Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Depth of the Third Power of Edge Ideals of Graphs

S. Moradi

Department of Mathematics, Faculty of Science, Ilam University, Ilam, Iran. E-mail: so.moradi@ilam.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 10 January 2025
Received in revised form: 17 May 2025
Accepted: 24 May 2025
Published online: 4 October 2025

Keywords:
Edge ideal,
Depth,
Powers of an ideal.

ABSTRACT

Introduction

Let G be a finite simple graph with n vertices, and let $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ be the polynomial ring over a field K. The edge ideal of G is a squarefree monomial ideal of S defined as $I(G) = \left(x_i x_j \colon \{x_i, x_j\} \text{ is an edge of } G\right)$. Edge ideals, first introduced by Villarreal in [10], serve as a bridge between commutative algebra and combinatorics, allowing for algebraic properties of ideals to be explored using combinatorial tools. Since the introduction of this concept the study of these ideals has increasingly drawn the attention of researchers. The most significant aspect lies in correlating the algebraic properties and invariants of these ideals into combinatorial invariants of the underlying graph, and vice versa. In this context, investigating the behaviour of powers of these ideals and understanding their connection to the structure of the underlying graph is of particular importance and interest. One of such problems is exploring the behaviour of the depth function of the ideal. For a graded ideal I in the polynomial ring S over a field, the depth function of the ideal I is defined as $\mathrm{f(k)} = \mathrm{depth}(\frac{S}{I^k})$. The significance of this topic is rooted in a beautiful result by Brodmann [1], which states that the function f stabilizes. Identifying the final value of this function, as well as examining the behaviour of f for smaller values of k (i.e., the behaviour of the initial powers of the ideal) has been studied in numerous papers (see [2,3,4,6,7,8,9,10] and the reference therein). When I is the edge ideal of a graph G, the aim is to find properties of the graph G that correspond to properties of the depth function. Even in this case, the behaviour of the initial powers of the ideal can be complex. Herzog and Hibi [5] classified edge ideals of graphs whose second power has depth zero and showed that such a property for depth can be interpreted purely combinatorial. Specifically, they proved that the second power of the edge ideal of a graph G has depth zero if and only if G is a connected graph with a dominating induced cycle of length 3. In this paper, inspired by the work of Herzog and Hibi we study the third power of edge ideals of graphs and provide a combinatorial classification of edge ideals whose third powers have depth zero.

Material and Methods

To characterize the edge ideals $\mathrm{I(G)}$ with $\mathrm{depth}\left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{I(G)}^3}\right) = 0$ we need to classify graphs G for which the ring $\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{I(G)}^3}$ has a nonzero socle element. First, we show that the existence of some dominating induced subgraphs in G imply

the existence of nonzero socle elements in the ring $\frac{S}{I(G)^3}$. On the other hand, using the fact that a nonzero monomial which is a socle element of a power of a squarefree monomial ideal, has a bounded component vector we show that if the socle of $\frac{S}{I(G)^3}$ is nonzero, then G has dominating induced subgraphs of particular form.

Results and discussion

We give a characterization for the family of graphs whose edge ideals have third powers of depth zero. More precisely, for a finite simple graph G with the edge ideal $I(G)$, we show that the following conditions are equivalent.

1. $\mathrm{depth}(\frac{S}{I(G)^3}) = 0$.

2. G has a dominating induced subgraph H of one of the following forms

   - A cycle of length three.
   - A disjoint union of two cycles of length three.
   - H consists of two cycles of length three glued in one
   - A graph on five vertices with a cycle of length five.
   - A connected graph on four vertices which contains a cycle of length three.

This result in particular demonstrates that if the second power of the edge ideal of a graph has depth zero, then the third power also has depth zero.

Conclusion

A combinatorial description for the edge ideals $I(G)$ of finite simple graphs G with depth $\left(\frac{S}{I(G)^3}\right) = 0$ is presented.

How to cite: Moradi, Somayeh. (2025). Depth of the third power of edge ideals of graphs. *Mathematical Researches*, **11** (1), 72 – 84.

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۸۸-۲۵۴۶
شاپا الکترونیکی: ۲۵۸۸-۲۵۵۴

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

عمق توان سوم ایده‌آل یالی گراف‌ها

سمیه مرادی

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ایلام، ایران. رایانامه: so.moradi@ilam.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

چکیده

در این مقاله به مطالعه عمق توان سوم ایده‌آل یالی گراف‌ها می‌پردازیم. گراف‌هایی که عمق توان دوم ایده‌آل یالی آنها صفر است توسط هرزوگ و هیبی در [5] دسته‌بندی شده‌اند. در این مقاله به دسته‌بندی گراف‌هایی می‌پردازیم که عمق توان سوم ایده‌آل یالی آنها صفر است.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۰/۲۱
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۲/۲۷
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۳/۳
تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۷/۱۲

واژه‌های کلیدی:
ایده‌آل یالی گراف،
عمق،
توان‌های یک ایده‌آل.

