Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

SOME NEW INDICES IN A GROUP AND SOME RELATIONS BETWEEN THESE INDICES AND THE SET OF ITS CENTRALIZERS

Kh. Khoramshahi[1] ✉, **M. Zarrin**[2]

1. Department of Mathematics, University of Kurdistan, P.O. Box: 416, Sanandaj, Iran . E-mail: kh.khoramshahi@gmail.com
2. Department of Mathematics, University of Kurdistan, P.O. Box: 416, Sanandaj, Iran . ✉ E-mail: M.Zarrin@uok.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 24 May 2021
Received in revised form: 6 July 2024
Accepted: 9 July 2024
Published online: 3 November 2025

Keywords:
Centralizer
C_n −group
minimal simple group

ABSTRACT

Introduction

For a group G, Cent(G) is defined as the set of all centralizers of the members of G. A group G is called a C_n-group if |Cent(G)| = n . The concept of finite C_n-groups was introduced in 1994 by Belcastro and Sherman in [4]. They showed that C_1-groups are exactly the same as Abelian groups and that G is non-Abelian if and only if |Cent(G)|≥4 . In 2000, Ashrafi in [3] showed that for every natural number n≠2,3 there is at least one C_n-group. In 2009, Zarrin in [14] showed that for any two finite simple groups G and H , if |Cent(G)| = |Cent(H)| then it does not necessarily follow that G≅H . He also identified all finite semisimple C_n-groups for n≤73 . In 2011, in [17], he showed that the length of the derived of solvable C_n-groups is at most equal to n, and in 2015, in [15], he showed that for any two isoclinic groups G and H, we have |Cent(G)| = |Cent(H)|, then the two groups G and H are not necessarily isoclinic, and they conjectured that if G and H are two finite groups, |Cent(G)| = |Cent(H)| and |G|=|H|, then we can conclude that G and H are isoclinic. They also considered groups whose number of centralizers is equal to the number of centralizers of some of their subgroups. They then obtained an upper bound for the length of the derived of nilpotent C_n-groups.

Results and discussion

In this paper, we define special subgroups of Cent(G) and show the connection between these indices and Cent(G) in minimal simple groups.

How to cite: Khoramshahi , Khodadad., Zarrin, Mohammad (2025). SOME NEW INDICES IN A GROUP AND SOME RELATIONS BETWEEN THESE INDICES AND THE SET OF ITS CENTRALIZERS. *Mathematical Researches*, **11** (2), 1 –15.

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴٦-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵٤-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

عنوان مقاله

شاخص هایی جدید در گروه و روابطی میان آن ها و مجموعه مرکزسازها

خداداد خرمشاهی[1]✉، محمد زرین[2]

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران. رایانامه: kh.khoramshahi@gmail.com
۲. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران. رایانامه: M.Zarrin@uok.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

گروه ساده ناآبلی G را یک گروه ساده مینیمال می نامند هرگاه هر زیرگروه سره آن حل پذیر باشد. برای گروه G، $Cent(G)$ را مجموعه تمام مرکزسازهای اعضای G تعریف می کنند. گروه G را یک C_n-گروه می نامند هرگاه $|Cent(G)|=$ n ما در این مقاله شاخص های جدیدی را در گروه تعریف و رابطه ای میان این شاخص ها و $Cent(G)$ در گروه های ساده مینیمال پیدا می کنیم.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۳/۰۳
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۰۴/۱۵
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۴/۱۸
تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۰۸/۱۲

واژه‌های کلیدی:
مرکزسازها،
گروهساده مینیمال،
C_n-گروه

استناد: خرمشاهی، خداداد ؛ زرین ، محمد (۱۴۰۴). شاخص هایی جدید در گروه و روابطی میان آن ها و مجموعه مرکزساز ها. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۱** (۲)، ۱ – ۱۵.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

