Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Induced poly-Norden Manifolds of Almost Contact Structure

M. Tofighi[1], M. B. Kazemi Balgeshir[2] ✉, Majid Heydarpour[3]

1. Department of Mathematics, University of Zanjan, Zanjan, Iran. E-mail: masomeh.tofighi@znu.ac.ir

2. Corresponding Author, Department of Mathematics, University of Zanjan, Zanjan, Iran. ✉ E-mail: mbkazemi@znu.ac.ir

3. Department of Mathematics, University of Zanjan, Zanjan, Iran. E-mail: Heydarpour@znu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
2 February 2022
Received in revised form:
25 November 2024
Accepted:
28 November 2024
Published online:
4 October 2025

Keywords:
Poly-Norden Manifold,
Manifold with almost
Contact structure,
Integrability.

ABSTRACT

Introduction

This paper explores the interplay between almost contact metric structures and poly-Norden structures on Riemannian manifolds. By leveraging an almost contact metric structure, we derive an induced poly-Norden structure and vice versa. The study focuses on the integrability conditions of these induced structures and their geometric properties, supported by non-trivial examples.

The almost contact metric structure, a well-studied framework on odd-dimensional Riemannian manifolds, includes important subclasses such as cosymplectic, Sasakian, and Kenmotsu manifolds. These structures have significant applications in physics, particularly in cosmology, relativity, and gravity. On the other hand, poly-Norden manifolds, introduced as a generalization of almost complex and almost contact structures, are defined by a (1,1)-tensor field $\boldsymbol{P}$ satisfying $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{mP} - \boldsymbol{I}$, where m is a real constant.

Our main results include:

Induced Structures
We demonstrate that every almost contact metric structure (φ, ξ, η, g) on a Riemannian manifold $\boldsymbol{M}$ induces two unique poly-Norden structures P_1 and P_2, given by:

$$P_1 = qI + (2q^* - m)\eta \otimes \xi \quad , \quad P_2 = q^* I + (2q - m)\eta \otimes \xi,$$

where q and q^* are roots of the polynomial $x^2 - mx + 1 = 0$.

Integrability Conditions
We establish that the integrability of the induced poly-Norden structure $\boldsymbol{P}$ is equivalent to the closedness of the 1-form η. Specifically, $\boldsymbol{P}$ is integrable if and only if $d\eta = 0$.

Parallelism
For the Levi-Civita connection ∇, we show that $\nabla_X \xi = 0$ holds if and only if $\nabla_X P = 0$, indicating a parallelism condition for the induced structure.

Examples

Non-trivial examples are provided to illustrate the theoretical results, including a Euclidean space equipped with a specific poly-Norden structure and a 3-dimensional almost contact metric manifold.

Dimensional Case

In the 3-dimensional setting, we prove that a poly-Norden manifold (M, P, g) with an eigenvector ξ of P induces an almost contact metric structure (φ, ξ, η, g), where φ is constructed using the eigenbasis of P.

The paper concludes by highlighting the significance of these findings in bridging the gap between almost contact metric and poly-Norden geometries, offering new insights into their mutual relationships and potential applications in differential geometry and mathematical physics.

How to cite: Tofighi, Masoumeh., Kazemi, Mohammad Bagher., & Heydar pour, Majid. (2025). Induced Poly-Norden Manifolds of Almost Contacr structure. *Mathematical Researches*, **11** (1), 85 – 98.

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

منیفلدهای پلی-نردن القایی از ساختار تقریبا سایا

معصومه توفیقی[۱]، محمدباقر کاظمی[۲] ✉، مجیدحیدرپور[۳]

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران. رایانامه: masomeh.tofighi@znu.ac.ir
۲. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران. رایانامه: mbkazemi@znu.ac.ir
۳. گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران. رایانامه: Heydarpour@znu.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۱۳
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۹/۰۵
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۹/۸
تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۷/۱۲

چکیده

در این مقاله با استفاده از ساختار تقریبا سایا، یک ساختار القایی پلی-نردن را به دست می‌آوریم. همچنین به عکس با کمک ساختار پلی-نردن یک ساختار تقریبا سایا بر روی منیفلد القا می‌نماییم. سپس شرایط انتگرال‌پذیری و موازی بودن این ساختارهای القایی را بررسی می‌کنیم و مثال هایی را از این منیفلدها ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی:
منیفلد پلی-نردن،
منیفلد با متریک تقریبا سایا،
انتگرال‌پذیری.

استناد: توفیقی، معصومه؛ کاظمی، محمدباقر؛ و حیدرپور، مجید (۱۴۰۴). منیفلدهای پلی-نردن القایی از ساختار تقریبا سایا. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۱** (۱)، ۸۵ – ۹۸.

