسئله (۱۰) را با استفاده از روش ناصری و همکاران[۲۵] حل کرده و جواب آن را که به صورت اعداد خاکستری بازه‌ای می‌باشد بدست آورید.

مرحله ۱-۳ – ضرایب خاکستری متغییرهای تصمیم در صورت کسر تابع هدف مسئله (۹) را بر عدد خاکستری بازه‌ای بدست آمده در مرحله ۱-۲ تقسیم کنید و مساله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
& Minimize \otimes Z_2 =_G \frac{\sum_{j=1}^{k} \otimes a_j x_j + \otimes a_{j+1}}{Maximize\ \otimes Z_1} \\
& s.t \\
& \qquad \sum_{j=1}^{k} A_j x_j \le b \\
& \qquad x_j \ge 0 \quad j = 1, \ldots, k
\end{aligned} \tag{۱۱}
$$

مرحله ۱-۴ – مسئله (۱۱) را با استفاده از روش ناصری و همکاران[۲۵] حل کرده و جواب آن را که به صورت اعداد خاکستری بازه‌ای می‌باشد بدست آورید. در این صورت، جواب به دست آمده برای مسئله (۱۱) جواب مسئله (۹) خواهد بود که به صورت خاکستری ارائه می‌شود.

مرحله ۲- اگر تابع هدف از نوع بیشینه سازی باشد.

$$\max imize \otimes Z =_G \frac{\sum_{j=1}^{k} \otimes a_j x_j + \otimes a_{j+1}}{\sum_{j=1}^{k} \otimes c_j x_j + \otimes c_{j+1}}$$

$$s.t \qquad (۱۲)$$

$$\sum_{j=1}^{k} A_j x_j \le b$$

$$x_j \ge 0 \;\; j = 1,\dots,k$$

مرحله ۲-۱- مسئله کمینه سازی زیر را در نظر بگیرید.

$$Minimize \; \otimes Z_1 =_G \sum_{j=1}^{k} \otimes c_j x_j + \otimes c_{j+1}$$

$$s.t \qquad (۱۳)$$

$$\sum_{j=1}^{k} A_j x_j \le b$$

$$x_j \ge 0 \;\; j = 1,\dots,k$$

مرحله ۲-۲ – مسئله (۱۳) را با استفاده از روش ناصری و همکاران[۲۵] حل کرده و جواب آن را که به صورت اعداد خاکستری بازه‌ای می‌باشد بدست آورید.

مرحله ۲-۳ – ضرایب خاکستری متغییرهای تصمیم در صورت کسر تابع هدف مسئله (۱۲) را بر عدد خاکستری بازه‌ای بدست آمده در مرحله ۲-۲ تقسیم کنید و مساله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$Maximize \otimes Z_2 =_G \frac{\sum_{j=1}^{k} \otimes a_j x_j + \otimes a_{j+1}}{Minimize \; \otimes Z_1}$$

$$s.t \qquad (۱۴)$$

$$\sum_{j=1}^{k} A_j x_j \le b$$

$$x_j \ge 0 \;\; j = 1,\dots,k$$

مرحله ۲-۴ – مسئله (۱۴) را با استفاده از روش ناصری و همکاران[۲۵] حل کرده و جواب آن را که به صورت اعداد خاکستری بازه‌ای می‌باشد بدست آورید. در این صورت، جواب به دست آمده برای مسئله (۱۴) جواب مسئله (۱۲) خواهد بود که به صورت خاکستری ارائه می‌شود.

۴. مثال عددی

در این قسمت با حل یک مثال کارایی الگوریتم پیشنهادی را نشان می‌دهیم.

مثال ۱. جواب مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی خاکستری زیر را با استفاده از الگوریتم پیشنهادی بدست آورید.

$$\begin{aligned}
&Minimize\ \otimes Z =_G \frac{\otimes[-3,-1]x_1+\otimes[2,4]x_2+\otimes[-2,-0.5]}{\otimes[0.5,1.5]x_1+\otimes[0.5,1.5]x_2+\otimes[3,5]}\\
&s.t\\
&\qquad -x_1+x_2\le 4\\
&\qquad +2x_1+3x_2\le 14\\
&\qquad +x_1-x_2\le 5\\
&\qquad x_1\ge 0\ ,x_2\ge 0
\end{aligned} \tag{۱۵}$$

تابع هدف مسئله داده شده از نوع مینیم‌سازی است.