استناد: مرادی، سمیه (۱۴۰۴). عمق توان سوم ایده‌آل یالی گراف‌ها. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۱** (۱)، ۷۲ – ۸۴.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

ایده‌آل یالی گراف‌ها ابزاری است که با ایجاد پلی بین جبر جابجایی و ترکیبیات مطالعه خواص جبری برخی ایده‌آل ها را از طریق ابزارهای ترکیبیاتی میسر می‌کند. پس از معرفی این مفهوم توسط ویلارئال در [10]، مطالعه این ایده‌آل‌ها به طور فزاینده‌ای توسط محققان شاخه جبر جابجایی ترکیبیاتی مورد توجه بوده است. مهم‌ترین جنبه در مطالعه این ایده‌آل‌ها مرتبط کردن یا به عبارت دیگر ترجمه خواص جبری و ناورداهای جبری این ایده‌آل‌ها مانند عمق، بعد تصویری و نظم کاستلنوو-مامفورد به ناورداهای ترکیبیاتی گراف زمینه و بالعکس است. در این زمینه مطالعه رفتار توان‌های این ایده‌آل‌ها و بررسی اینکه ناورداهای جبری ایده‌آل چگونه با افزایش توان تغییر می‌کنند و چگونه با ساختار گراف زمینه مرتبط هستند از اهمیت و توجه ویژه‌ای برخوردار است.

یکی از مهم‌ترین مسائل در این حوزه بررسی رفتار تابع عمق (که تابعی از توان ایده‌آل است) می‌باشد. در حالت کلی برای ایده‌آل همگن I از حلقه چندجمله‌ای‌های S روی یک میدان، تابع عمق ایده‌آل I به صورت $f(k) = depth(\frac{S}{I^k})$ تعریف می‌شود. اهمیت مطالعه این موضوع ریشه در نتیجه زیبایی از برادمن [1] دارد که نشان می‌دهد برای $k \gg 0$، تابع f دارای یک مقدار ثابت است. به عبارت دیگر اعداد صحیح k_0 و c وجود دارند به طوری که برای هر $k \geq k_0$ داریم $f(k) = c$. یافتن چنین اعداد k_0 و c و همچنین بررسی رفتار تابع f برای اعداد کمتر از k_0 یا همان رفتار توان‌های ابتدایی ایده‌آل در مقالات متعددی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در این زمینه به [2,3,4,6,7,8,9,10] مراجعه شود. زمانی که I ایده‌آل یالی گرافی مانند G است، یافتن خواصی از گراف G که متناظر با خواصی از تابع عمق باشند مدنظر است. حتی در چنین حالتی رفتار توان‌های ابتدایی ایده‌آل می‌تواند پیچیده باشد. در [5] هرزوگ و هیبی ایده‌آل یالی گراف‌هایی را که عمق توان دوم آنها صفر است دسته‌بندی کردند و نشان دادند که چنین ویژگی از عمق را می‌توان به صورت کاملا ترکیبیاتی تفسیر کرد. به بیان دقیق‌تر آنها نشان دادند که عمق توان دوم ایده‌آل یالی گراف G صفر است اگر و تنها اگر G گرافی همبند باشد و یک دور القایی احاطه‌گر به طول ۳ داشته باشد.

در این مقاله توان سوم ایده‌آل یالی گراف‌ها را مورد مطالعه قرار داده و یک دسته‌بندی ترکیبیاتی از ایده‌آل یالی گراف‌هایی که عمق توان سوم آنها صفر است ارائه می‌دهیم. در واقع نشان می‌دهیم چنین شرایطی معادل با وجود دسته‌هایی از زیرگراف‌های القایی احاطه‌گر در گراف G است. این مطلب به ویژه نشان می‌دهد که اگر عمق توان دوم ایده‌آل یالی گراف G صفر باشد، عمق توان سوم آن نیز صفر است.

۱. مفاهیم و پیش‌نیازها

در این بخش به بیان تعاریف، مفاهیم و نمادهایی می‌پردازیم که در ادامه مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در سراسر این مقاله G یک گراف ساده با مجموعه رأسی $V(G)$ و مجموعه یالی $E(G)$ است. بنابراین همه جا منظور از گراف، یک گراف ساده است. برای رأس $x \in V(G)$ همسایگی باز x در G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_G(x) = \{y \in V(G): \{x, y\} \in E(G)\}.$$

رأس x را یک رأس تنهای گراف G می‌نامیم هر گاه $N_G(x) = \emptyset$. همچنین رأس x را یک برگ از گراف G می‌نامیم هر گاه $|N_G(x)| = 1$. همسایگی بسته رأس x در G به صورت $N_G[x] = N_G(x) \cup \{x\}$ تعریف می‌شود. همچنین برای مجموعه $A \subseteq V(G)$، قرار می‌دهیم $N_G[A] = \bigcup_{x\in A} N_G[x]$.

برای مجموعه $A \subseteq V(G)$، زیرگراف القایی G روی مجموعه رأسی A که آن را با $G[A]$ نشان می‌دهیم، زیرگرافی از G است که مجموعه رأسی آن A است و دو رأس x و y در $G[A]$ مجاورند هر گاه در G مجاور باشند. زیرگراف القایی H از گراف G را یک زیرگراف القایی احاطه‌گر G می‌نامیم هر گاه هر رأس از گراف G به رأسی در گراف H متصل باشد، یا خود رأسی از H باشد. به عبارت دیگر زیرگراف القایی H زیرگراف القایی احاطه‌گر G است هر گاه $N_G[V(H)] = V(G)$.