برای گروه G، $Cent(G)$ را مجموعه تمام مرکزسازهای اعضای G تعریف می کنند. گروه G را یک C_n-گروه می نامند اگر $|Cent(G)| = n$. مفهوم C_n-گروه های متناهی در سال ۱۹۹۴ توسط بلکاسترو و شرمان در [۴] معرفی شد. آن ها نشان دادند C_1-گروه ها دقیقاً همان گروه های آبلی هستند و G ناآبلی است اگر و تنها اگر $|Cent(G)| \geq 4$. در سال ۲۰۰۰، اشرفی در[۳] نشان داد به ازای هر عدد طبیعی $n \neq 2,3$ حداقل یک C_n-گروه وجود دارد. در سال ۲۰۰۹، زرین در [۱۴] نشان داد برای هر دو گروه ساده متناهی G, H، اگر $|Cent(G)| = |Cent(H)|$ آنگاه لزوماً نمی توان نتیجه گرفت که $G \cong H$. او همچنین تمام C_n-گروه های نیم ساده متناهی که $n \leq 73$ را مشخص کرد. او در سال ۲۰۱۱ در [۱۷] نشان داد طول مشتق C_n-گروه های حل پذیر حداکثر برابر است با n و در سال ۲۰۱۵ در [۱۵] نشان داد برای هر دو گروه ایزوکلینیک G, H داریم $|Cent(G)| = |Cent(H)|$. خرمشاهی و همکارانش در سال ۲۰۱۹ در [۱۰] نشان دادند که اگر $|Cent(G)| = |Cent(H)|$آنگاه لزوماً دو گروه G, H ایزوکلینیک نیستند و حدس زدند اگر G, H دو گروه متناهی باشند که $|Cent(G)| = |Cent(H)|$ و $|G| = |H|$ آنگاه می توان نتیجه گرفت G, H ایزوکلینیک هستند. آن ها همچنین گروه هایی را مورد بررسی قرار دادند که تعداد مرکزسازهای آن ها با تعداد مرکزسازهای برخی از زیرگروه هایشان برابر است. در ادامه کران بالایی برای طول مشتق C_n-گروه های پوچ توان به دست آوردند. ما در این مقاله زیرگروه هایی خاص از $Cent(G)$ را تعریف می کنیم و ارتباط میان این شاخص ها و $Cent(G)$ را در گروه های ساده مینیمال نشان می دهیم.

۲. نتایج اصلی

ما برای گروه G تعریف جدیدی از زیرمجموعه های خاصی از $Cent(G)$ را ارائه می دهیم و به دنبال رابطه ای میان آن ها و $Cent(G)$ خواهیم بود.

تعریف 2.1. فرض کنید G یک گروه دلخواه باشد. $\pi(G)$ را مجموعه تمام شمارنده های اول $| G |$ در نظر می گیرند. برای هر $p \in \pi(G)$ ، $Cent_p(G)$ را مجموعه تمام مرکزسازهای اعضایی از G تعریف می کنیم که مرتبه آن اعضاء، توانی از p باشد.

تعریف 2.2. گروه ساده ناآبلی G را یک گروه ساده مینیمال می نامند هرگاه هر زیرگروه سره آن حل پذیر باشد.

قضیه زیر ساختار گروه های ساده مینیمال را نشان می دهد.

قضیه 3.2. هر گروه ساده مینیمال با یکی از گروه های ساده مینیمال زیر ایزومورف است.

۱) $\mathrm{PSL}(2,2^p)$ به ازای هر p اول

۲)$PSL(2,3^p)$ به ازای هر p اول و فرد

۳)$PSL(2,p)$ به ازای هر p اول بزرگتر از ۳ به طوری که $p^2+1 \equiv 0 \ (mod\ 5)$

۴) $Sz(2^p)$ به ازای هر p اول و فرد

۵)$PSL(3,3)$

اثبات. نتیجه 1.3 از [۱۲] را ببینید

ما به دنبال رابطه ای میان $Cent(G)$ و $Cent_p(G)$ ها برای p های عضو $\pi(G)$ در گروه های ساده مینیمال هستیم. برای این کار این شاخص ها را در مجموعه های ذکر شده در قضیه 3.2 محاسبه می کنیم. این کار را با بیان یک لم آغاز می کنیم.