بر اساس مرحله ۱-۱ الگوریتم پیشنهادی، مسئله ماکسیمم‌سازی زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned}
&Maximize\ \otimes Z_1 =_G \otimes[0.5,1.5]x_1+\otimes[0.5,1.5]x_2+\otimes[3,5]\\
&s.t\\
&\qquad -x_1+x_2\le 4\\
&\qquad +2x_1+3x_2\le 14\\
&\qquad +x_1-x_2\le 5\\
&\qquad x_1\ge 0\ ,x_2\ge 0
\end{aligned} \tag{۱۶}$$

مسئله برنامه‌ریزی خطی خاکستری بدست آمده را با استفاده از الگوریتم سیمپلکس اولیه[۲۴]، حل کنید.

$$\begin{aligned}
&Maximize\ \otimes Z_1' =_G \otimes[0.5,1.5]x_1+\otimes[0.5,1.5]x_2+0s_1+0s_2+0s_3\\
&s.t\\
&\qquad -x_1+x_2+s_1=4\\
&\qquad +2x_1+3x_2+s_2=14\\
&\qquad +x_1-x_2+s_3=5\\
&\qquad x_1,x_2\ ,\ s_1\ ,\ s_2\ ,\ s_3\ge 0
\end{aligned} \tag{۱۷}$$

جدول ۱: جدول اول مسئله برنامه‌ریزی خطی خاکستری

متغیرهای اساسی	$\otimes Z_1'$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	منابع
$\otimes Z_1'$	1	$-[0.5,1.5]$	$-[0.5,1.5]$	0	0	0	**0**
s_1	0	-1	1	1	0	0	**4**
s_2	0	2	3	0	1	0	**14**
s_3	0	1	-1	0	0	1	**5**

جدول ۲: جدول دوم مسئله برنامه‌ریزی خطی خاکستری

متغیرهای اساسی	$\otimes Z_1'$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	منابع
$\otimes Z_1'$	1	0	$-[1,3]$	0	0	$[0.5,1.5]$	$[2.5,7.5]$
s_1	0	0	0	1	0	1	**4**
s_2	0	0	5	0	1	-2	**14**
x_1	0	1	-1	0	0	1	**5**

جدول ۳: جدول بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی خاکستری

متغیرهای اساسی	$\otimes Z_1'$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	منابع
$\otimes Z_1'$	1	0	0	0	$[0.2,0.6]$	$[0.5,1.5]$	$[3.3,9.9]$
s_1	0	0	0	1	0	1	**9**
x_2	0	0	1	0	0.2	-0.4	**0.8**
x_1	0	1	0	0	0.2	0.6	**5.8**

بنابراین جواب بهینه برای مسئله شماره (۱۷) به صورت زیر خواهد بود.

$$x_1 = 5.8 \quad , \quad x_2 = 0.8 \quad , \quad \otimes Z_1' =_G \otimes[3.3,99] \tag{۱۸}$$

در نتیجه؛ جواب بهینه مسئله شماره (۱۷) به صورت زیر خواهد بود.

$$x_1 = 5.8 \quad , \quad x_2 = 0.8 \quad , \quad \otimes Z_1 =_G \otimes[3.3,99] + \otimes[3,5] = \otimes[6.3,14.9] \tag{۱۹}$$

بر اساس مرحله ۱-۳ الگوریتم پیشنهادی، ضرایب خاکستری متغییرهای تصمیم در صورت کسر تابع هدف مسئله (۱۵) را بر عدد خاکستری بازه‌ای بدست آمده در (۱۹) تقسیم کنید و مساله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$
\begin{aligned}
& Minimize\ \otimes Z_2 =_G \frac{\otimes[-3,-1]x_1 + \otimes[2,4]x_2 + \otimes[-2,-0.5]}{\otimes[6.3,14.9]} \\
& s.t \\
& \qquad -x_1 + x_2 \le 4 \\
& \qquad +2x_1 + 3x_2 \le 14 \\
& \qquad +x_1 - x_2 \le 5 \\
& \qquad x_1 \ge 0\ , x_2 \ge 0
\end{aligned} \tag{۲۰}
$$