مقدمه

یکی از ساختارهای مهمی که بر روی یک منیفلد ریمانی با بعد فرد، مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است، ساختار تقریبا سایاست. منیفلدهای دو-همتافته[۱]، ساساکی[۲] و کن‌موتسو[۳] سه دسته بسیار شناخته شده و مهم در بین منیفلدهای تقریبا سایا هستند [۶]. اغلب این ساختارها کاربردهای زیادی در علوم مختلف به ویژه در فیزیک و در زمینه‌های کیهان شناسی، نظریه نسبیت و گرانش دارند [۲،۳،۱۳]. از جمله، تحت شرایط خاصی این منیفلدها مجهز به متریک انیشتینی هستند که دارای اهمیت به سزایی در هندسه و فیزیک است[۱،۹]. در این میان می‌توان به مطالعات الزاک [10] اشاره کرد که شرط لازم و کافی برای نرمال بودن ساختار با متریک تقریبا سایا را بررسی می‌کند. هم‌چنین در مرجع [8] با مطالعه‌ی مشتق کوواریان و ۲-فرمی اساسی روی منیفلدهای با متریک تقریبا سایا دسته‌بندی کاملی از این منیفلدها به‌دست آمده است.

از طرفی دیگر، تعمیم‌های دیگری از منیفلدهای f-ساختار و تقریبا سایا نیز در سال‌های اخیر در کتاب ها و مقالات معرفی و بررسی شده است که از بین آن‌ها می‌توان به منیفلدهای طلایی[۴] و پلی نردن اشاره کرد [۴،۵]. فرض کنید q ریشه مثبت معادله‌ی چند جمله‌ای $x^2 - mx + 1 = 0$ است، یعنی به عبارتی داریم $q = \frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}$. ریشه منفی این معادله را با q^* نشان می‌دهیم که در تساوی مزدوج گونه‌ای به فرم $q^* = \frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2} = 1 - q$ صدق می‌کند [۱۲]. منیفلدهای پلی-نردن به‌عنوان نوع جدیدی از منیفلدها که در آن (۱،۱) میدان تانسوری P در چندجمله‌ای فوق صدق می‌کند، معرفی شده‌اند و خواص این نوع از منیفلدها مورد مطالعه قرار گرفته است. ملاحظه می‌شود که به ازای mهای مختلف، این ساختار تعمیمی از ساختارهای، تقریبا مختلط، تقریبا سایا و f-ساختار است. در مرجع [11] نیز زیرمنیفلدهایی از این نوع منیفلدها بررسی شده است. با توجه به جدید بودن منیفلدهای پلی-نردن و ارتباطی که با منیفلدهای تقریبا سایا دارند، ما دراین مقاله برآنیم که خواص هندسی بیشتری از آن‌ها را بررسی نموده و از هریک از این نوع منیفلدها دیگری را القا نموده و ساختار آن را به دست آوریم.

۱. ساختارهای پلی-نردن و تقریبا سایا متریک

تعریف۱،۱. [12] فرض کنید (M, g) منیفلدی ریمانی است. یک ساختار پلی-نردن روی منیفلد (M, g) میدان تانسوری P از نوع (۱،۱) است که در تساوی زیر صدق می‌کند

[1] Cosymplectic manifold
[2] Sasakian
[3] Kenmotsu
[4] Golden manifold

$$P^2 = mP - I, \quad (1.1)$$

که در آن I عملگر همانی است. دراین‌صورت (M, P) منیفلد پلی-نردن نامیده می‌شود. اگر برای هر $X, Y \in \Gamma(TM)$ تساوی زیر برقرار باشد

$$g(P X, P Y) = mg(P X, Y) - g(X, Y),$$

متر ریمانی g را P-سازگار می‌نامیم. با قرار دادن PX به جای X در تساوی اخیر داریم $g(PX, Y) = g(X, PY)$.

تعریف ۱٫۲. [12] ساختار پلی-نردن P را انتگرال‌پذیر می‌نامیم هرگاه تانسور نیجنهیوس آن صفر باشد، یعنی

$$N_P(X, Y) = P^2[X, Y] + [PX, PY] - P[PX, Y] - P[X, Y] = 0.$$

انتگرال‌پذیری ساختار پلی-نردن P با $\nabla P = 0$ هم ارز است که در آن ∇ التصاق لوی-چویتا روی (M, g) است.

مثال ۱٫۳. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^{2n}$ را با نگاشت $P: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود را در نظر بگیرید.

$$P(x_1, \dots x_n, y_1, \dots, y_n) = (qx_1, \dots, qx_n, q^* y_1, \dots, q^* y_n)$$

در این صورت $(\mathbb{R}^{2n}, P)$ یک منیفلد پلی-نردن است.

تعریف ۱٫۴. [6] منیفلد ریمانی فرد بعدی (M, g) را منیفلد با متریک تقریبا سایا می‌نامیم، اگر بر روی این منیفلد (۱،۱)-تانسور φ، میدان برداری ξ و 1-فرمی η وجود داشته باشد به طوری که

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \; g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad \eta(\xi) = 1$$

همچنین روی هر منیفلد با متریک تقریبا سایا تساوی های زیر برقرار است

$$\varphi\xi = 0, \quad \eta o \varphi = 0.$$

۲-فرمی اساسی Φ روی منیفلد با متریک تقریبا سایا M به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y).$$

ساختار با متریک تقریبا سایای (φ, ξ, η, g) نرمال نامیده می‌شود هرگاه برای هر $X, Y \in \Gamma(M)$ داشته باشیم

$$N(X, Y) = [\varphi, \varphi](X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi = 0,$$

که در آن $[\varphi, \varphi]$ تانسور نیجنهیوس از φ است.