لم 4.2 . فرض کنید $G = PSL(2,q)$ به طوری که q توانی از عدد اول p و همنهشت با ۳ یا ۵ به هنگ ۸ باشد، در این صورت G دارای عضوی از مرتبه 2^n $(n>1)$ نیست.

اثبات. ابتدا فرض کنیم $q \equiv 3 \ (mod\ 8)$. بنا به قضیه 21.3 از [۱]، زیرگروه های A ، B و P وجود دارند به طوری که

$$\mathcal{P} = \{A^x, B^x, P^x | x \in G\}$$

یک پارتیشن برای G است و داریم

$$C_G(a) = \begin{cases} N_G(<a>) & a^2 = 1 \,, a \in B^x \ (x \in G) \\ B^x & a^2 \neq 1 \,, a \in B^x \ (x \in G) \\ A^x & a \in A^x \ (x \in G) \\ P^x & a \in P^x \ (x \in G) \end{cases}$$

همچنین داریم

$$|A| \equiv 1 \ (mod\ 4) \,,$$

$$|B| \equiv 2 (mod\ 4)$$

و

$$|P| \equiv 3 \ (mod\ 4)$$

اگر مرتبه $a \in G$ برابر با $2^n(n>1)$ باشد آنگاه $x \in G$ وجود دارد بطوری که $a \in B^x$ و چون مرتبه a، مرتبه B را عاد می کند پس $2^n \equiv 2\ (mod\ 4)$.

این تناقض نشان می دهد G عضوی از مرتبه $2^n(n>1)$ ندارد.

برای حالت $q \equiv 5\ (mod\ 8)$ به روش مشابه حکم به دست می آید.

قضیه 5.2 . فرض کنید $G = PSL(2,q)$ که q توانی از یک عدد اول p است. در این صورت

۱)اگر $q \equiv 0\ (mod\ 4)$ ، همچنین s و r اعداد اولی باشند که $q-1$ را عاد کند آنگاه

$$Cent_r(G) = Cent_s(G)$$

و مرتبه آن ها برابر است با $\frac{q(q+1)}{2}$.

۲)اگر $q \equiv 0\ (mod\ 4)$ ، همچنین s و r اعداد اولی باشند که $q+1$ را عاد کند آنگاه

$$Cent_r(G) = Cent_s(G)$$

و مرتبه آن ها برابر است با $\frac{q(q-1)}{2}$.

۳)اگر $q>5$ و $q \equiv 1\ (mod\ 4)$ همچنین $r,s \neq 2$ اعداد اولی باشند که $\frac{q-1}{2}$ را عاد کنند آنگاه

$$Cent_r(G) = Cent_s(G)$$

و مرتبه آن ها برابر است با $\frac{q(q+1)}{2}$.

۴)اگر $q>5$ و $q \equiv 1\ (mod\ 4)$ همچنین r,s اعداد اولی باشند که $\frac{q+1}{2}$ را عاد کنند آنگاه

$$Cent_r(G) = Cent_s(G)$$

و مرتبه آن ها برابر است با $\frac{q(q-1)}{2}$.

۵)اگر $q>5$ و $q \equiv 1\ (mod\ 4)$ آنگاه

$$|Cent_2(G)| = \begin{cases} \frac{q(q+1)}{2} & q \equiv 5\ (mod\ 8) \\ q(q+1) & q \equiv 1\ (mod\ 8) \end{cases}$$

۶)اگر $q>5$ و $q \equiv 3\ (mod\ 4)$ همچنین $r,s \neq 2$ اعداد اولی باشند که $\frac{q+1}{2}$ را عاد کنند آنگاه

$$Cent_r(G) = Cent_s(G)$$

و مرتبه آن ها برابر است با $\frac{q(q-1)}{2}$.

۷)اگر $q > 5$ و $q \equiv 3\ (mod\ 4)$ همچنین r, s اعداد اولی باشند که $\frac{q-1}{2}$ را عاد کنند آنگاه

$$Cent_r(G) = Cent_s(G)$$

و مرتبه آن ها برابر است با $\frac{q(q+1)}{2}$.