گراف G یک گراف همبند نامیده می‌شود هر گاه بین هر دو رأس G یک مسیر وجود داشته باشد. در غیر این صورت G را ناهمبند گویند. همچنین بزرگترین زیرگراف‌های همبند G را مولفه‌های همبندی G می‌نامند. گراف G را یک گراف کامل می‌نامند هر گاه هر دو رأس G مجاور باشند. گراف کامل با n رأس را با نماد K_n نشان می‌دهیم. گراف ستاره با مرکز رأس x گرافی است که هر یال آن به صورت $\{x, y\}$ است که y رأسی از G است. یک دور همیلتونی در گراف G دوری است که شامل تمام رأس‌های G باشد. گراف G یک درخت نامیده می‌شود هر گاه همبند باشد و شامل هیچ دوری نباشد.
یک جورسازی در گراف G ، مجموعه‌ای از یال‌های دو به دو مجزای G است. یک جورسازی با بیشترین تعداد یال ممکن در گراف G را یک جورسازی ماکسیمم می‌نامند و تعداد یال‌های یک جورسازی ماکسیمم، عدد جورسازی G نامیده شده و با نماد $m(\mathrm{G})$ نمایش داده می‌شود. برای دور C از گراف G هر یالی که دو رأس غیرمجاور در C را به هم وصل می‌کند یک وتر C نامیده می‌شود.
فرض کنید G یک گراف با مجموعه‌ی رأسی $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$ باشد. ایده‌آل یالی G که با $I(G)$ نشان داده می‌شود. ایده‌آلی از حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های $S = K[x_1, \dots, x_n]$ روی میدان مفروض K است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I(G) = \left(x_i x_j\colon \ \text{یالی از } G \text{ است } \{x_i, x_j\}\right).$$

فرض کنید $S = K[x_1, \dots, x_n]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها روی میدان K باشد. برای تک‌جمله‌ای $u = \prod_{i=1}^{n} {x_i}^{a_i}$ از S ، ساپورت u به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$supp(u) = \{x_i\colon \ a_i > 0\}.$$

همچنین a_i را درجه x_i در u می‌نامیم و آن را با نماد $deg_u(x_i)$ نشان می‌دهیم.

گراف‌هایی که عمق توان دوم ایده‌آل یالی آنها صفر است توسط هرزوگ و هیبی به صورت زیر دسته‌بندی شده‌اند:

قضیه ۱,۲ [۵، **قضیه ۲,۱**]. فرض کنید G گرافی با ایده‌آل یالی $I(G)$ باشد. در این صورت موارد زیر هم‌ارزند:

۱) $depth(\frac{S}{I(G)^2}) = 0$

۲) G گرافی همبند است و یک دور القایی احاطه‌گر به طول ۳ دارد.

۲. توان سوم ایده آل یالی گراف‌ها با عمق صفر

تعریف ۱,۳. فرض کنید $S = K[x_1, \dots, x_n]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها روی میدان K باشد، m ایده‌آل مدرج ماکسیمال S باشد و M یک S-مدول با تولید متناهی باشد. پایه M با نماد $Soc(M)$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Soc(M) = 0:_M m = \{u \in M:\ \ ru = 0,\ \ \forall r \in m\}.$$

مثال ۲,۳. فرض کنید $M = S/(x^4, y^3, x^3y)$ که در اینجا $S = K[x, y]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها روی میدان K است. در این صورت $m = (x, y)$ ایده‌آل مدرج ماکسیمال S است و

$$Soc(M) = ((x^4, y^3, x^3y):_S m)/(x^4, y^3, x^3y).$$

می‌توان دید که $(x^4, y^3, x^3y):_S m = (x^3, x^2y^2)$. بنابراین $Soc(M) = (x^3, x^2y^2)M$.

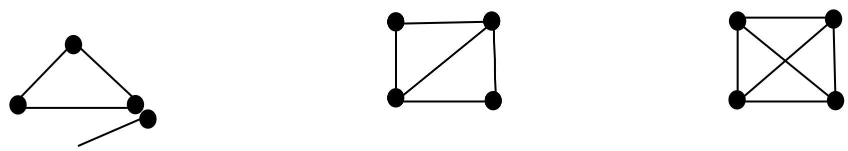
لم زیر در اثبات قضیه ۵,۳ مورد نیاز است.

لم ۳,۳. فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه چندجمله‌ای‌های S باشد. در این صورت $depth(\frac{S}{I}) = 0$ اگر و تنها اگر $Soc\,(\frac{S}{I}) \neq 0$.

برهان: داریم $depth(\frac{S}{I}) = 0$ اگر و تنها اگر m یک ایده‌آل اول وابسته I باشد. این معادل است با اینکه عضو ناصفر $f \in S$ وجود داشته باشد به طوری که $m = I: f$ و $f \notin I$. چنین شرایطی برای f معادل است با اینکه $\bar{f}$عضوی ناصفر از $Soc\,(\frac{S}{I})$ باشد.

گزاره زیر خانواده‌ای از گراف‌ها را ارائه می‌دهد که عمق توان سوم ایده‌آل یالی آنها صفر است. در قضیه ۶,۳ نشان می‌دهیم که خانواده گراف‌های ارائه شده در گزاره ۴,۳ در واقع دسته‌بندی کاملی از گراف‌هایی است که عمق توان سوم ایده‌آل یالی آنها صفر است.

به منظور درک بهتر برهان گزاره ۴,۳، گراف‌های توصیف شده در بند ۴ گزاره ۴,۳ در شکل ۱ نمایش داده شده‌اند.



