Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Linear Maps Preserving Identity Products

A. Zivari-Kazempour[1]

1. Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Ayatollah Boroujerdi University, Boroujerd, Iran.

E-mail: zivari@abru.ac.ir, zivari6526@gmail.com

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 8 May 2024
Received in revised form: 16 April 2025
Accepted: 24 May 2025
Published online: 4 October 2025

Keywords:
Homomorphism,
Jordan homomorphism,
Derivation,
Jordan derivation.

ABSTRACT

Introduction

Let A and B be algebras. We say that a linear map $\phi: A \longrightarrow B$ *preserves products* at a given point $w \in A$ if

$$x, y \in A, \quad xy = w \quad \Longrightarrow \quad \phi(xy) = \phi(x)\phi(y). \tag{H}$$

The map ϕ *preserves Jordan products* at a given point $w \in A$ if

$$x, y \in A, \quad x \circ y = w \quad \Longrightarrow \quad \phi(x \circ y) = \phi(x) \circ \phi(y), \tag{J}$$

where $x \circ y = xy + yx$ is the Jordan product on A.

A linear map ϕ is called a homomorphism (Jordan homomorphism), if ϕ preserves products (preserves Jordan products) at all elements of A.

Obviously, any homomorphism is a Jordan homomorphism, however, the converse is false in general, see [12].

Let A be algebra and X be an A-bimodule. The linear map $\sigma: A \longrightarrow X$ is called a *derivation* if for all $x, y \in A$,

$$\sigma(xy) = \sigma(x)y + x\sigma(y),$$

and it is called a *Jordan derivation* if all $x, y \in A$,

$$\sigma(x \circ y) = \sigma(x) \bullet y + x \bullet \sigma(y),$$

where "$\bullet$" denotes the Jordan product on X. Clearly, Any derivation is a Jordan derivation, but the converse is fails. It is shown that every continuous Jordan derivation from C^*-algebra A into any Banach A-bimodule X is a derivation [9].

The linear map $\sigma: A \longrightarrow X$ is called a derivation at a given point $w \in A$ if

$$x, y \in A, \quad xy = w \quad \Longrightarrow \quad \sigma(xy) = \sigma(x)y + x\sigma(y), \tag{D}$$

and it is called a Jordan derivation at $w \in A$ if

$$x, y \in A, \quad x \circ y = w \quad \Longrightarrow \quad \sigma(x \circ y) = \sigma(x) \bullet y + x \bullet \sigma(y). \tag{JD}$$

Characterizing linear maps, especially, homomorphisms, derivations and their Jordan versions on Banach algebras at a point $w \in A$ is maybe one of the

most studied linear preserver problems, see for example [1,3,4,5,7,11,13] and references therein.

Clearly, every homomorphism (Jordan homomorphism) preserves products (preserves Jordan products) at all point $w \in A$, however, the converse is not true, see Example 4.1. Now there is a question that whether condition (H) or (J) implies that ϕ is a homomorphism or Jordan homomorphism. A similar question can be posed about condition (D) or (JD).

Recently, the author in [13] proved under some mild conditions that if A is unital with unit $\mathbf{1}$, and a continuous linear map $\phi: A \longrightarrow B$ between Banach algebras satisfies in condition (J) at the point $w = \mathbf{1}$, then ϕ is a Jordan homomorphism. The continuous surjective linear map between C^*-algebras that satisfies a mid-condition was considered in [1]. Maps between Banach algebras satisfying in condition (H) or (J) at $w = 0$ are discussed in [3]. It is proved in [10] that the linear map $\sigma: A \longrightarrow X$ is a Jordan derivation if and only if it is a derivation at $w = \mathbf{1}$. Moreover, the condition (D) or (JD) were studied for von Neumann algebras and C^*-algebras at $w = 0$, [11].

In this paper, by idea of the material above, we study Jordan homomorphism at the identity products and under certain condition, we prove that if a linear map $\phi: A \longrightarrow B$ between unital Banach algebras satisfies in condition (H) or (J) at $w = \mathbf{1}$, then ϕ is a Jordan homomorphism. We also characterize continuous linear map $\sigma: A \longrightarrow X$ satisfying derivation equation with $xy = \mathbf{1}$.