یا؛

$$
\begin{aligned}
& Minimize\ \otimes Z_2 =_G -\otimes[0.067,0.476]x_1 + \otimes[0.134,0.634]x_2 + \otimes[-0.317,-0.033] \\
& s.t \\
& \qquad -x_1 + x_2 \le 4 \\
& \qquad +2x_1 + 3x_2 \le 14 \\
& \qquad +x_1 - x_2 \le 5 \\
& \qquad x_1 \ge 0\ , x_2 \ge 0
\end{aligned} \tag{۲۱}
$$

مسئله برنامه‌ریزی خطی خاکستری بدست آمده را با استفاده از الگوریتم سیمپلکس اولیه[۲۴]، حل کنید.

$$
\begin{aligned}
& Minimize\ \otimes Z_2' =_G -\otimes[0.067,0.476]x_1 + \otimes[0.134,0.634]x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 \\
& s.t \\
& \qquad -x_1 + x_2 + s_1 = 4 \\
& \qquad +2x_1 + 3x_2 + s_2 = 14 \\
& \qquad +x_1 - x_2 + s_3 = 5 \\
& \qquad x_1, x_2\ , s_1\ , s_2\ , s_3 \ge 0
\end{aligned} \tag{۲۲}
$$

جدول ۴: جدول اول مسئله برنامه‌ریزی خطی خاکستری

متغیرهای اساسی	Z_2'	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	منابع
Z_2'	1	$[0.067,0.476]$	$-[0.134,0.634]$	0	0	0	**0**
s_1	0	-1	1	1	0	0	**4**
s_2	0	2	3	0	1	0	**14**
s_3	0	1	-1	0	0	1	**5**

جدول ۵: جدول بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی خاکستری

متغیرهای اساسی	Z_2'	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	منابع
Z_2'	1	0	$[-0.567, 0.476]$	0	0	$-[0.067, 0.476]$	$-[0.335, 2.38]$
s_1	0	0	0	1	0	1	**9**
s_2	0	0	5	0	1	-2	**4**
x_1	0	1	-1	0	0	1	**5**

بنابراین جواب بهینه برای مسئله شماره (۲۲) به صورت زیر خواهد بود.

$$x_1 = 5 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad \otimes Z_2' =_G \otimes[-2.38, -0.335] \tag{۲۳}$$

در نتیجه؛ جواب بهینه مسئله شماره (۲۱) به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} x_1 = 5 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad \otimes Z_2 =_G \otimes Z_2 + \otimes[-0.317, -0.033] = \\ = \otimes[-2.38, -0.335] + \otimes[-0.317, -0.033] \\ = \otimes[-2.697, -0.368] \end{aligned} \tag{۲۴}$$

بر اساس مرحله ۱-۴ الگوریتم پیشنهادی، جواب بهینه مسئله شماره (۱۵) به صورت زیر خواهد بود:

$$x_1 = 5 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad \otimes Z =_G \otimes[-2.697, -0.368] \tag{۲۵}$$

برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی، نتایج به‌دست‌آمده از روش پیشنهادی برای مثال ۱ را، با جواب‌های به‌دست‌آمده از سایر روش‌های موجود برای حل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی خاکستری مقایسه می‌کنیم.

۴.۱. حل مثال ۱ با استفاده از روش پورافقی و همکاران [۲۹]

در این روش، مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با ضرایب خاکستری در تابع هدف در نظر گرفته شده است. برای حل این مسئله، از یک رویکرد جدید مبتنی بر تغییر متغیر چارنز و کوپر و ترکیب محدب بازه‌ها استفاده شده است. در این مقاله، الگوریتمی ارائه شده است که در آن، جواب مسئله برنامه‌ریزی کسری خاکستری به صورت اعداد خاکستری تعیین می‌شود و در نتیجه، عدم قطعیت در تابع هدف در نتیجه نهایی منعکس می‌شود.

$$Minimize\ \otimes P =_G \frac{\otimes[-3,-1]x_1 + \otimes[2,4]x_2 + \otimes[-2,-0.5]}{\otimes[0.5,1.5]x_1 + \otimes[0.5,1.5]x_2 + \otimes[3,5]}$$

$$\begin{aligned} s.t\ & \\ & -x_1 + x_2 \le 4 \\ & +2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ & +x_1 - x_2 \le 5 \\ & x_1 \ge 0\ , x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad (۲۶)$$