شکل ۱. گراف‌های همبند با ۴ راس که دارای دور به طول ۳ هستند.

گزاره ۴،۳. فرض کنید گراف G یکی از گراف‌های زیر را به عنوان زیرگراف القایی احاطه‌گر داشته باشد:

۱) دور به طول ۳

۲) اجتماع دو دور به طول ۳ که مجزا هستند.

۳) دو دور به طول ۳ که دقیقا در یک راس مشترک هستند.

۴) گرافی همبند با ۴ راس که دارای دور به طول ۳ است.

۵) گرافی با ۵ راس که دارای دور همیلتونی است.

در این صورت $depth(\frac{S}{I(G)^3})=0$.

برهان: فرض کنید G گرافی با مجموعه رأسی $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ باشد و H یک زیرگراف القایی احاطه‌گر G باشد که به شکل یکی از گراف‌های ذکر شده در (۱) تا (۵) باشد. در هر حالت نشان می‌دهیم $Soc(\frac{S}{I(G)^3})\neq 0$. آنگاه طبق لم ۳،۳ نتیجه به دست می‌آید. برای هر $u\in S$ کلاس خارج قسمتی u در حلقه $S/I(G)^3$ را با $\bar{u}$ نشان می‌دهیم.

۱) فرض کنید H دوری به طول ۳ با مجموعه رأسی $\{x_1,x_2,x_3\}$ باشد. قرار می‌دهیم $u=x_1^2x_2^2x_3$. به وضوح $u\notin I(G)^3$. داریم $x_1u=(x_1x_2)^2(x_1x_3)\in I(G)^3$، $x_2u=(x_1x_2)^2(x_2x_3)\in I(G)^3$ و $x_3u=(x_1x_2)(x_1x_3)(x_2x_3)\in I(G)^3$. از آنجا که گراف H یک زیرگراف القایی احاطه‌گر G است، برای عدد صحیح $3<i\leq n$، عدد صحیح $j\in[3]$ موجود است به طوری که $x_ix_j\in I(G)$. حال اگر $j=3$، آنگاه $x_iu=(x_1x_2)^2(x_3x_i)\in I(G)^3$. اگر $j=2$، آنگاه $x_iu=(x_1x_2)(x_1x_3)(x_2x_i)\in I(G)^3$. برای $j=1$ ، $x_iu=(x_1x_2)(x_2x_3)(x_1x_i)\in I(G)^3$. بنابراین $\bar{u}\in Soc(\frac{S}{I(G)^3})$ و در نتیجه $Soc(\frac{S}{I(G)^3})\neq 0$.

۲) فرض کنید گراف H اجتماع دو دور مجزای به طول ۳ با مجموعه‌های رأسی $\{x_1,x_2,x_3\}$ و $\{x_4,x_5,x_6\}$ باشد. قرار می‌دهیم $u=\prod_{j=1}^{6}x_j$. از آنجا که H یک زیرگراف القایی G است، داریم $u\notin I(G)^3$. می‌توان دید که $x_1u=(x_1x_2)(x_1x_3)(x_4x_5)x_6\in I(G)^3$. به طور مشابه برای هر متغیر x_i که $1\le i\le 6$، داریم $x_iu\in I(G)^3$. حال فرض کنید $i>6$. چون H یک زیرگراف القایی احاطه‌گر G است، بدون کم شدن از کلیت می‌توان فرض کرد $x_ix_1\in I(G)$. در نتیجه $x_iu=(x_ix_1)(x_2x_3)(x_4x_5)x_6\in I(G)^3$ این نشان می‌دهد که $\bar{u}\in Soc(\frac{S}{I(G)^3})$.

۳) فرض کنید گراف H متشکل از دو دور به طول ۳ با مجموعه‌های رأسی $\{x_1,x_2,x_3\}$ و $\{x_3,x_4,x_5\}$ باشد که در رأس x_3 مشترک هستند. قرار می‌دهیم $u=\prod_{j=1}^{5}x_j$. با مقایسه درجه‌ها داریم $u\notin I(G)^3$. می‌توان دید که $x_3u=(x_1x_3)(x_2x_3)(x_4x_5)\in I(G)^3$. همچنین مشابه حالت (۲) برای هر x_i داریم $x_iu\in I(G)^3$. بنابراین $\bar{u}\in Soc(\frac{S}{I(G)^3})$.

۴) فرض کنید H گرافی همبند با مجموعه رأسی $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ باشد به طوری که x_1,x_2,x_3 یک دور در H است و $\{x_1,x_4\}\in E(H)$. قرار می‌دهیم $u=x_1^2x_2x_3x_4$. با مقایسه درجه ها داریم $u\notin I(G)^3$. به علاوه

$$x_1u=(x_1x_2)(x_1x_3)(x_1x_4)\in I(G)^3,$$

$$x_2u=(x_1x_2)(x_2x_3)(x_1x_4)\in I(G)^3,$$

$$x_3u=(x_1x_3)(x_2x_3)(x_1x_4)\in I(G)^3,$$

$$x_4u=(x_2x_3)(x_1x_4)(x_1x_4)\in I(G)^3.$$

حال فرض کنید $i>4$. در این صورت اندیس $j\in[4]$ وجود دارد به طوری که $\{x_i,x_j\}\in E(G)$. اگر $j=1$، آنگاه داریم $x_iu=(x_1x_i)(x_1x_4)(x_2x_3)\in I(G)^3$. اگر $j=2$، آنگاه

$$.x_iu=(x_2x_i)(x_1x_4)(x_1x_3)\in I(G)^3$$

حالت های $j=3,4$ مشابه حالت $j=2$ هستند. بنابراین $\bar{u}\in Soc(\frac{S}{I(G)^3})$ و در نتیجه $Soc(\frac{S}{I(G)^3})\neq 0$.