مثال ۱٫۵. فضای اقلیدسی E^3 را با متر زیر در نظر بگیرید

$$g = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+r^2 & 0 & -r \\ 0 & 1 & 0 \\ -r & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

که در آن r یک تابع روی E^3 است. ساختار با متریک تقریبا سایا (φ, ξ, η) را روی E^3 به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \end{pmatrix} \ , \ \eta = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}r & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad , \ \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

با محاسبه ای مستقیم نتیجه می‌گیریم که $(E^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ یک منیفلد با متریک تقریبا سایا است.

تعریف۱،۶. [5] ساختار با متریک تقریبا سایا (φ, ξ, η, g) روی منیفلد M

الف) ساساکی نامیده می‌شود اگر $\Phi = d\eta$ و ساختار (φ, ξ, η) نرمال باشد.

ب) دوهمتافته نامیده می‌شود اگر $\nabla\Phi = d\eta = 0$ و ساختار (φ, ξ, η) نرمال باشد.

پ) کن‌موتسو نامیده می‌شود اگر $d\Phi = 2\eta\wedge\Phi$ و $d\eta = 0$ و ساختار (φ, ξ, η) نرمال باشد.

برای اطلاعات بیشتر درباره‌ی منیفلدهای با متریک تقریبا سایا منابع [6,7] مفید هستند.

۲. منیفلدهای پلی-نردن سایای القایی از ساختار با متریک تقریبا سایا

قضیه ۲،۱. هر ساختار با متریک تقریبا سایا (φ, ξ, η, g) روی منیفلد ریمانی M، دو ساختار پلی-نردن به‌صورت زیر القا می‌کند که این دو ساختار یکتا هستند.

$$P_1 = qI + (2q^* - m)\eta\otimes\xi, \quad P_۲ = q^*I + (2q - m)\eta\otimes\xi. \qquad (1.2)$$

برهان. فرض کنید (φ, ξ, η, g) ساختاری با متریک تقریبا سایا روی منیفلد ریمانی M است. ساختار تقریبا پلی-نردن P روی منیفلد (M, g) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$P = aI + b\eta \otimes \xi,$$

که در آن a, b اعداد حقیقی ناصفر هستند. بنابراین

$$P^2 = a^2I + b(2a + b)\eta\otimes\xi,$$

حال با توجه به تساوی (۱،۱) داریم

$$P^2 = (ma - 1)I + mb\eta\otimes\xi$$

با برابر قرار دادن دو عبارت اخیر تساوی های رابطه‌ی (۱،۲) به‌دست می‌آید. از طرفی برای هر $X, Y \in \Gamma(TM)$ داریم $g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y)$ اگرتنها اگر $g(PX, Y) = g(X, PY)$.

حال فرض کنید B ساختار تقریبا پلی-نردن دیگری باشد که به وسیله‌ی ساختار با متریک تقریبا سایا (φ, ξ, η, g) روی منیفلد M القا می‌شود، پس خواهیم داشت

$$B^2 = mB - I, \quad B\xi = q\xi, \quad B\xi = q^*\xi,$$

برای $i \in \{1,2\}$ داریم $BP_i = P_iB$ زیرا اگر B به صورت $B = tI + s\eta \otimes \xi$ باشد که در آن t, s اعدادحقیقی ناصفر هستند، در این صورت برای هر $X \in \Gamma(TM)$ خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} BP_iX &= B(aX + b\eta(X)\xi) \\ &= atX + \big(as + b(t + s)\big)\eta(X)\xi \\ &= P_i(tX + s\eta(X)\xi) = P_iBX, \end{aligned}$$

از طرفی دیگر برای $i \in \{1,2\}$ داریم

$$B^2 - P^2 = m(B - P_i) = (B - P)(B + P),$$

در نتیجه داریم $B = mI - P_i$ یا $B = P$.

تعریف۲،۲. فرض کنید $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ منیفلد با متریک تقریبا سایا است. هر یک از ساختارهای پلی-نردن

$$P_1 = qI + (2q^* - m)\eta \otimes \xi, \quad P_2 = q^*I + (2q - m)\eta \otimes \xi,$$

را ساختار پلی-نردن سایا و به ازای $i = 1,2$ منیفلد M با ساختار (φ, ξ, P_i, g) را منیفلد پلی-نردن سایا[1] می‌نامیم.

نتیجه۲،۳. بر روی منیفلد پلی-نردن تقریبا سایای $(M, \varphi, \xi, \eta, P_i, g)$، $i = 1,2$، داریم $P_1 + P_2 = mI$.