جواب بهینه مسئله شماره (۲۶) با استفاده از روش پورافقی و همکاران [۲۹]، به صورت زیر خواهد بود:

$$x_1 = 5\ \ ,\ \ x_2 = 0\ \ ,\ \ \otimes P =_G -\otimes[0.44, 3.09] = \otimes[-3.09, -0.44] \qquad (۲۷)$$

۴.۲. حل مثال بالا با استفاده از روش سفیدسازی

$$Minimize\ \otimes F =_G \frac{\otimes[-3,-1]x_1 + \otimes[2,4]x_2 + \otimes[-2,-0.5]}{\otimes[0.5,1.5]x_1 + \otimes[0.5,1.5]x_2 + \otimes[3,5]}$$

$$\begin{aligned} s.t\ & \\ & -x_1 + x_2 \le 4 \\ & +2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ & +x_1 - x_2 \le 5 \\ & x_1 \ge 0\ , x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad (۲۸)$$

پس از سفیدسازی مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی خاکستری با استفاده از مرکز اعداد خاکستری بازه‌ای، مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی زیر را داریم.

$$Minimize\ W = \frac{-2x_1 + 3x_2 - 1.25}{x_1 + x_2 + 4}$$

$$\begin{aligned} s.t\ & \\ & -x_1 + x_2 \le 4 \\ & +2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ & +x_1 - x_2 \le 5 \\ & x_1 \ge 0\ , x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی را با استفاده از روش چارلز و کوپر به مساله برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
&Minimize\ W' = -2y_1 + 3y_2 - 1.25z \\
&s.t \\
&\quad +y_1 + y_2 + 4z = 1 \\
&\quad -y_1 + y_2 - 4z \le 0 \\
&\quad +2y_1 + 3y_2 - 14z \le 0 \\
&\quad +y_1 - y_2 - 5z \le 0 \\
&\quad y_1 \ge 0\ , y_2 \ge 0
\end{aligned}
\qquad (۳۰)
$$

جدول ۶: جدول مقدماتی مسئله برنامه‌ریزی خطی

متغیرهای اساسی	y_1	y_2	z	R_1	s_2	s_3	s_4	منابع
W'	2	-3	1.25	$-M$	0	0	0	**0**
R_1	1	1	4	1	0	0	0	**1**
s_2	-1	1	-4	0	1	0	0	**0**
s_3	2	3	-14	0	0	1	0	**0**
s_4	1	-1	-5	0	0	0	1	**0**

جدول ۷: جدول اول مسئله برنامه‌ریزی خطی

متغیرهای اساسی	y_1	y_2	z	R_1	s_2	s_3	s_4	منابع
W'	2+M	-3+M	1.25+4M	0	0	0	0	**M**
R_1	1	1	4	1	0	0	0	**1**
s_2	-1	1	-4	0	1	0	0	**0**
s_3	2	3	-14	0	0	1	0	**0**
s_4	1	-1	-5	0	0	0	1	**0**

جدول ۸: جدول بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی

متغیرهای اساسی	y_1	y_2	z	R_1	s_2	s_3	s_4	منابع
W'	0	-3.49	0	-1.23-M	0	0	-0.74	**-1.247**
Z	0	0.22	1	0.112	0	0	-0.11	**0.111**
s_2	0	2	0	1	1	0	0	**1**
s_3	0	5.89	0	0.475	0	1	-2.42	**0.447**
y_1	1	0.11	0	0.55	0	0	0.44	**0.555**

جدول ۸ جدول بهینه مسئله است، بنابراین جواب بهینه برای مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$z = 0.111 \quad , \quad y_1 = 0.555 \quad , \quad y_2 = 0 \quad , W' = -1.247 \tag{۳۱}$$

حال با استفاده از این جواب‌ها، می توان جواب مسئله اصلی را به صورت زیر بدست آورد:

$$x_1 = 5 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad W = -1.25 \tag{۳۲}$$

بنابراین؛ جواب بهینه مسئله شماره (۲۸) با روش سفیدسازی به صورت زیر خواهد بود:

$$x_1 = 5 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad \otimes F =_G [-1.25, -1.25] \tag{۳۳}$$

۵. بحث و گفتگو

در این بخش جواب بدست آمده از روش پیشنهادی را با جواب بدست آمده از روش‌های قبلی با هم مقایسه می‌کنیم.