۵) فرض کنید H گرافی با ۵ راس باشد که دارای دور همیلتونی x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 است. آنگاه برای تک جمله‌ای $u=\prod_{j=1}^{5}x_j$ داریم $u\notin I(G)^3$ و $x_iu\in I(G)^3$ برای هر $1\le i\le n$. بنابراین $\bar{u}\in Soc(\frac{S}{I(G)^3})$.

نتیجه زیر از منبع [۵] در اثبات قضیه بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد.

لم ۵،۳ ([۵، **نتیجه ۲،۱**]) فرض کنید $I \subset S$ یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای خالی از مربع باشد. در این صورت برای هر عضو ناصفر $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} + I^k \in Soc(\frac{S}{I^k})$، داریم $a_i \leq k-1$ برای هر $1 \leq i \leq n$.

اکنون به بیان نتیجه اصلی این مقاله می‌پردازیم.

قضیه ۶،۳. فرض کنید G گرافی با ایده‌آل یالی $I(G)$ باشد. موارد زیر هم‌ارزند:

۱) $depth(\frac{S}{I(G)^3}) = 0$.

۲) G یکی از گراف‌های (۱) تا (۵) در گزاره ۴،۳ را به عنوان زیرگراف القایی احاطه‌گر دارد.

برهان: (۲) ⇐ (۱) طبق گزاره ۴،۳ برقرار است.

(۱) ⇐ (۲) فرض کنید $depth(\frac{S}{I(G)^3}) = 0$. در این صورت طبق لم ۳،۳، $Soc\ (\frac{S}{I(G)^3}) \neq 0$. با توجه به تعریف برای هر ایده‌آل $I \subset S$ داریم $Soc\left(\frac{S}{I}\right) = (I:_S m)/I$. هر گاه I یک ایده‌آل تک‌جمله‌ای باشد $(I:_S m)$ نیز ایده‌آلی تک‌جمله‌ای است. لذا $Soc\ (\frac{S}{I(G)^3})$ توسط تک‌جمله‌ای‌ها تولید می‌شود. فرض کنید $\bar{u} \in Soc(\frac{S}{I(G)^3})$ عضوی ناصفر باشد به طوری که $u \in S$ یک تک‌جمله‌ای است. داریم $u \notin I(G)^3$ و $x_j u \in I(G)^3$ برای هر $1 \leq j \leq n$. فرض کنید $u = \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}$. قرار می‌دهیم $V = supp(u)$ و زیرگراف القایی G روی مجموعه رأسی V را با H نشان می‌دهیم. در این صورت رابطه‌های $x_j u \in I(G)^3$ و $u \notin I(G)^3$ نشان می‌دهند که H یک زیرگراف القایی احاطه‌گر G است. برای یال دلخواه $e = \{x_r, x_s\}$ قرار می‌دهیم $\boldsymbol{x}_e = x_r x_s$. ابتدا نشان می‌دهیم که گراف H رأس تنها ندارد. به برهان خلف فرض کنید x_i یک رأس تنهای H باشد. از آنجا که $x_i u \in I(G)^3$، یال‌های e_1، e_2 و e_3 از G (که لزوما متمایز نیستند) موجودند به طوری که $\boldsymbol{x}_{e_1}\boldsymbol{x}_{e_2}\boldsymbol{x}_{e_3}$ تک‌جمله‌ای $x_i u$ را عاد می‌کند. یال‌های e_1، e_2 و e_3 در واقع یال H هستند، زیرا زیرمجموعه V هستند و H زیرگراف القایی G است. چون x_i یک رأس تنهای H است، هیچ کدام از یال‌های e_1، e_2 و e_3 شامل x_i نیستند. بنابراین $\boldsymbol{x}_{e_1}\boldsymbol{x}_{e_2}\boldsymbol{x}_{e_3}$ تک‌جمله‌ای u را عاد می‌کند. در نتیجه $u \in I(G)^3$، که یک تناقض است.

ادعا ۱: اگر x_i یک برگ H باشد و $N_H(x_i) = \{x_j\}$، آنگاه $a_i = 1$ و $a_j = 2$.