۸) اگر $q > 5$ و $q \equiv 3\ (mod\ 4)$ آنگاه

$$|Cent_2(G)| = \begin{cases} \dfrac{q(q-1)}{2} & q \equiv 3\ (mod\ 8) \\ q(q-1) & q \equiv 7\ (mod\ 8) \end{cases}$$

۹) $|Cent_p(G)| = q + 1$.

اثبات. حالت (۱) و (۲) :

با توجه به قضیه 21.3 از [۱] ، زیرگروه های A ، B و P وجود دارند به طوری که

$$\mathcal{P} = \{A^x, B^x, P^x | x \in G\}$$

یک پارتیشن برای G است و داریم

$$C_G(a) = \begin{cases} A^x & a \in A^x\ (x \in G) \\ B^x & a \in B^x\ (x \in G) \\ P^x & a \in P^x\ (x \in G) \end{cases}$$

اگر r, s اعداد اولی باشند که $q - 1$ را عاد کنند، آنگاه به ازای هر $a \in G$ که $o(a) = r^i\ (i \in \mathbb{N})$ داریم $C_G(a) = A^x$.

همچنین بنا به قضیه کوشی به ازای هر $x \in G$ ، عضوی مانند $a \in A^x$ وجود دارد که $o(a) = r$ بنابراین می توان چنین نوشت

$$Cent_r(G) = \{C_a(x) | o(x) = r^i (i \in \mathbb{N})\}$$

$$= \{A^x | x \in G\}$$

با استدلال مشابه بالا داریم

$$Cent_s(G) = \{A^x | x \in G\}$$

پس $Cent_r(G) = Cent_s(G)$ و داریم

$$|Cent_r(G)| = |Cent_s(G)| = \frac{\left(\frac{q(q^2-1)}{2}\right)}{q-1} = \frac{q(q+1)}{2}$$

حال فرض کنید s و r اعداد اولی باشند که $q+1$ را عاد کنند. مشابه آنچه در بالا گفته شد داریم

$$Cent_r(G) = \{B^x | x \in G\} = Cent_s(G)$$

همچنین

$$|Cent_r(G)| = |Cent_s(G)| = \frac{\left(\frac{q(q^2-1)}{2}\right)}{q+1} = \frac{q(q-1)}{2}$$

حالت (۳)، (۴) و (۵) :

با توجه به قضیه 21.3 از [۱]، زیرگروه های A ، B و P وجود دارند به طوری که

$$\mathcal{P} = \{A^x, B^x, P^x | x \in G\}$$

یک پارتیشن برای G است و داریم

$$|A| \equiv 0 \ (mod\ 4)\ ,$$

$$|B| \equiv 1 (mod\ 4)$$

و

$$|P| \equiv 1\ (mod\ 4)$$

همچنین

$$C_G(a) = \begin{cases} N_G(<a>) & a^2 = 1\ , a \in A^x\ (x \in G) \\ A^x & a^2 \neq 1\ , a \in A^x\ (x \in G) \\ B^x & a \in B^x\ (x \in G) \\ P^x & a \in P^x\ (x \in G) \end{cases}$$

اگر $r,s \neq 2$ اعداد اولی باشند که $\frac{q-1}{2}$ را عاد کنند، آنگاه به ازای هر $a \in G$ که $o(a) = r^i\ (i \in \mathbb{N})$ داریم $C_G(a) = A^x$.

همچنین بنا به قضیه کوشی به ازای هر $x \in G$ عضوی مانند $a \in A^x$ وجود دارد که $o(a) = r$. بنابراین می توان چنین نوشت

$$Cent_r(G) = \left\{C_G(a) \middle| o(a) = r^i (i \in \mathbb{N})\right\} = \{A^x | x \in G\}$$

با استدلال مشابه استدلال بالا داریم

$$Cent_s(G) = \{A^x | x \in G\}$$

پس $Cent_r(G) = Cent_s(G)$ و داریم

$$|Cent_r(G)| = |Cent_s(G)| = \frac{\left(\frac{q(q^2-1)}{2}\right)}{q-1} = \frac{q(q+1)}{2}$$