۵.۱. مقایسه جواب بدست آمده از روش پیشنهادی با روش سفیدسازی

جدول ۹: مقایسه جواب بدست آمده از روش پیشنهادی با روش سفیدسازی

روش پیشنهادی	$x_1 = 5$	$x_2 = 0$	$\otimes Z =_G \otimes[-2.697, -0.368]$
روش سفیدسازی	$x_1 = 5$	$x_2 = 0$	$\otimes F =_G [-1.25, -1.25]$

برای حل مسائل واقعی که پارامترهای غیر قطعی دارند، نمی‌توان از روش مسئله برنامه‌ریزی خطی به طور مستقیم استفاده کرد، بنابراین با استفاده از روش سفیدسازی، ابتدا پارامترهای غیر قطعی را قطعی کرده و مسئله را به یک مسئله با پارامترهای قطعی تبدیل می‌کنند. بنابراین، جواب به دست آمده با این روش، تنها تقریبی از جواب مسئله، با پارامترهای نادقیق است و نمی‌تواند عدم قطعیت پارامترهای غیر قطعی مسئله اصلی را در جواب نهایی منعکس کند. همانطور که در جدول بالا نشان داده شده است، جواب دقیق برای مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی خاکستری در مثال ۱، تنها یک تقریبی برای جواب خاکستری به دست آمده با روش پیشنهادی است.

مقایسه جواب‌های به دست آمده از روش پیشنهادی با روش سفیدسازی، با استفاده از روش رتبه‌بندی هو و وانگ و مرکز و درجه خاکستری در جدول زیر نشان داده شده است.

جدول ۱۰: رتبه‌بندی جواب‌ها

رتبه بندی مرکز و درجه خاکستری	رتبه بندی هو و وانگ	جواب روش سفیدسازی (B)	جواب روش پیشنهادی (A)
$A \preceq_G B$	$A \preceq_G B$	$\otimes[-1.25, -1.25]$	$\otimes[-2.697, -0.368]$

طبق جدول ۱۰، جواب بدست‌آمده از روش پیشنهادی، با در نظر گرفتن دو روش رتبه‌بندی اعداد خاکستری، بهتر از جواب بدست آمده از روش سفیدسازی است.

۵.۲. مقایسه جواب بدست آمده از روش پیشنهادی با روش پورافقی و همکاران[۲۹]

جدول ۱۱: مقایسه جواب بدست آمده از روش پیشنهادی با روش پورافقی و همکاران

روش پیشنهادی	$x_1 = 5$	$x_2 = 0$	$\otimes Z =_G \otimes[-2.697, -0.368]$
روش پورافقی و همکاران	$x_1 = 5$	$x_2 = 0$	$\otimes P =_G \otimes[-3.09, -0.44]$

جواب‌های بدست آمده از هر دو روش به صورت اعداد خاکستری بازه‌ای می‌باشند، یعنی عدم قطعیت پارامترهای غیر قطعی مسئله اصلی را در جواب نهایی منعکس می‌کنند.
اما برای تعیین اینکه کدام جواب بهتر است. جواب‌های به دست آمده از روش پیشنهادی با روش پورافقی و همکاران [۲۹]، با استفاده از روش رتبه‌بندی هو و وانگ و مرکز و درجه خاکستری در جدول زیر رتبه‌بندی شده‌اند.

جدول ۱۲: رتبه‌بندی جواب‌ها

جواب روش پیشنهادی (A)	**جواب روش پورافقی و همکاران (B)**	**رتبه بندی هو و وانگ**	**رتبه بندی مرکز و درجه خاکستری**
$\otimes[-2.697, -0.368]$	$\otimes[-3.09, -0.44]$	$A \preceq_G B$	$A \preceq_G B$

نتایج جدول ۱۲ نشان می‌دهد که جواب به دست آمده از روش پیشنهادی با در نظر گرفتن دو روش رتبه بندی اعداد خاکستری هو و وانگ، مرکز و درجه خاکستری، بهتر از روش پورافقی و همکاران [۲۹]، است.