Main Results

The followings are the main results of our paper. In fact, we consider the question of characterizing Jordan homomorphisms and Jordan derivations by action at the identity products on Banach and C^*-algebras.

Theorem: If a continuous linear map $\phi: A \longrightarrow B$ satisfies in condition (H) at $w = \mathbf{1}$, then ϕ is a Jordan homomorphism multiplied by $\phi(\mathbf{1})$.

As a consequence we get the following results.

Corollary: Let $\phi: A \longrightarrow B$ be a continuous linear map satisfying in condition (H) at $w = \mathbf{1}$. If $\phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, then ϕ is a Jordan homomorphism.

Corollary: Let A and B be two unital C^*-algebras and let $\phi: A \longrightarrow B$ be a continuous linear map satisfying

$$x, y \in A, \;\; x \circ y^* = \mathbf{1} \;\; \Longrightarrow \;\; \phi(x \circ y^*) = \phi(x) \circ \phi(y)^*.$$

If $\phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, then ϕ is a Jordan $*$-homomorphism.

Theorem: Let A be a unital C^*-algebra and X be a Banach A-bimodule. If a continuous linear map $\sigma: A \longrightarrow X$ satisfies in condition (D) at $w = \mathbf{1}$, then σ is a Jordan derivation.

Conclusion

The following conclusions are obtained from this research.

- Let A be a unital Banach algebra with unit $\mathbf{1}$ and let B be a Banach algebra. Then every continuous unital linear map $\phi: A \longrightarrow B$ which preserves products at $w = \mathbf{1}$ is exact a Jordan homomorphism.

- Let A be a unital Banach algebra with unit $\mathbf{1}$ and let X be a Banach A-bimodule. Then every continuous derivation at $w = \mathbf{1}$ is exact a Jordan derivation.

How to cite: Zivari-Kazempour, Abbas. (2025). Linear maps preserving identity products. *Mathematical Researches*, **11** (1), 57 – 71.

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

نگاشت‌های خطی حافظ ضرب‌های واحد

عباس زیوری کاظم‌پور[۱]

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ایت ا... بروجردی، بروجرد، ایران. رایانامه zivari@abru.ac.ir, zivari6526@gmail.com

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۲/۱۹
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۱/۲۷
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۳/۳
تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۷/۱۲

واژه‌های کلیدی:
همریختی،
همریختی ژوردان،
اشتقاق،
اشتقاق ژوردان.

چکیده

فرض کنید A و B دو C^*-جبر، A یکدار و $\phi: A \longrightarrow B$ یک نگاشت خطی پیوسته باشد. در این مقاله، تحت شرایط خاصی ثابت می‌کنیم که ϕ یک *-همریختی ژوردان است. هم‌چنین، نشان می‌دهیم که اگر X یک *-A-مدول باناخ و $\sigma: A \longrightarrow X$ یک نگاشت خطی پیوسته باشد که در رابطه اشتقاق (اشتقاق ژوردان) با شرط $xy^* = \mathbf{1}$ $(x \circ y^* = \mathbf{1})$ صدق کند، آنگاه σ یک *-اشتقاق (*-اشتقاق ژوردان) است.

استناد: زیوری کاظم‌پور، عباس (۱۴۰۴). نگاشت‌های خطی حافظ ضرب‌های واحد. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۱** (۱)، ۵۷ – ۷۱.

مقدمه

فرض کنید A و B جبرهای باناخ مختلط و $\phi: A \longrightarrow B$ یک نگاشت خطی باشد. در این صورت ϕ یک همریختی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in A$،

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y).$$

هم‌چنین، ϕ یک همریختی ژوردان نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in A$،

$$\phi(x \circ y) = \phi(x) \circ \phi(y), \tag{†}$$

که در آن $x \circ y = xy + yx$ بیانگر ضرب ژوردان عناصر x و y در A می‌باشد. با جایگذاری $y = x$ در رابطه (†)، برای هر $x \in A$، نتیجه می‌شود که $\phi(x^2) = \phi(x)^2$. برعکس، اگر رابطه اخیر برای هر $x \in A$ برقرار باشد، آنگاه با جایگذاری $x + y$ به‌جای x، تساوی (†) حاصل می‌شود. بنابراین، ϕ یک همریختی ژوردان است اگر وتنها اگر برای هر $x \in A$ رابطه $\phi(x^2) = \phi(x)^2$ برقرار باشد. هر همریختی یک همریختی ژوردان است، درحالی که عکس این موضوع لزوماً برقرار نیست [12].