برهان ادعا ۱: فرض کنید x_i یک برگ H باشد. از آنجا که $x_i \in supp(u)$، داریم $a_i \geq 1$. همچنین طبق لم ۵،۳ داریم $a_i \leq 2$. از طرفی $x_i u = \boldsymbol{x}_{e_1}\boldsymbol{x}_{e_2}\boldsymbol{x}_{e_3} w$ برای تک جمله‌ای $w \in S$ و یال‌های e_1، e_2 و e_3 از H. دقت کنید که x_i تک جمله‌ای w را عاد نمی‌کند، زیرا در غیر این صورت $u \in I(G)^3$. بنابراین از آنجا که $x_i^{a_i+1}$ تک‌جمله‌ای $x_i u$ را عاد می‌کند و $a_i + 1 \geq 2$، حداقل دو یال از بین e_1، e_2 و e_3 شامل رأس x_i هستند. چون x_i یک برگ H است، تنها یال شامل x_i در H، یال $\{x_i, x_j\}$ است. لذا حداقل دو یال از بین e_1، e_2 و e_3 با $\{x_i, x_j\}$ برابر هستند. اگر هر سه یال با

$\{x_i, x_j\}$ برابر باشند، طبق تساوی $x_i u = \boldsymbol{x}_{e_1}\boldsymbol{x}_{e_2}\boldsymbol{x}_{e_3} w$ داریم $a_j \geq 3$ که با لم ۵,۳ در تناقض است. در نتیجه دقیقا دو یال از بین e_1، e_2 و e_3 با $\{x_i, x_j\}$ برابر هستند. این نشان می‌دهد که $a_i = 1$ و $a_j \geq 2$. از طرفی طبق لم ۵,۳ داریم $a_j \leq 2$. لذا $a_j = 2$. به ویژه H مولفه همبندی یکریخت با گراف کامل K_2 ندارد.

ادعا ۲: گراف H حداکثر یک برگ دارد.

برهان ادعا ۲: به برهان خلف فرض کنید H حداقل دو برگ دارد و بدون کم شدن از کلیت فرض کنید x_1 و x_2 برگ‌هایی از H باشند. فرض کنید $N_H(x_1) = \{x_i\}$، $N_H(x_2) = \{x_j\}$ و $e_1 = \{x_1, x_i\}$ و $e_2 = \{x_2, x_j\}$. طبق ادعا ۱ داریم $a_1 = a_2 = 1$ و $a_i = a_j = 2$. نشان می‌دهیم $i \neq j$. فرض کنید چنین نباشد و $i = j$. از آنجا که $\deg(u) \geq 5$، عدد صحیح k که $k \neq 1,2,i$ وجود دارد به طوری که x_k تک‌جمله‌ای u را عاد می‌کند. برای هر عدد صحیح k با این ویژگی نشان می‌دهیم $N_H(x_k) = \{x_i\}$. همانطور که قبلا نشان داده شد گراف H رأس تنها ندارد. بنابراین رأس $x_s \in N_H(x_k)$ وجود دارد. اگر $s \neq i$، آنگاه $(x_1x_i)(x_2x_i)(x_kx_s)$ تک‌جمله‌ای u را عاد می‌کند و در نتیجه $u \in I(G)^3$، که یک تناقض است. بنابراین $N_H(x_k) = \{x_i\}$ و x_k یک برگ از H است برای هر $k \neq 1,2,i$. این یعنی H گراف ستاره با مرکز x_i است. از $x_1 u \in I(G)^3$ داریم $x_1 u = \boldsymbol{x}_{e_1}\boldsymbol{x}_{e_2}\boldsymbol{x}_{e_3} w$ برای یال‌های $e_1, e_2, e_3 \in E(H)$. چون $deg_{x_1 u}(x_1) = 2$ و x_1 تک‌جمله‌ای w را عاد نمی‌کند، رأس x_1 متعلق به دقیقا دو تا از این یال‌هاست. پس بدون کم شدن از کلیت داریم $e_1 = e_2 = \{x_1, x_i\}$. همچنین چون H گراف ستاره با مرکز x_i است، $e_3 = \{x_i, x_r\}$ که x_r یک برگ H است. این ایجاب می‌کند که $a_i \geq 3$ که با لم ۵,۳ در تناقض است. بنابراین فرض $i = j$ باطل است و داریم $i \neq j$. اگر عدد صحیح $k \neq 1$ وجود داشته باشد که $\{x_i, x_k\} \in E(H)$، آنگاه $(x_1x_i)(x_2x_j)(x_ix_k)$ تک‌جمله‌ای u را عاد می‌کند و $u \in I(G)^3$، که یک تناقض است. لذا x_i نیز یک برگ H است. پس طبق ادعا ۱ داریم $a_i = 1$. این با $a_i = 2$ در تناقض است. بنابراین H حداکثر یک برگ دارد.

از ادعای دوم نتیجه می‌شود که H یک جنگل نیست، زیرا هر درخت حداقل دو برگ دارد. بنابراین H شامل یک دور است. چون $u \notin I(G)^3$، گراف H جورسازی‌ای با ۳ یال ندارد. به عبارت دیگر داریم $m(H) \leq 2$. در نتیجه هر دور در H دارای طول حداکثر ۵ است. فرض کنید d طول بزرگترین دور در H باشد. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم و در هر حالت نشان می‌دهیم H یکی از گراف‌های (۱) تا (۵) در گزاره ۴,۳ است.

حالت ۱: فرض کنید $d = 5$. اگر $|V(H)| \geq 6$، چون H رأس تنها ندارد، می‌توان دید که $m(H) \geq 3$، که یک تناقض است. پس $|V(H)| = 5$ و H گرافی با ۵ رأس است که دارای دور همیلتونی است. یعنی مورد (۵) در گزاره ۴,۳ برقرار است.