۶. نتیجه گیری

مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی یکی از موضوعات مورد علاقه در تحقیق در عملیات است که برای مدل‌سازی مسائل واقعی استفاده می‌شود. در اکثر مدل‌های مسائل دنیای واقعی، تعیین ضرایب قطعی امکان‌پذیر نیست. بنابراین در چنین مدل‌هایی از ضرایب غیر قطعی استفاده می‌شود. یکی از رویکردهای مقابله با عدم قطعیت، نظریه سیستم خاکستری است. در این مقاله مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با ضرایب خاکستری در تابع هدف در نظر گرفته شده است. در روش‌های ارائه شده قبلی برای یافتن جواب مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی با پارامترهای خاکستری، مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی خاکستری به یک یا مجموعه‌ای از مسائل کلاسیک برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌شوند و سپس جواب بهینه به‌دست می‌آید. که تنها تقریبی از جواب مسئله، با پارامترهای خاکستری است و نمی‌تواند عدم قطعیت پارامترهای غیر قطعی مسئله اصلی را در جواب نهایی منعکس کند. در این مقاله برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی با ضرایب خاکستری در تابع هدف رویکرد جدیدی مبتنی بر تبدیل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی خاکستری به دو مسئله برنامه‌ریزی خطی خاکستری ارائه شد. مسائل برنامه‌ریزی خطی خاکستری بر اساس الگوریتم سیمپلکس اولیه[۲۵]، حل شد و جواب مسئله در قالب یک عدد خاکستری

بازه‌ای به دست آمد. همچنین روش‌های رتبه بندی هو و وانگ و روش مرکز و درجه خاکستری نشان داد که جواب به دست آمده از روش پیشنهادی بهتر از روش سفیدسازی پارامترهای خاکستری می‌باشد.

References

1. M. Borza, A. Sham Rambely and S. A. Edalatpanah, A Linearization to the Multi-objective Linear Plus Linear Fractional Program, SN Operations Research Forum, Springer, **4** (2023), 1-22.

2. E.B. Bajalinov, Linear Fractional Programming Theory, Methods, Applications and Software, Springer Science and Business Media, (2013).

3. G. Bitran and A. Novaes, Linear programming with a fractional objective function, Operations Research, **21** (1973), 22–29.

4. A. Baidya, U.K. Bera and M. Maiti, The grey linear programming approach and its application to multi-objective multi-stage solid transportation problem, Operation research, **53** (2016), 500–522

5. A. Charnes, W.W. Cooper and E. Rhodes, Measuring the efficiency of decision making units, European journal of operational research, **2** (1978), 429-444.

6. B. Craven, Fractional Programming, Heldermann Verlag, (1988).

7. A. Charnes and W.W. Cooper, Programming with linear fractional functionals, Naval Research logistics quarterly, **9** (1962), 181–186.

8. V. Chinnadurai and S. Muthukumar, Solving the linear fractional programming problem in a fuzzy environment: Numerical approach, Applied Mathematical Modelling, **40** (2016), 6148-6164.

9. S. K. Das, T. Mandal and S. A. Edalatpanah, Optimal solution of neutrosophic linear fractional programming problems with mixed constraints, Research Square, 26, **17** (2022), 8699-8707.

10. S. K. Das and T. Mandal, A single stage single constraints linear fractional programming problem: An approach, Operation Researh and Appllication: An International Journal, **1** (2015), 1-5.

11. S. K. Das, S. A. Edalatpanah and T. Mandal, A proposed model for solving fuzzy linear fractional programming problem: Numerical Point of View, Journal of Computational Science, **25** (2018), 367-375.

12. S. K. Das, T. Mandal and D. Behera A new approach for solving fully fuzzy linear programming problem, International Journal of Mathematics in Operational Research, **15** (2019), 296-309.

13. S. K. Das, S. A. Edalatpanah and T. Mandal, Development of Unrestricted Fuzzy Linear Fractional Programming Problems Applied in Real Case, Fuzzy Information and Engineering, **13** (2021), 184-195.

14. S. K. Das, T. Mandal and S. A. Edalatpanah, A new approach for solving fully fuzzy linear fractional programming problems using the Multi objective linear programming problem, RAIRO Operation Research, **51** (2017), 285-297.

15. J.L. Deng, The control problems of grey systems, Systems and Control Letters, **1** (1982), 288-294.

16. D. Darvishi and S.H. Nasseri, A dual simplex method for grey linear programming problems based on duality results, Grey Systems: Theory and Application, **30** (2018), 127-142.