نگاشت خطی $\phi: A \longrightarrow B$ حافظ حاصل‌ضرب در نقطه $w \in A$ نامیده می‌شود اگر

$$x, y \in A, \quad xy = w \quad \Longrightarrow \quad \phi(xy) = \phi(x)\phi(y), \tag{H}$$

و حافظ حاصل‌ضرب ژوردان در نقطه $w \in A$ نامیده می‌شود اگر

$$x, y \in A, \quad x \circ y = w \quad \Longrightarrow \quad \phi(x \circ y) = \phi(x) \circ \phi(y), \tag{J}$$

واضح است که هر همریختی (همریختی ژوردان) حافظ حاصل‌ضرب (حاصل‌ضرب ژوردان) در نقطه $w \in A$ است، ولی عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست (مثال **۱.۴** ملاحظه شود). اکنون این سوال مطرح است که تحت چه شرایطی رابطه (H) یا (J) ایجاب می‌کند که ϕ یک همریختی یا یک همریختی ژوردان است؟

نگاشت‌هایی که در شرایط (H) یا (J) صدق می‌کنند، اخیراً در منابع زیادی مورد مطالعه قرار گرفت. به عنوان مثال، روابط (H) یا (J) برای حالت $w = 0$ بین جبرهای باناخ یکدار در [۳] مطالعه و تحت شرایط خاصی ثابت شد که ϕ یک یکریختی ژوردان است. هم‌چنین، همریختی‌های ژوردان حافظ حاصل‌ضرب صفر بین C^*-جبرها در [۱] بررسی شد. در [۲] ثابت شد که هر نگاشت خطی دوسویی بین جبرهای عملگری یکدار، صادق در شرط

$$xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi(xy) = \phi(x)\phi(y),$$

مضربی از یک یکریختی جبری است.

فرض کنید A یک جبر و X یک A-مدول باشد. نگاشت خطی $\sigma: A \longrightarrow X$ یک اشتقاق نامیده می‌شود اگر برای هر $x, y \in A$،

$$\sigma(xy) = \sigma(x)y + x\sigma(y),$$

و یک اشتقاق ژوردان نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in A$،

$$\sigma(x \circ y) = \sigma(x) \bullet y + x \bullet \sigma(y),$$

که در آن "•" نشان دهنده ضرب مدولی ژوردان است. همانند همریختی ژوردان می‌توان نشان داد که σ یک اشتقاق ژوردان است اگر وتنها اگر برای هر $x \in A$، تساوی

$$\sigma(x^2) = \sigma(x)x + x\sigma(x),$$

برقرار باشد. هر اشتقاق یک اشتقاق ژوردان است، ولی عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست. جانسون[1] ثابت کرد که هر اشتقاق ژوردان پیوسته از C^*-جبر A به A-مدول باناخ X یک اشتقاق است [۹].

نگاشت خطی $\sigma: A \longrightarrow X$ یک اشتقاق در نقطه $w \in A$ نامیده می‌شود اگر

$$x, y \in A, \quad xy = w \quad \Longrightarrow \quad \sigma(xy) = \sigma(x)y + x\sigma(y), \tag{D}$$

و یک اشتقاق ژوردان در نقطه $w \in A$ نامیده می‌شود اگر

$$x, y \in A, \quad x \circ y = w \quad \Longrightarrow \quad \sigma(x \circ y) = \sigma(x) \bullet y + x \bullet \sigma(y). \tag{JD}$$