برهان. با توجه به تعریف ۲،۲ داریم

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= qI + (2q^* - m)\eta \otimes \xi + q^*I + (2q - m)\eta \otimes \xi \\ &= (q + q^*)I + (2q^* - m + 2q - m)\eta \otimes \xi \\ &= mI. \end{aligned}$$

از آن‌جایی که تمامی‌نتایج بدست آمده برای P_1, P_2 برقرار است پس کافیست تنها حالت $P = P_1$ را بررسی کنیم.

گزاره ۲،۴. فرض کنید (M, φ, ξ, P, g) یک منیفلد پلی-نردن سایا است. در این صورت تساوی زیر برای هر $X, Y \in \Gamma(M)$ برقرار است

$$\begin{aligned} N_P(X, Y) &= (m^2 - 4)(d\eta(\xi, Y)\eta(X) + d\eta(X, \xi)\eta(Y) - d\eta(X, Y))\xi \\ &= -(m^2 - 4)d\eta(\varphi^2X, \varphi^2Y)\xi. \end{aligned}$$

برهان. با استفاده ار تعریف تانسور نیجنهیوس و قضیه ۲،۱ داریم

[1] Contact poly-Norden manifold

$$
\begin{aligned}
N_P(X,Y) &= P^2[X,Y]+[PX,PY]-P[PX,Y]-P[X,PY]\\
&= mq\nabla_X Y - mq\nabla_Y X + m(2q^*-m)\eta[X,Y]\xi - \nabla_X Y + \nabla_Y X + q^2\nabla_X Y\\
&+ q(2q^*-m)X\eta(Y)\xi + q(2q^*-m)\eta(Y)\nabla_X\xi + (2q^*-m)\eta(X)q\nabla_\xi Y\\
&+ (2q^*-m)^2\eta(X)\xi\eta(Y)\xi\\
&+(2q^*-m)^2\eta(X)\eta(Y)\nabla_\xi\xi - q^2\nabla_Y X\\
&- q(2q^*-m)Y\eta(X)\xi\\
&-q(2q^*-m)\eta(X)\nabla_Y\xi - (2q^*-m)\eta(Y)q\nabla_\xi X\\
&- (2q^*-m)^2\eta(Y)\xi\eta(X)\xi\\
&-(2q^*-m)^2\eta(X)\eta(Y)\nabla_\xi\xi - q^2\nabla_X Y - q(2q^*-m)\eta(\nabla_X Y)\xi\\
&-q(2q^*-m)\eta(X)\nabla_\xi Y - (2q^*-m)^2\eta(X)\eta\big(\nabla_\xi Y\big)\xi + q^2\nabla_Y X\\
&+(2q^*-m)q\eta(\nabla_Y X)\xi\\
&+(2q^*-m)Y\eta(X)q\xi + (2q^*-m)^2 Y\eta(X)\xi + (2q^*-m)\eta(X)q\nabla_Y\xi\\
&+(2q^*-m)^2\eta(X)\eta(\nabla_Y\xi)\xi - q^2\nabla_X Y - (2q^*-m)q\eta(\nabla_X Y)\xi\\
&-q(2q^*-m)X\eta(Y)\xi\\
&-(2q^*-m)^2X\eta(Y)\xi - q(2q^*-m)\eta(Y)\nabla_X\xi\\
&- (2q^*-m)^2\eta(Y)\eta(\nabla_X\xi)\xi + q^2\nabla_Y X + q(2q^*-m)\eta(\nabla_Y X)\xi\\
&+ q(2q^*-m)\eta(Y)\nabla_\xi X + (2q^*-m)^2\eta(Y)\eta\big(\nabla_\xi X\big)\xi\\
&= (2q^*-m)(m-2q)\eta[X,Y]\xi + (2q^*-m)^2\eta(X)\xi\eta(Y)\xi\\
&- (2q^*-m)^2\eta(Y)\xi\eta(X)\xi - (2q^*-m)^2\eta(X)\eta[\xi,Y]\xi\\
&+ (2q^*-m)^2Y\eta(X)\xi - (2q^*-m)^2X\eta(Y)\xi\\
&- (2q^*-m)^2\eta(Y)\eta[X,\xi]\xi\\
&= (2q^*-m)^2(\xi\eta(Y)-\eta[\xi,Y])\eta(X)\xi\\
&+(2q^*-m)^2(-\xi\eta(X)-\eta[X,\xi])\eta(Y)\xi\\
&-(2q^*-m)^2(X\eta(Y)-Y\eta(X)-\eta[X,Y])\eta(X)\xi\\
&= (m^2-4)\big(d\eta(\xi,Y)\eta(X)+d\eta(X,\xi)\eta(Y)-d\eta(X,Y)\big)\xi
\end{aligned}
$$

حال به اثبات تساوی دوم می‌پردازیم

$$
\begin{aligned}
-(m^2-4)d\eta(\varphi^2X,\varphi^2Y)\xi &= -(m^2-4)d\eta(-X+\ \eta(X)\xi,-Y+\eta(Y)\xi)\xi\\
&= -(m^2-4)\big(d\eta(X,Y)-d\eta(X,\xi)\eta(Y)-d\eta(\xi,Y)\eta(X)\\
&+ d\eta(\xi,\xi)\eta(X)\eta(Y)\big)\xi\\
&= (m^2-4)\big(-d\eta(X,Y)+d\eta(X,\xi)\eta(Y)+d\eta(\xi,Y)\eta(X)\big)\xi.
\end{aligned}
$$

گزاره ۲،۵. فرض کنید (M,φ,ξ,P,g) یک منیفلد پلی-نردن سایا است. در این صورت P انتگرال‌پذیر است هرگاه η بسته باشد.