اگر r,s اعداد اولی باشند که $\frac{q+1}{2}$ را عاد کنند، آنگاه به ازای هر $a \in G$ که $o(a) = r^i\ (i \in \mathbb{N})$ داریم $C_G(a) = B^x$. همچنین بنا به قضیه کوشی به ازای هر $x \in G$ عضوی مانند $a \in B^x$ وجود دارد که $o(a) = r$. بنابراین می توان نوشت

$$Cent_r(G) = \left\{C_G(a) \middle| o(a) = r^i (i \in \mathbb{N})\right\} = \{B^x | x \in G\}$$

با استدلال مشابه استدلال بالا داریم

$$Cent_s(G) = \{B^x | x \in G\}$$

پس $Cent_r(G) = Cent_s(G)$ و داریم

$$|Cent_r(G)| = |Cent_s(G)| = \frac{\left(\frac{q(q^2-1)}{2}\right)}{q+1} = \frac{q(q-1)}{2}$$

برای تکمیل اثبات کافی است $|Cent_2(G)|$ را محاسبه کنیم. بنابر آن چه در اثبات قسمت دوم قضیه 1.1 از مرجع [۱۴] گفته شد داریم

$$|\{A^x | x \in G\}| = |\{N_G(< a >) | o(a) = 2, a \in G\}| = \frac{q(q+1)}{2}$$

همچنین برای هر $x \in G$ عضوی مانند $a \in A^x$ وجود دارد که $a^2 \neq 1$ و داریم $C_G(a) = A^x$ حال می توان نوشت

$$Cent_2(G) = \{C_G(a) \mid o(a) = 2^i (i \in \mathbb{N})\}$$

$$= \{C_G(a) \mid o(a) = 2\} \cup \{C_G(a) \mid o(a) = 2^i (i > 1)\}$$

بنا به لم 4.2 اگر $q \equiv 5 \ (mod\ 8)$ آنگاه

$$Cent_2(G) = \{C_G(a) \mid a^2 = 1\} = \{N_G(< a >) \mid a^2 = 1\}$$

و اگر $q \equiv 1 \ (mod\ 8)$ آنگاه

$$Cent_2(G) = \{N_G(< a >) \mid a^2 = 1\} \cup \{A^x \mid x \in G\}$$

بنابراین

$$|Cent_2(G)| = \begin{cases} \dfrac{q(q+1)}{2} & q \equiv 5 \ (mod\ 8) \\ q(q+1) & q \equiv 1 \ (mod\ 8) \end{cases}$$

حالت (۶)، (۷) و (۸) :

با توجه به قضیه 21.3 از [۱] ، زیرگروه های A ، B و P وجود دارند به طوری که

$$\mathcal{P} = \{A^x, B^x, P^x \mid x \in G\}$$

یک پارتیشن برای G است و داریم

$$|A| \equiv 1 \ (mod\ 4)\ ,$$

$$|B| \equiv 0 (mod\ 4)\ ,$$

و

$$|P| \equiv 3 \ (mod\ 4)$$

همچنین

$$C_G(a) = \begin{cases} N_G(< a >) & a^2 = 1\,, a \in\ B^x\ (x \in G) \\ B^x & a^2 \neq 1\,, a \in\ B^x\ (x \in G) \\ A^x & a \in\ A^x\ (x \in G) \\ P^x & a \in\ P^x\ (x \in G) \end{cases}$$

اگر $r, s \neq 2$ اعداد اولی باشند که $\frac{q+1}{2}$ را عاد کنند، آنگاه به ازای هر $a \in G$ که $o(a) = r^i\ (i \in \mathbb{N})$ داریم $C_G(a) = B^x$.همچنین بنا به قضیه کوشی به ازای هر $x \in G$ عضوی مانند $a \in A^x$ وجود دارد بطوری که $o(a) = r$. بنابراین می توان نوشت

$$Cent_r(G) = \left\{C_G(a)\middle|o(a) = r^i(i \in \mathbb{N})\right\} = \{B^x|x \in G\}$$