واضح است که هر اشتقاق، یک اشتقاق در نقطه $w \in A$ است. نگاشت‌هایی که در شرایط (D) یا (JD) صدق می‌کنند، در دهه اخیر مورد توجه پژوهشگران زیادی قرار گرفت. به عنوان مثال، در [۱۰] ثابت شد که نگاشت خطی $\sigma: A \longrightarrow X$ یک اشتقاق ژوردان است اگروتنها اگر σ یک اشتقاق در همانی جبر A باشد. هم‌چنین، روابط (D) و (JD) برای جبرهای فون نیومان و C^*-جبرها برای حالت $w = 0$ بررسی شده‌اند [۱۱]. قهرمانی[2] در [۶] با بکارگیری نگاشت‌های دوخطی، اشتقاق‌ها و اشتقاق‌های ژوردان در نقطه صفر را مطالعه کرد. برای مطالعه بیشتر در مورد نگاشت‌های خطی به منابع [۸،۷،۵،۴] مراجعه شود.

فرض کنید A یک C^*-جبر باشد. عنصر $a \in A$ را خودالحاق می‌نامند اگر $a = a^*$. مجموعه همه عناصر خودالحاق A را با A_{sa} نشان می‌دهیم. فرض کنید A یکدار با واحد $\mathbf{1}$ و X یک $*$-A-مدول باناخ باشد.

در این مقاله، دو رده از نگاشت‌های خطی پیوسته حافظ حاصل‌ضرب (حاصل‌ضرب ژوردان) در نقطه $w = \mathbf{1}$ را بررسی می‌کنیم. نگاشت‌های رده اول بین C^*-جبرهای A و B و رده دوم از C^*-جبر A به $*$-A-مدول باناخ X می‌باشد. تحت شرایط خاص نشان می‌دهیم که نگاشت‌های کلاس اول $*$-همریختی ژوردان و کلاس دوم $*$-اشتقاق هستند.

[1] Johnson
[2] Ghahramani

۱. همریختی‌های ژوردان

این بخش به نگاشت‌های خطی پیوسته بین جبرهای باناخ که حافظ حاصل‌ضرب یا حاصل‌ضرب ژوردان در نقطه $w = \mathbf{1}$ می‌باشند، اختصاص داده شده است.

قضیه ۱.۱. فرض کنید A و B جبرهای باناخ و A یکدار باشد. اگر $\phi: A \longrightarrow B$ یک نگاشت خطی پیوسته باشد به‌طوری که

$$x, y \in A, \quad xy = \mathbf{1} \quad \Longrightarrow \quad \phi(xy) = \phi(x)\phi(y),$$

در این صورت برای هر $x \in A$،

$$\phi(x)^2 = \phi(\mathbf{1})\phi(x^2).$$

اثبات. فرض کنید $a \in A$ یک عنصر دلخواه باشد. برای هر $t \in \mathbb{R}$، قرار می‌دهیم $x = e^{ita}$ و $y = e^{-ita}$. در این صورت $xy = \mathbf{1}$. بنابراین،

$$\phi\left(e^{ita}\right)\phi\left(e^{-ita}\right) = \phi(\mathbf{1}).$$

با مشتق‌گیری نسبت به متغیر t به دست می‌آوریم:

$$(1)\ \phi\left(iae^{ita}\right)\phi\left(e^{-ita}\right) + \phi\left(e^{ita}\right)\phi\left(-iae^{-ita}\right) = 0.$$

با جایگذاری $t = 0$ در رابطه (1)، تساوی زیر حاصل می‌شود.

$$(2)\phi(a)\phi(\mathbf{1}) = \phi(\mathbf{1})\phi(a), \qquad a \in A.$$

با مشتق‌گیری از رابطه (1)، نسبت به متغیر t، تساوی زیر حاصل می‌شود.

$$\phi\left(a^2e^{ita}\right)\phi\left(e^{-ita}\right) + \phi\left(ae^{ita}\right)\phi\left(-ae^{-ita}\right) =$$
$$(3)\phi\left(ae^{ita}\right)\phi\left(ae^{-ita}\right) + \phi\left(e^{ita}\right)\phi\left(-a^2e^{-ita}\right).$$

با جایگذاری $t = 0$ در رابطه (3)، داریم:

$$\phi(a^2)\phi(\mathbf{1}) + \phi(a)\phi(-a) = \phi(a)\phi(a) + \phi(\mathbf{1})\phi(-a^2).$$

با استفاده از روابط (2) و (3)، نتیجه می‌شود که

$$\phi(a)^2 = \phi(\mathbf{1})\phi(a^2), \qquad a \in A.$$

بنابراین، اثبات کامل می‌گردد.