برهان. با توجه به گزاره ۲،۴ حکم برقرار است.

نتیجه ۲,۶. اگر (M,φ,ξ,η,g) یک منیفلد تقریبا دو-هم تافته یا تقریبا کن-موتسو باشد. در این صورت (M,φ,ξ,η,g) منیفلد پلی-نردن سایای انتگرال‌پذیر است.

برهان. با توجه به تعریف ۱,۶و گزاره ۲,۴ حکم برقرار است.

لم ۲,۷. فرض کنید $(M,\varphi,\xi,P,g$ (یک منیفلد پلی-نردن سایا است. در این صورت رابطه‌ی زیر برقرار است

$$\varphi P = P\varphi = q\varphi.$$

برهان. با توجه به تعریف ۲,۲ برای هر $X \in \Gamma(TM)$ داریم

$$\varphi PX = \varphi(qX + (2q^* - m)\eta(X)\xi) = q\varphi X + (2q^* - m)\square(X)\varphi\xi = q\varphi X,$$

قسمت دوم تساوی نیز با توجه به تعریف ۲,۲ برقرار است.

$$P\varphi X = q\varphi X + (2q^* - m)\eta(\varphi X)\xi = q\varphi\xi.$$

گزاره ۲,۸. فرض کنید(M,ϕ,ξ,P,g) یک منیفلد پلی-نردن تقریبا سایا است. اگر ∇ التصاق لوی-چویتا روی M باشد، در این صورت برای هر $X,Y \in \Gamma(M)$ داریم

$$(\nabla_X P)Y = (2q^* - m)(g(Y,\nabla_X\xi) + \eta(Y)\nabla_X\xi).$$

برهان. با استفاده از رابطه‌های ۱,۲ داریم

$$\begin{aligned}(\nabla_X P)Y &= \nabla_X PY - P\nabla_X Y\\ &= q\nabla_X Y + (2q^* - m)(X\eta(Y)\xi + \eta(Y)\nabla_X\xi) - q\nabla_X Y\\ &\quad - (2q^* - m)\eta(\nabla_X Y)\xi\\ &= (2q^* - m)\big(\big(g(\nabla_X Y,\xi) + g(Y,\nabla_X\xi)\big)\xi + \eta(Y)\nabla_X\xi\\ &\quad - (2q^* - m)g(\nabla_X Y,\xi)\xi\\ &= (2q^* - m)(g(Y,\nabla_X\xi) + \eta(Y)\nabla_X\xi).\end{aligned}$$

قضیه ۲,۹. فرض کنید (M,φ,ξ,η,P,g) یک منیفلد پلی-نردن تقریبا سایا است. دراین‌صورت برای $X,Y \in \Gamma(M)$ و التصاق لوی-چویتای ∇، $\nabla_X\xi = 0$ اگروتنها اگر $(\nabla_X P)Y = 0$.

برهان. فرض کنید برای هر $X,Y \in \Gamma(TM)$ داشته باشیم $(\nabla_X P)Y = 0$، دراین‌صورت با توجه به گزاره ۲,۸ داریم

$$g(Y,\nabla_X\xi) + \eta(Y)\nabla_X\xi = 0,$$

حال در تساوی فوق قرار می‌دهیم $Y := \xi$ دراین‌صورت داریم

$$g(\xi,\nabla_X\xi) + \eta(\xi)\nabla_X\xi = 0,$$
$$\nabla_X\xi = 0,$$

حال به عکس فرض کنید $\nabla_X\xi = 0$ ، دراین‌صورت با توجه به گزاره ۲,۸ حکم برقرار است.

مثال ۲,۱۰. مثال ۱,۵ را در نظر بگیرید. با استفاده از قضیه ۲,۱ داریم

$$P_1=\begin{pmatrix} q & 0 & 0\\ 0 & q & 0\\ -r(2q^*-m) & 0 & q^*\end{pmatrix} \quad , \quad P_2=\begin{pmatrix} q^* & 0 & 0\\ 0 & q^* & 0\\ -r(2q-m) & 0 & q\end{pmatrix},$$

واضح است که برای $i=1,2$ داریم $P_i{}^2=mP_i-I$.