17. D. Darvishi, J. Forrest and S. Liu, A comparative analysis of grey ranking approaches, Grey Systems: Theory and Application, **9** (2019), 472-487.

18. B.Q. Hu and S. Wang, A novel approach in uncertain programming part I: new arithmetic and order relation for interval numbers, Journal of Industrial and Management Optimization., **2** (2006), 351-371.

19. A. Khastan, B.H. Jimenez and A.B. Moreno, On the new solution to interval linear fractional programming problems, Evolutionary Intelligence, **17** (2024), 4001-4005.

20. S. Liu, Y. Yang, N. Xie and J. Forrest, New progress of grey system theory in the new millennium, Grey Systems: Theory and Application, **6** (2016), 2-31.

21. S. Liu, Y. Yang and J. Forrest, Grey Data Analysis, Springer, Singapore, (2017).

22. A. Mahmoudi, S. Liu, SA. Javed and M. Abbasi, A novel method for solving linear programming with grey parameters, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, **36** (2019), 161-172.

23. I. Maiti, S. Pramanik, T. Mandal and S. K. Das, Solving Multiobjective linear fractional programming problem based on Stanojevic's normalization technique under fuzzy environment, International Journal of Operation Research, **42** (2021), 543-564.

24. R.E. Moore, R.B. Kearfott and M.J. Cloud, Introduction to Interval Analysis, SIAM Press, Philadelphia. (2009).

25. S.H. Nasseri, A.B. Yazdani and D. Darvishi, A primal simplex algorithm for solving linear programming problem with grey cost coefficients, Journal of New Researches in Mathematics, **1** (2016), 121-142.

26. S.H. Nasseri, D. Darvishi and A. Yazdani, A new approach for solving grey assignment problems, Control and Optimization in Applied Mathematics, **2** (2017), 15-28.

27. S.H. Nasseri and D. Darvishi, Duality results on grey linear programming problems, The Journal of Grey System, **30** (2018), 127-142.

28. O. Omer Osman and N. Sulaiman, Solving Linear Fractional Programming Problems Via Revised Simplex Method, EURASIAN JOURNAL OF SCIENCE AND ENGINEERING, **10** (2025), 54-62.

29. F. Pourofoghi and D. Darvishi, Solving Linear Fractional Programming Problems in Uncertain Environments: A Novel Approach with Grey Parameters, Control and Optimization in Applied Mathematics – COAM, **9** (2024), 169-183.

30. F. Pourofoghi, D. Darvishi and J. Saffar Ardabili, A New Approach to Finding the Answer of Transportation Problems with Grey Parameters, Operational Research and Its Applications, **18** (2021), 59-73.

31. F. Pourofoghi, J. Saffar Ardabili and D. Darvishi, A New Approach for Finding an Optimal Solution for Grey Transportation Problem, Nonlinear Analysis in Engineering and Sciences, **10** (2019), 83-95.

32. F. Pourofoghi and D. Darvishi, Applying Duality Results to Solve the Linear Programming Problems with Grey Parameters, Control and Optimization in Applied Mathematics (COAM), **5** (2021), 15-28.

33. F. Pourofoghi, Solving the Problem of Linear Programming with Cost Coefficients and Grey Resources Using the Primal Simplex Algorithm, Big Data and Computing Visions, **2** (2022), 80-89.

34. J. Saffar Ardabili, D. Darvishi and F. Pourofoghi, Application of center and width concepts to solving grey linear programming, International Journal of Applied and Computational Mathematics, **6** (2020), 1-12.

35. I. M. Stancu-Minasian, Fractional programming: Theory, methods and applications, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, (1997).

36. R. Srinivasan On solving fuzzy linear fractional programming in material aspects, Materials Today: Proceedings, **21** (2019), 155-157.

37. S. Schaible, Fractional programming, in Handbook of global optimization, Springer, (1995).

38. M. Shafiei Nikabadi and L. Helalian, Rating Supply Chain Risks Using the Combined Approach of FMEA Optimization and Gray Theory (Case Study: Mashhad Food Industry Units), Journal of Decisions and operation research, **8** (2023), 872-885.

39. L.A. Zadeh, Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy sets and systems, **1** (1978), 3-28.