نتیجه ۱.۲. فرض کنید A و B دو جبر باناخ یکدار و $\phi: A \longrightarrow B$ یک نگاشت خطی پیوسته باشد به‌طوری که

$$x, y \in A, \quad xy = \mathbf{1} \quad \Longrightarrow \quad \phi(xy) = \phi(x)\phi(y).$$

اگر $\phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$، آنگاه ϕ یک همریختی ژوردان است.

ملاحظهٔ ۱.۳. فرض کنید A و B دو جبر باناخ یکدار و $\phi: A \longrightarrow B$ یک نگاشت خطی پیوسته دوسویی باشد به‌طوری که

$$x, y \in A, \quad xy = \mathbf{1} \quad \Longrightarrow \quad \phi(xy) = \phi(x)\phi(y).$$

در این صورت پوشا بودن ϕ ایجاب می‌کند که $\phi(\mathbf{1}) \in Z(B)$، که در آن $Z(B)$ مرکز B است. بنابر قضیه **۱.۱**، با فرض $x = \phi^{-1}(\mathbf{1})$، داریم:

$$\phi(\phi^{-1}(\mathbf{1})^2)\phi(\mathbf{1}) = \phi(\phi^{-1}(\mathbf{1}))^2 = \mathbf{1}.$$

لذا $\phi(\mathbf{1})$ در B معکوس‌پذیر با معکوس $\phi(\phi^{-1}(\mathbf{1})^2)$ می‌باشد. اکنون می‌توان نگاشت $\theta: A \longrightarrow B$ با ضابطه

$$\theta(x) = \phi^{-1}(\mathbf{1})\phi(x), \qquad x \in A,$$

را تعریف کرد که به وضوح یک همریختی ژوردان است.

مثال زیر نشان می‌دهد که در نتیجه **۱.۲**، شرط یکانی بودن ϕ اساسی است.

مثال ۱.۴. فرض کنید

$$\mathrm{A} = \left\{ \begin{bmatrix} z & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & z & \alpha_3 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} : \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, z \in \mathbb{C} \right\},$$

زیر جبری از جبر ماتریس‌های 3×3 باشد. نگاشت $\phi: \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi\left(\begin{bmatrix} z & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & z & \alpha_3 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

دراین صورت برای هر $x, y \in A$ با شرط $xy = 1$ داریم:

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y),$$

در حالی که ϕ، یک همریختی ژوردان نیست.

قضیه ۱.۵. فرض کنید $\phi: A \longrightarrow B$ یک نگاشت خطی پیوسته از C^*-جبر یکدار A به C^*-جبر B باشد به‌طوری که

$$x, y \in A, \quad xy^* = \mathbf{1} \quad \Longrightarrow \quad \phi(xy^*) = \phi(x)\phi(y)^*.$$

اگر برای هر $a \in A_{sa}$، $\phi(\mathbf{1})$ و $\phi(a)$ جابجا شوند، آنگاه برای هر $x \in A$،

$$\phi(x^*)\phi(\mathbf{1}) = \phi(\mathbf{1})\phi(x)^*, \qquad \phi(x)^2\phi(\mathbf{1}) = \phi(x^2)\phi(\mathbf{1})^2.$$

اثبات. از آنجا که $\mathbf{1} = \mathbf{1}^* \times \mathbf{1}$، لذا $\phi(\mathbf{1}) = \phi(\mathbf{1})\phi(\mathbf{1})^*$ و درنتیجه

$$\phi(\mathbf{1}) = \phi(\mathbf{1})^*.$$

فرض کنید $a \in A_{sa}$ دلخواه باشد. برای هر $t \in \mathbb{R}$، قرار می‌دهیم $x = y = e^{-ita}$. در این صورت $y^* = e^{ita}$ و بنابراین، $xy^* = \mathbf{1}$. ازاین‌رو،

$$\phi\left(e^{-ita}\right)\phi\left(e^{-ita}\right)^* = \phi(\mathbf{1}).$$

با مشتق‌گیری نسبت به متغیر t به دست می‌آوریم:

$$\phi\left(-ae^{-ita}\right)\phi\left(e^{-ita}\right)^* + \phi\left(e^{-ita}\right)\phi\left(ae^{-ita}\right)^* = 0. \tag{4}$$