با توجه به تعریف ۱-فرمی η، برای کارت مختصاتی $(U,(x_i))$ داریم

$$\eta=-\frac{1}{2}rdx_1+\frac{1}{2}dx_3 \quad , \quad d\eta=r_2dx_2\wedge dx_1+r_3dx_3\wedge dx_1,$$

که در آن $r_i=\frac{\partial r}{\partial x_i}$. با محاسبه‌ای مستقیم، مقادیر زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_1}}\xi=\begin{pmatrix} rr_3\\ \frac{1}{2}r_2\\ r^2r_3\end{pmatrix} \quad , \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_2}}\xi=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}r_2\\ 0\\ -\frac{1}{2}rr_2\end{pmatrix} \quad , \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_3}}\xi=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}r_3\\ 0\\ -rr_3\end{pmatrix},$$

حال با توجه به مقادیر به‌دست آمده، نتیجه می‌گیریم که اگر $r_2=r_3=0$، دراین‌صورت $d\eta=0$ و $\nabla_X\xi=0$، این رابطه به این معناست که P انتگرال‌پذیر و موازی است.

۳. منیفلدهای پلی-نردن سایا القایی از ساختار پلی-نردن ۳ بعدی

فرض کنید (M,P,g) منیفلد پلی-نردن ۳ بعدی و ξ بردار ویژه‌ی یکه P وابسته به مقدار ویژه‌ی q^* (یا q) باشد یعنی $P\xi=q^*\xi$ (یا $P\xi=q\xi$) و ۱-فرمی η را برای هر $X,Y\in\Gamma(TM)$ به‌صورت $\eta(X)=g(X,\xi)$ در نظر می‌گیریم به طوری که $\eta(\xi)=1$ از آن‌جایی که دو عبارت فوق معادل هم هستند، می‌توانیم یکی از این حالت ها را بررسی کنیم. در اینجا تنها حالت $P\xi=q^*\xi$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید μ_1 و μ_2 بردارهای ویژه‌ی P وابسته به مقدار ویژه‌ی q هستند که به بردار یکه تبدیل شده اند. ۱-فرمی‌های ω_i، $i\in\{1,2\}$ را برای هر $X\in\Gamma(TM)$ به صورت $\omega_i(X)=g(X,\mu_i)$ تعریف می‌کنیم بنابراین $\omega_i(\mu_i)=1$. با توجه به توضیحات فوق گزاره زیر برقرار است.

گزاره ۳٫۱. فرض کنید (M,P,g) یک منیفلد تقریبا پلی-نردن است، و بردارهای $\{\xi,\mu_1,\mu_2\}$ بردارهای معرفی شده در بالاست. دراین‌صورت $\{\xi,\mu_1,\mu_2\}$ پایه‌ای یکامتعامد روی M است.

قضیه ۳٫۲. فرض کنید (M,P,g) یک منیفلد تقریبا پلی-نردن است. دراین‌صورت یک ساختار با متریک تقریبا سایا (φ,ξ,η,g) روی M القا می‌شود که در آن $\varphi=\mu_2\wedge_g\mu_1$ به‌طوری‌که برای هر $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$

$$(X\wedge_g Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y.$$

برهان. نشان می‌دهیم که φ با تعریف فوق در تعریف ۱٫۴ صدق می‌کند.

از آن‌جایی که $\{\xi, \mu_1, \mu_2\}$ بردارهای پایه هستند پس برای هر $X \in \Gamma(TM)$ داریم

$$X = \eta(X)\xi + \omega_1(X)\mu_1 + \omega_2(X)\mu_2,$$

لذا داریم

الف) $\varphi^2 = I + \eta \otimes \xi$ زیرا

$$\begin{aligned}\varphi^2 X &= \varphi\left(\left(\mu_2\wedge_g\mu_1\right)X\right) = \varphi(g(\mu_1,X)\mu_2 - g(\mu_2,X)\mu_1)\\ &= \omega_1(X)\varphi(\mu_2) - \omega_2(X)\varphi(\mu_1)\\ &= \omega_1(X)\left(\mu_2\wedge_g\mu_1(\mu_2)\right) - \omega_2(X)\left(\mu_2\wedge_g\mu_1(\mu_1)\right)\\ &= \omega_1(X)(g(\mu_1,\mu_2)\mu_2 - g(\mu_2,\mu_2)\mu_1\\ &-\omega_2(X)(g(\mu_1,\mu_1)\mu_2 - g(\mu_2,\mu_1)\mu_1\\ &= -\omega_1(X)\mu_1 - \omega_2(X)\mu_2\\ &= -X + \eta(X)\xi.\end{aligned}$$

ب) $\eta(\xi) = 1$ و $\varphi\xi = 0$

$$\xi = \eta(\xi)\xi + \omega_1(\xi)\mu_1 + \omega_2(\xi)\mu_2 = \eta(\xi)\xi,$$

در نتیجه $\eta(\xi) = 1$.

$$\varphi\xi = \left(\mu_۲\wedge_g\mu_۱\right)\xi = g(\mu_۱,\xi)\mu_۲ - g(\mu_۲,\xi)\mu_۱ = \omega_۱(\xi)\mu_۲ - \omega_۱(\xi)\mu_۱ = 0.$$