حالت ۲: فرض کنید $d = 4$ و $C: x_1, x_2, x_3, x_4$ دوری به طول ۴ در H باشد. نشان می‌دهیم $|V(H)| = 4$. به برهان خلف فرض کنید $|V(H)| > 4$. چون $m(H) = 2$ و گراف H رأس تنها ندارد، برای هر $x_i \in V(H) \setminus V(C)$ داریم $N_H(x_i) \subseteq V(C)$. رأس $x_i \in V(H) \setminus V(C)$ را در نظر بگیرید. اگر x_i یک برگ H باشد، با رأسی از دور C مثلا x_1 مجاور است. در نتیجه طبق ادعا ۱ داریم $a_i = 1$ و $a_1 = 2$. آنگاه $(x_1x_2)(x_1x_i)(x_3x_4)$ تک‌جمله‌ای u را عاد می‌کند و $u \in I(G)^3$، که یک تناقض است. این نشان می‌دهد که x_i در H برگ نیست. به عبارت دیگر هر رأس $x_i \in V(H) \setminus V(C)$ با حداقل دو رأس از C مجاور است. چون طبق فرض H دور به طول ۵ ندارد، هر رأس x_i با ویژگی ذکر شده با دقیقا دو رأس از C مجاوراست که آن دو رأس خودشان در C مجاورنیستند. حال یک رأس ثابت $x_i \in V(H) \setminus V(C)$ را در نظر بگیرید و بدون کم شدن از کلیت فرض کنید $N_H(x_i) = \{x_1, x_3\}$. در این صورت برای هر رأس دلخواه دیگر $x_j \in V(H) \setminus V(C)$ نیز داریم $N_H(x_j) = \{x_1, x_3\}$، زیرا در غیر این صورت $N_H(x_j) = \{x_2, x_4\}$ و یال‌های $\{x_3, x_4\}$، $\{x_1, x_i\}$ و $\{x_2, x_j\}$ یک جورسازی از اندازه ۳ در H تشکیل می‌دهند که امکان‌پذیر نیست. همچنین داریم $a_1 = 1$، زیرا در غیر این صورت $(x_1x_2)(x_1x_i)(x_3x_4)$ تک‌جمله‌ای u را عاد می‌کند و $u \in I(G)^3$، که یک تناقض است. به طور مشابه $a_3 = 1$. داریم $x_iu = \boldsymbol{x}_{e_1}\boldsymbol{x}_{e_2}\boldsymbol{x}_{e_3}w$ برای یال‌های $e_1, e_2, e_3 \in E(H)$ و تک‌جمله‌ای w که توسط x_iعاد نمی‌شود. از آنجا که x_i^2 تک‌جمله‌ای x_iu را عاد می‌کند، رأس x_i به دو یال از بین یال‌های e_1, e_2, e_3 متعلق است. چون $N_H(x_i) = \{x_1, x_3\}$ و $a_1 = a_3 = 1$، این دو یال به شکل $e_1 = \{x_1, x_i\}$ و $e_2 = \{x_3, x_i\}$ هستند. در نتیجه برای یال e_3 داریم $e_3 \subseteq \{x_2, x_4\} \cup (V(H) \setminus V(C))$. چون برای هر رأس $x_j \in V(H) \setminus V(C)$ داریم $N_H(x_j) = \{x_1, x_3\}$، نتیجه می‌گیریم که $e_3 = \{x_2, x_4\}$. آنگاه x_1, x_2, x_4, x_3, x_i یک دور به طول ۵ در H است که با $d = 4$ تناقض دارد. بنابراین $|V(H)| = 4$.

حال نشان می‌دهیم دور C دارای یک وتر است. به برهان خلف فرض کنید چنین نباشد. در این صورت داریم $H = C$ و $u = \prod_{i=1}^{4} {x_i}^{a_i}$ که $a_i \geq 1$ برای هر $1 \leq i \leq 4$. از طرفی طبق لم ۵،۳ داریم $a_i \leq 2$ برای هر $1 \leq i \leq 4$. چون $\deg(u) \geq 5$، بدون کم شدن از کلیت می‌توان فرض کرد $a_1 = 2$. از رابطه‌های $x_1x_2, x_1x_4, x_2x_3, x_3x_4 \in I(G)$، $a_1 = 2$ و $u \notin I(G)^3$، نتیجه می‌گیریم که $a_2 = a_4 = 1$. بنابراین داریم $x_1u = x_1^3x_2x_3^{a_3}x_4 \in I(G)^3$. به عبارت دیگر یال‌های $e_1, e_2, e_3 \in E(H)$ که هر سه شامل x_1 هستند موجودند به طوری که $\boldsymbol{x}_{e_1}\boldsymbol{x}_{e_2}\boldsymbol{x}_{e_3}$ تک‌جمله‌ای $x_1^3x_2x_3^{a_3}x_4$ را عاد می‌کند. چون C وتر ندارد، این ایجاب می‌کند که یکی از x_2^2 و x_4^2 تک‌جمله‌ای $x_1^3x_2x_3^{a_3}x_4$ را عاد کند که غیرممکن است. بنابراین دور C دارای یک وتر است و گراف H دوری به طول ۳ دارد. یعنی یکی از حالات مذکور در (۴) در گزاره ۴،۳ برقرار است.