با جایگذاری $t = 0$ در رابطه (4)، برای هر $a \in A_{sa}$، داریم:

$$\phi(\mathbf{1})\phi(a)^* = \phi(a)\phi(\mathbf{1})^*.$$

چون $\phi(\mathbf{1})$ خودالحاق است، پس

$$\phi(\mathbf{1})\phi(a)^* = \phi(a)\phi(\mathbf{1}), \qquad a \in A_{sa}. \tag{5}$$

برای هر $x \in A$، عناصر خودالحاق a و b موجود هستند به‌طوری که $x = a + ib$. بنابراین، طبق رابطه (5)،

$$\begin{aligned}\phi(x^*)\phi(\mathbf{1}) = \phi(a - ib)\phi(\mathbf{1}) &= \phi(a)\phi(\mathbf{1}) - i\phi(b)\phi(\mathbf{1}).\\ &= \phi(\mathbf{1})\phi(a)^* - i\phi(\mathbf{1})\phi(b)^*\\ &= \phi(\mathbf{1})\phi(x)^*.\end{aligned}$$

درنتیجه،

$$\phi(x^*)\phi(\mathbf{1}) = \phi(\mathbf{1})\phi(x)^*, \qquad x \in A.$$

با مشتق‌گیری مجدد از رابطه (4) نسبت به متغیر t، داریم:

$$\begin{aligned}&\phi\left(-a^2e^{-ita}\right)\phi\left(e^{-ita}\right)^* + \phi\left(ae^{-ita}\right)\phi\left(ae^{-ita}\right)^* =\\ &\phi\left(-ae^{-ita}\right)\phi\left(ae^{-ita}\right)^* + \phi\left(e^{-ita}\right)\phi\left(a^2e^{-ita}\right)^*.\end{aligned} \tag{6}$$

با جایگذاری $t = 0$ در رابطه (6)، تساوی

$$\phi(-a^2)\phi(\mathbf{1})^* + \phi(a)\phi(a)^* = \phi(-a)\phi(a)^* + \phi(\mathbf{1})\phi(a^2)^*,$$

حاصل می‌شود. از این‌رو، برای هر $a \in A_{sa}$،

$$\phi(a)\phi(a)^* = \phi(\mathbf{1})\phi(a^2)^* = \phi(a^2)\phi(\mathbf{1}).$$

با جایگذاری $a + b$ در رابطه فوق به دست می‌آوریم:

$$(7)\ \phi(a)\phi(b)^* + \phi(b)\phi(a)^* = \phi(ab + ba)\phi(\mathbf{1}).$$

فرض کنید $x \in A$ و عناصر خودالحاق a و b را طوری درنظر بگیرید که $x = a + ib$. بنابراین با استفاده از رابطه (7)،

$$\begin{aligned}
\phi(x^2)\phi(\mathbf{1})^2 &= [\phi(a^2) - \phi(b^2) + i\phi(ab + ba)]\phi(\mathbf{1})^2 \\
&= [\phi(a)\phi(a)^* - \phi(b)\phi(b)^* + i\phi(a)\phi(b)^* + i\phi(b)\phi(a)^*]\,\phi(\mathbf{1}). \\
&= \phi(a)[\phi(a)^*\phi(\mathbf{1})] - \phi(b)[\phi(b)^*\phi(\mathbf{1})] \\
&\quad + i\phi(a)[\phi(b)^*\phi(\mathbf{1})] + i\phi(b)[\phi(a)^*\phi(\mathbf{1})] \\
&= \phi(a)^2\phi(\mathbf{1}) - \phi(b)^2\phi(\mathbf{1}) + i[\phi(a)\phi(b) + \phi(b)\phi(a)]\,\phi(\mathbf{1}) \\
&= \phi(x)^2\phi(\mathbf{1}).
\end{aligned}$$

درنتیجه برای هر $x \in A$،

$$\phi(x^2)\phi(\mathbf{1})^2 = \phi(x)^2\phi(\mathbf{1}),$$

و بنابراین نتیجه مطلوب حاصل می‌گردد.