پ)حال نشان می‌دهیم $\eta\ o\ \varphi\ = 0$

$$\begin{aligned}\varphi X &= \eta(X)\varphi\xi + \omega_1(X)\varphi\mu_1 + \omega_۲(X)\varphi\mu_۲\\ &= \omega_۱(X)(g(\mu_۱\ ,\mu_۱)\mu_۲ - g(\mu_۲\ ,\mu_۱)\mu_۱ + \omega_۲(X)(g(\mu_۱\ ,\mu_۲)\mu_۲ - g(\mu_۲\ ,\mu_۲)\mu_۱\\ &= \omega_۱(X)\mu_۲ - \omega_۲(X)\mu_۱.\end{aligned}$$

حال با توجه به تساوی فوق داریم

$$\begin{aligned}\eta(\square X) &= \omega_۱(X)\eta(\mu_۲) - \omega_۲(X)\eta(\mu_۱)\\ &= \omega_۱(X)g(\mu_۲,\xi)\ - \omega_۲(X)g(\mu_۱,\xi) = 0.\end{aligned}$$

ت) در پایان با توجه به تساوی $\varphi X = \omega_۱(X)\mu_۲ - \omega_۲(X)\mu_۱$، نشان می‌دهیم $g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$ برقرار است.

$$\begin{aligned}g(\varphi X, \varphi Y) &= g(\omega_1(X)\mu_2 - \omega_2(X)\mu_1, \omega_1(Y)\mu_2 - \omega_2(Y)\mu_1)\\ &= \omega_1(X)\omega_1(Y)g(\mu_2,\mu_2) + \omega_1(X)\omega_2(Y)g(\mu_2,\mu_1)\\ &-\omega_2(X)\omega_1(Y)g(\mu_1,\mu_2) + \omega_2(X)\omega_2(Y)g(\mu_1,\mu_1)\\ &= g(X,\mu_1)\omega_1(Y) + g(X,\mu_2)\omega_2(Y)\\ &= g(X,\omega_1(Y)\mu_1 + \omega_2(Y)\mu_2)\\ &= g(X, Y - \eta(Y)\xi)\\ &= g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y).\end{aligned}$$

ساختار (φ,ξ,η,g) القا شده‌ی فوق را نیز ساختار پلی-نردن با متریک تقریبا سایا می‌نامیم.

با توجه به تعریف ۲-فرمی اساسی Φ و (۱،۱)-تانسور φ در این بخش برای هر میدان برداری $X,Y\in\Gamma(TM)$ داریم

$$\begin{aligned}\Phi(X,Y)&=g(X,\omega_1(Y)\mu_2-\omega_2(Y)\mu_1)\\&=\omega_2(X)\omega_1(Y)-\omega_1(X)\omega_2(Y)\\&=\omega_2\wedge_g\omega_1(X,Y).\end{aligned}$$

تذکر ۳,۳. برای هر منیفلد با متریک تقریبا سایا ۳ بعدی تساوی $d\Phi=2d\eta\wedge\varphi$ برقرار است.

گزاره ۳,۴. [10] برای یک منیفلد با متریک تقریبا سایا ۳ بعدی M موارد زیر معادلند.

الف) ساختار با متریک تقریبا سایا (φ,ξ,η,g) نرمال است.

ب) $\nabla_{\varphi X}\xi=\varphi\nabla_X\xi$.

پ) $\nabla_X\,\xi=-\alpha\varphi^2\,X-\beta\varphi X$.

که در آن ∇ التصاق لوی-چویتا روی M است و $2\alpha=div\,\xi\,,2\beta=tr(\varphi\nabla\xi)$.

نتیجه ۳,۵. [10] برای یک منیفلد با متریک تقریبا سایا ۳ بعدی نرمال M تساوی‌های زیر برقرار است.

$$\nabla_\xi\xi=0\,,d\eta=\beta\Phi.$$

گزاره ۳,۶. منیفلد پلی-نردن با متریک سایا نرمال است اگر و تنها اگر

$$\nabla\xi=\alpha\sum_{i=1}^{2}\omega_i\otimes\mu_i+\beta\mu_1\wedge_g\mu_2.$$

برهان. با استفاده از گزاره ۳,۴ و تساوی $X=\eta(X)\xi+\omega_1(X)\mu_1+\omega_2(X)\mu_2$ برای هر $X\in\Gamma(TM)$، داریم

$$\begin{aligned}\nabla_X\xi&=-\alpha\varphi^2X-\beta\varphi X=-\alpha(-\omega_1(X)\mu_1-\omega_2(X)\mu_2)+\beta\big(\mu_1\wedge_g\mu_2\big)X\\&=\alpha\sum_{i=1}^{2}\omega_i(X)\mu_i+\beta\big(\mu_1\wedge_g\mu_2\big)X.\end{aligned}$$

قضیه ۳,۷. منیفلد پلی-نردن با متریک تقریبا سایا

الف) ساساکی است اگر و تنها اگر $\nabla\xi=\mu_1\wedge_g\mu_2$.