با استدلال مشابه استدلال بالا داریم

$$Cent_s(G) = \{B^x|x \in G\}$$

پس $Cent_r(G) =\ Cent_s(G)$ و داریم

$$|Cent_r(G)| = |Cent_s(G)| = \frac{\left(\frac{q(q^2-1)}{2}\right)}{q+1} = \frac{q(q-1)}{2}$$

اگر s و r اعداد اولی باشند که $\frac{q-1}{2}$ را عاد کنند، آنگاه به ازای هر $a \in G$ که $o(a) = r^i\ (i \in \mathbb{N})$ داریم $C_G(a) = A^x$. همچنین بنا به قضیه کوشی به ازای هر $x \in G$ عضوی مانند $a \in A^x$ وجود دارد که $o(a) = r$ بنابراین می توان نوشت

$$Cent_r(G) = \left\{C_G(a)\middle|o(a) = r^i(i \in \mathbb{N})\right\} = \{A^x|x \in G\}$$

با استدلال مشابه استدلال بالا داریم

$$Cent_s(G) = \{A^x|x \in G\}$$

پس $Cent_r(G) =\ Cent_s(G)$ و داریم

$$|Cent_r(G)| = |Cent_s(G)| = \frac{\left(\frac{q(q^2-1)}{2}\right)}{q-1} = \frac{q(q+1)}{2}$$

برای تکمیل اثبات کافی است $|Cent_2(G)|$ را محاسبه کنیم. بنا بر آنچه در اثبات قسمت سوم قضیه 1.1 از مرجع [۱۴] گفته شد داریم

$$|\{B^x|x \in G\}| = |\{N_G(< a >)|o(a) = 2, a \in G\}| = \frac{q(q-1)}{2}$$

همچنین برای هر $x \in G$ عضوی مانند $a \in B^x$ وجود دارد که $a^2 \neq 1$ و داریم $C_G(a) = B^x$ حال می توان نوشت

$$Cent_2(G) = \{C_G(a) \big| o(a) = 2^i (i \in \mathbb{N})\}$$
$$= \{C_G(a) | o(a) = 2\} \cup \{C_G(a) | o(a) = 2^i (i > 1)\}$$

بنا به لم 4.2 اگر $q \equiv 3 \ (mod\ 8)$ آنگاه

$$Cent_2(G) = \{C_G(a) | a^2 = 1\} = \{N_G(< a >) | a^2 = 1\}$$

و اگر $q \equiv 7 \ (mod\ 8)$ آنگاه

$$Cent_2(G) = \{N_G(< a >) | a^2 = 1\} \cup \{B^x | x \in G\}$$

بنابراین

$$|Cent_2(G)| = \begin{cases} \dfrac{q(q-1)}{2} & q \equiv 3 \ (mod\ 8) \\ q(q-1) & q \equiv 7 \ (mod\ 8) \end{cases}$$

حالت (۹) :

مشابه آنچه در سه قسمت قبلی گفته شد داریم

$$Cent_p(G) = \{C_G(a) \big| o(a) = p^i\} = \{P^x | x \in G\} = Cent_s(G)$$

و همچنین داریم $|Cent_r(G)| = |Cent_s(G)| = q + 1$.

قضیه 6.2. فرض کنید $G = Sz(q)$ به طوری که $(m \in \mathbb{N}) q = 2^{2m+1}$ و $r = \sqrt{\frac{q}{2}}$ در این صورت

۱)اگر s و t اعداد اولی باشند که $q - 1$ را عاد کنند آنگاه

$$Cent_r(G) = Cent_s(G)$$

و مرتبه آن ها برابر است با $\frac{q^2(q^2+1)}{2}$.

۲)اگر s و t اعداد اولی باشند که $q - 2r + 1$ را عاد کنند آنگاه

$$Cent_r(G) = Cent_s(G)$$

و مرتبه آن ها برابر است با $\frac{q^2(q^2+1)(q-1)}{4(q-2r+1)}$.

۳)اگر s و t اعداد اولی باشند که $q+2r+1$ را عاد کنند آنگاه

$$Cent_r(G) = Cent_s(G)$$

و مرتبه آن ها برابر است با $\frac{q^2(q^2+1)(q-1)}{4(q+2r+1)}$.