حالت ۳: فرض کنید $d = 3$ و $C: x_1, x_2, x_3$ دوری به طول ۳ در H باشد. اگر $|V(H)| = 3$، آنگاه H یک دور به طول ۳ است و مورد (۱) در گزاره ۴،۳ برقرار است. حال فرض کنید $|V(H)| > 3$. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که H گرافی ناهمبند باشد. فرض کنید x_i رأسی از H باشد که در مولفه‌ای همبندی از H واقع است که متفاوت از مولفه همبندی شامل C است. چون x_i رأس تنها نیست با رأسی مانند x_j مجاور است. همانطور که قبل‌تر اشاره شد H مولفه همبندی یکریخت با گراف کامل K_2 ندارد. پس بدون کم شدن از کلیت می‌توان فرض کرد $|N_H(x_i)| \geq 2$. رأس $x_k \in N_H(x_i)$

را که $k \neq j$ در نظر بگیرید. اگر یکی از رأس‌های x_j و x_k برگی از H باشد، آنگاه طبق ادعا ۱ داریم $a_i = 2$. در نتیجه $(x_ix_j)(x_ix_k)(x_1x_2)$ تک‌جمله‌ای u را عاد می‌کند و $u \in I(G)^3$، که یک تناقض است. لذا x_j برگ H نیست. چون $m(H) \leq 2$ داریم $N_H(x_j) = \{x_i, x_k\}$. در نتیجه $C': x_i, x_j, x_k$ دوری به طول ۳ در H است. اگر $|V(H)| > 6$، آنگاه $m(H) \geq 3$ که تناقض است. بنابراین $|V(H)| = 6$ و H اجتماع دو دور مجزای به طول ۳ است. یعنی مورد (۲) در گزاره ۴٫۳ برقرار است.

حال فرض کنید H همبند باشد. اگر $|V(H)| = 4$، آنگاه مورد (۴) در گزاره ۴٫۳ برقرار است. پس فرض کنید $|V(H)| \geq 5$. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

زیرحالت ۱٫۳: مجموعه $V(H) \setminus V(C)$ شامل یالی از H است. چون H همبند است یال $\{x_i, x_j\} \subseteq V(H) \setminus V(C)$ وجود دارد به طوری که x_i با رأسی از دور C مجاور است. بدون کم شدن از کلیت فرض کنید $\{x_i, x_1\} \in E(H)$. با توجه به لم ۵٫۳ داریم $a_i \leq 2$. اگر $a_i = 2$، آنگاه $(x_1x_i)(x_ix_j)(x_2x_3)$ تک‌جمله‌ای u را عاد می‌کند و در نتیجه $u \in I(G)^3$، که یک تناقض است. بنابراین $a_i = 1$. طبق ادعا ۱ این ایجاب می‌کند که x_j برگی از H نیست. برای هر عدد $k \neq i$ که $\{x_j, x_k\} \in E(H)$، اگر $k \notin V(C)$، آنگاه $m(H) \geq 3$ که تناقض است. همچنین اگر $k \in \{2,3\}$، آنگاه H یک دور به طول ۵ دارد که با $d = 3$ تناقض دارد. پس $k = 1$ و x_i, x_j, x_1 یک دور به طول ۳ در گراف G است که در رأس x_1 با دور C مشترک است. دقت کنید که در این حالت نامساوی $m(H) \leq 2$ ایجاب می‌کند که $|V(H)| = 5$. یعنی مورد (۳) در گزاره ۴٫۳ برقرار است.

زیرحالت ۲٫۳: مجموعه $V(H) \setminus V(C)$ شامل هیچ یالی از H نیست. با توجه به فرض $|V(H)| \geq 5$ نشان می‌دهیم چنین حالتی اتفاق نمی‌افتد. در واقع چون H همبند است و شامل دور به طول ۴ نیست، هر رأس در $V(H) \setminus V(C)$ یک برگ از H است که با دقیقا یک رأس از دور C مجاور است. از آنجا که $V(H) \setminus V(C)$ شامل حداقل دو عضو است، این بدان معنی است که H دارای حداقل دو برگ است. اما این با ادعا ۲ تناقض دارد.

References

1. M. Brodmann, The asymptotic nature of the analytic spread, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **86** (1979), 35–39.

2. L. Fouli and S. Morey, A lower bound for depths of powers of edge ideals, J. Algebraic Combin., **42** (2015), 829–848.

3. H. T. Hà and M. Sun, Squarefree monomial ideals that fail the persistence property and nonincreasing depth, Acta Math. Vietnam., **40** (2015), 125–137.

4. J. Herzog and T. Hibi, The depth of powers of an ideal, J. Algebra **291** (2005), 534–550.

5. J. Herzog and T. Hibi, Bounding the socles of powers of squarefree monomial ideals, In: Commutative algebra and noncommutative algebraic geometry, Vol. II (2015), 223–229.

6. J. Herzog and A. A. Qureshi, Persistence and stability properties of powers of ideals, J. Pure Appl. Algebra **219** (2015), 530–542.

7. H. T. Hien., H. M. Lam and N. V. Trung, Decreasing behavior of the depth functions of edge ideals, J. Algebraic Combin. **59** (2024), 37–53.

8. N. C. Minh, T. N. Trung and T. Vu, Depth of powers of edge ideals of cycles and trees, arXiv:2308.00874.

9. S. Morey, Depths of powers of the edge ideal of a tree, Comm. Algebra **38** (2010), 4042–4055.

10. R. H. Villarreal, Cohen–Macaulay graphs, Manuscripta Math. **66** (1990), 277–293.