ب) دو-هم‌تافته است اگر و تنها اگر $\nabla\xi=0$.

پ) کن-موتسو است اگر و تنها اگر $\nabla\xi=\sum_{i=1}^{2}\omega_i\otimes\mu_i$.

برهان. با توجه به تعریف ۱,۶ منیفلد پلی-نردن با متریک تقریبا سایا ساساکی است اگر و تنها اگر

$$\Phi = d\eta\ , \quad \nabla\xi = \alpha\sum_{i=1}^{2}\omega_i\otimes\mu_i + \beta\mu_1\wedge_g\mu_2,$$

با توجه به تساوی سمت چپ $d\Phi = 0$ لذا با استفاده از تذکر ۳,۳ و نتیجه ۳,۵ به‌ترتیب به‌دست می‌آوریم $\alpha = 0$ و $\beta = 1$. در نتیجه با جایگذاری β و α در تساوی فوق داریم $\nabla\xi = \mu_1\wedge_g\mu_2$.

ب) منیفلد دو-هم تافته است اگر و تنها اگر

$$d\eta = d\Phi = 0 \quad , \quad \nabla\xi = \alpha\sum_{i=1}^{2}\omega_i\otimes\mu_i + \beta\mu_1\wedge_g\mu_2,$$

با استفاده از تذکر ۳,۳و نتیجه ۳,۵ به‌ترتیب به‌دست می‌آوریم $\alpha = \beta = 0$ و در نتیجه داریم $\nabla\xi = 0$.

پ) منیفلد پلی-نردن‌کن-موتسو است اگر و تنها اگر

$$d\eta = 0 \quad \text{و} \quad d\Phi = 2\eta\wedge\Phi \quad \text{و} \quad \nabla\xi = \alpha\textstyle\sum_{i=1}^{2}\omega_i\otimes\mu_i + \beta\mu_1\wedge_g\mu_2,$$

با استفاده از تذکر ۳,۳ و نتیجه ۳,۵ به ترتیب به دست می‌آوریم $\alpha = 1$ و $\beta = 0$ در نتیجه داریم $\nabla\xi = \sum_{i=1}^{2}\omega_i\otimes\mu_i$.

۴. نتیجه گیری

با توجه به اهمیت ساختارهای تقریبا سایا و انواع مختلف منیفلدهای شامل این دسته از ساختارها، از جمله منیفلدهای ساساکی، کن‌موتسو و دوهمتافته، در این مقاله به ارتباط این نوع منیفلدها با منیفلدهای جدیدی به نام منیفلدهای پلی-نردن پرداخته شد. به‌علاوه، با کمک یک دسته از این نوع منیفلدها، ساختاردسته‌ی دیگر به دست آمد و بالعکس. هم‌چنین با بیان مثال‌هایی غیر بدیهی سعی شد گزاره‌ها و نتایج به‌دست آمده روشن‌تر گردد.

References

1. Sh. Azami and M. Jafari, Ricci Bi-Conformal Vector Fields on Homogeneous Gödel-Type Spacetimes, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 30 (2023), 1700–1718.

2. Sh. Azami, M. Jafari , A. Haseeb and A. Ahmadini, Cross curvature Solitons of Lorentzian Three-Dimensional Lie Groups, Axioms, 13(4) (2024), 211, https://doi.org/10.3390/axioms13040211.

3. Sh. Azami and M. Jafari, Riemann Solitons on Relativistic Space-Times, Gravitation and Cosmology, 306 (2024), 306-311.

4. G. Beldjilali, *S*-Golden manifolds, Mediterr. J. Math., 16 (2019), 1-14.

5. G. Beldjilali, 3-dimensional Golden almost contact metric manifolds, Palestine J. Math., 9(1) (2020), 594–603.

6. D.E. Blair, Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, Progress in Mathematics Vol. 203, Birkhauser, Boston, 2010.

7. C.P. Boyer, K. Galicki, and B. M. Mann, Quaternionic reduction and Einstein manifold, Comm. Anal. Geom., 1(2) (1993), 229-279.

8. D. Chinea and C. Gonzalez, A classification of almost contact metric manifold, Annali di Matematica pura ed applicate (IV), Vol. CLVI (1990), 15-36.

9. M. Jafari, On 4-dimensional Einsteinian manifolds with parallel null distribution, Journal of Mathematics and Society, 8(3) (2023), 55-79.

10. M.B. Kazemi Balgeshir, S. Salahvarzi, On statistical submersions from 3-Sasakian statistical manifolds, Differ. Geom. Appl., 94 (2024), 102-124.

11. S.Y. Perktas, Submanifolds of almost poly-Norden Riemannian manifolds, Turk J. Math., 44 (2019), 1-19.

12. B. Sahin, Almost poly-Norden manifolds, Int. J. Maps Math., 4 (2018), 68–79.

13. A. Zaeima, M. Jafari and R. Kafimoosavia, On some curvature functionals over homogeneous Siklos spacetimes, Journal of Linear and Topological Algebra, 12(2) (2023), 105-112.