۴) $|Cent_2(G)| = q(q^2+1)$.

اثبات. (۱) :

بنابر قضیه های 10.3 و 11.3 فصل (XI) از مرجع [۶]، G شامل زیرگروه های C, B, A وF است به طوری که $|A| = q-1$ ، $|B| = q-2r+1$ ،$|C| = q+2r+1$ و $|F| = q^2$. مجموعه

$$\mathcal{P} = \{A^x, B^x, C^x, F^x | x \in G\}$$

یک پارتیشن برای G است و A، B، C دوری و F یک۲-زیرگروه سیلوی G است. همچنین برای هر $M \epsilon \mathcal{P}$ داریم

$$C_G(b) \leq M(\forall b \in m \backslash \{1\}) \tag{۱}$$

تعداد مزدوج های A ، B ، C و F به ترتیب برابر است با $m = \frac{q^2(q^2+1)}{2}$ ، $l = \frac{q^2(q^2+1)(q^2+1)}{4(q-2r+1)}$ ، $k = \frac{q^2(q^2-1)(q^2+1)}{4(q+2r+1)}$ و $n = q^2+1$.

بنا به آنچه دراثبات قضیه 2.1 از مرجع [۱۴] گفته شد برای هر عضو غیر بدیهی $a \in A^x$ ($a \in C^x$ یا $a \in B^x$) داریم $C_G(a) = A^x$ ($C_G(a) = C^x$ یا $C_G(a) = B^x$) . حال می توان نوشت

$$Cent_t(G) = \left\{C_G(a) \middle| o(a) = t^i (i \in \mathbb{N})\right\}$$

$$= \{A^x | o(a) = t^i, a \in A^x (x \in G)\}$$

برای هر $a \in A^x$ که $o(a) = r^i$ چون s ، $|A^x|$ را عاد می کند پس طبق قضیه کوشی عضوی چون $b \in A^x$ وجود دارد که $o(b) = s$. یعنی

$$\left\{A^x \middle| o(a) = t^i, a \in A^x\right\} = \{A^x | o(a) = s^i, a \in A^x\}$$

در نتیجه$Cent_t(G) = Cent_s(G)$ و مرتبه آن ها برابر است با $m = \frac{q^2(q^2+1)}{2}$.

(۲) و (۳) :

با استدلال مشابه قسمت (۱) حکم به دست می آید.

(۴) :

ابتدا مشاهده می کنیم اگر $x \in G$ ، $a, b \in F^x$ ، $C_G(a) \cap F^x = C_G(b) \cap F^x$ و $t \in C_G(a)$ آنگاه بنابر (۱)، $C_G(b) \leq F^x$ پس داریم

$$t \in C_G(a) \cap F^x = C_G(b) \cap F^x \subseteq C_G(b)$$

پس $C_G(a) \subseteq C_G(b)$ به راحتی می توان نتیجه گرفت

$$C_G(a) \cap F^x = C_G(b) \cap F^x \Leftrightarrow C_G(a) = C_G(b) \tag{۵}$$

حال می توان نوشت

$$Cent_2(G) = \{C_G(a) \big| o(a) = 2^i \ (i \in \mathbb{N})\}$$
$$= \{C_G(a) | a \in F^x \ (x \in G)\}$$
$$= \bigcup_{x \in G} \{C_G(a) | a \in F^x \}$$

بنا به (۲) داریم

$$|Cent_2(G)| = |\bigcup_{x \in G} \{C_G(a) \cap F^x | a \in F^x \}|$$
$$= |\bigcup_{x \in G} \{C_G(a) | a \in F^x \}|$$
$$= |\bigcup_{x \in G} Cent(F^x)|$$

و با مشاهده اثبات قضیه 2.1 از مرجع [۱۴] می توان دید

$$|Cent_2(G)| = q(q^2 + 1)$$

گزاره 7.2. فرض کنید $G = PSL(3,3)$. در این صورت داریم $|Cent_2(G)| = 468$ ، $|Cent_3(G)| = 156$ ، $|Cent_{13}(G)| = 144$ و $|Cent(G)| = 1237$

به خصوص داریم

$$2|Cent_2(G)| + |Cent_3(G)| + |Cent_{13}(G)| = |Cent(G)| - 1$$

اثبات. با استفاده از GAP [۱۱] به دست می آید.

نتیجه8.2. فرض کنید G یک گروه ساده مینیمال باشد. دراین صورت p_i هایی عضو $\pi(G)\backslash\{2\}$ به ازای $i \in \mathbb{N}$ و همچنین $a \in \{1,2\}$ وجود دارند به طوری که

$$a|Cent_2(G)| + \sum_{p_i} |Cent_{p_i}(G)| = |Cent(G)| - 1$$

اثبات. با توجه به قضیه های 3.2، 5.2 و 6.2 و گزاره 7.2 حکم به دست می آید.

حال پرسشی که مطرح می شود این است که در گروه هایی به جز گروه های ساده مینیمال رابطه ای میان $Cent(G)$ و $Cent_p(G)$ ها ، مشابه آنچه برای گروه های ساده مینیمال به دست آوردیم وجود دارد یا خیر .

References

1. A. Abdollahi, S. Akbari, and H. R. Maimani, Non-commuting graph of a group, J. Algebera ۲۹۸(۲۰۰۶), .۴۶۸-۴۹۲

2. A. R. Ashrafi, Counting the centralizers of some finite groups, Korean J. Comput. Appl. Math. ۷(۲۰۰۰), ۱۱۵–.۱۲۴

3. A. R. Ashrafi,On Finite Groups with a Given Number of Centralizers , Algebra Colloquium ۷:۲(۲۰۰۰) ۱۳۹-۱۴۶

4. S.M. Belcastro and G. J. Sherman, Counting centralizers in finite groups, Math. Mag. ۵ (۱۹۹۴), .۱۱۱-۱۱۴

5. B. Huppert, Endliche Gruppen I, Springer-Verlag, Berlin-New York, .۱۹۶۷

6. B. Huppert and N. Blackburn, Finite groups, III, Springer-Verlag, Berlin, .۱۹۸۲

7. S.M. Jafarian Amiri and H. Rostami, Groups with a few nonabelian centralizers, Publ. Math. Debrecen ۳-۴/۸۷(۲۰۱۵), .۴۲۹-۴۳۷

8. S.M. Jafarian Amiri, M. Amiri and H. Rostami, Finite groups determined by the number of element centralizers, Comm. Algebra. ۴۵(۲۰۱۷), .۳۷۹۲-۳۷۹۷

9. W. P. Kappe, Die A-Norm einer Gruppe, Illinois J. Math. ۵(۱۹۶۱), ۱۸۷–.۱۹۷

10. K. Khoramshahi, M. Zarrin ,Groups with the same number of centralizers, J. Algebra Appl,

11. The GAP Group, GAP-Groups, Algorithms, and Programming, Version ۴/۴; ۲۰۰۵, (http://www.gap-system.org).

12. J. G. Thompson, Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable (Part I), Bull. Amer. Math. Soc. (NS) ۷۴(۱۹۶۸) ۳۸۳–.۴۳۷

13. G. Traustason, Engel Groups, Department of Mathematical Sciences, University of Bath, Bath BA۷ ۲AY,UK

14. M. Zarrin, On element centralizers in finite groups, Arch. Math. ۹۳(۲۰۰۹), .۴۹۷-۵۰۳

15. M. Zarrin, Derived length and centralizers of groups, J. Algebra Appl. ۱۴(۲۰۱۵), ۱۵۵۰۱۳۳ [۴pages].

16. M. Zarrin, On noncommuting sets and centralizers in infinite groups, Bull. Aust. Math. Soc. ۹۳(۲۰۱۶) no. ۱, .۴۲-۴۶

17. M. Zarrin, Criteria for the solubility of finite groups by its centralizers, Arch. Math. ۹۶ (۲۰۱۱), .۲۲۵-۲۲۶