یک نتیجه مستقیم از قضیه قبل، به صورت زیر می‌باشد.

نتیجه ۱.۶. فرض کنید A و B دو C^*-جبر یکدار و $\phi: A \longrightarrow B$ یک نگاشت خطی پیوسته باشد به‌طوری که

$$x, y \in A, \quad xy^* = \mathbf{1} \quad \Longrightarrow \quad \phi(xy^*) = \phi(x)\phi(y)^*.$$

اگر $\phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$، آنگاه ϕ یک $*$-همریختی ژوردان است.

قضیه ۱.۷. فرض کنید $\phi: A \longrightarrow B$ یک نگاشت خطی پیوسته از C^*-جبر یکدار A به C^*-جبر B باشد به‌طوری که

$$x, y \in A, \quad x \circ y^* = \mathbf{1} \quad \Longrightarrow \quad \phi(x \circ y^*) = \phi(x) \circ \phi(y)^*.$$

در این صورت برای هر $x \in A$،

$$\phi(x) \circ \phi(\mathbf{1}) = \phi(\mathbf{1}) \circ \phi(x)^*,$$

و

$$\phi(x^2)\circ\phi(\mathbf{1})^*+\phi(x^2)^*\circ\phi(\mathbf{1})=2\phi(x)\circ\phi(x)^*.$$

اثبات. فرض کنید $a\in A_{sa}$ دلخواه باشد. برای هر $t\in\mathbb{R}$، قرار می‌دهیم $x=\frac{1}{2}e^{ita}$ و $y=e^{ita}$. در این صورت $x\circ y^*=\mathbf{1}$. از این‌رو،

$$(8)\phi\left(e^{ita}\right)\circ\phi\left(e^{ita}\right)^*=2\phi(\mathbf{1}),\qquad a\in A_{sa}.$$

با جایگذاری $t=0$ در رابطه (8)، داریم:

$$\phi(\mathbf{1})\circ\phi(\mathbf{1})^*=2\phi(\mathbf{1}).$$

بنابراین، $\phi(\mathbf{1})=\phi(\mathbf{1})^*$. با مشتق‌گیری از رابطه (8) نسبت به متغیر t، به دست می‌آوریم:

$$\phi\left(ae^{ita}\right)\circ\phi\left(e^{ita}\right)^*-\phi\left(e^{ita}\right)\circ\phi\left(ae^{ita}\right)^*=0. \tag{9}$$

در رابطه فوق قرار می‌دهیم $t=0$، و از آنجا که $\phi(\mathbf{1})$ خودالحاق است، نتیجه می‌شود که

$$\phi(a)\circ\phi(\mathbf{1})=\phi(\mathbf{1})\circ\phi(a)^*,\qquad a\in A_{sa}.$$

برای هر $x\in A$، عناصر خودالحاق a و b موجود هستند به‌طوری که $x=a+ib$. بنابراین،

$$\phi(x)\circ\phi(\mathbf{1})=\phi(\mathbf{1})\circ\phi(x)^*,\qquad x\in A.$$

با مشتق‌گیری از رابطه (9) نسبت به متغیر t، داریم:

$$\phi\left(a^2e^{ita}\right)\circ\phi\left(e^{ita}\right)^*+\phi\left(a^2e^{ita}\right)^*\circ\phi\left(e^{ita}\right)=2\phi\left(ae^{ita}\right)\circ\phi\left(ae^{ita}\right)^*.$$

با جایگذاری $t=0$ در رابطه فوق تساوی زیر حاصل می‌شود.

$$\phi(a^2)\circ\phi(\mathbf{1})^*+\phi(a^2)^*\circ\phi(\mathbf{1})=2\phi(a)\circ\phi(a)^*,\qquad a\in A_{sa}.$$

با یک بحث مشابه که در اثبات قضیه **۱.۵** بکار رفت، برای هر $x\in A$، نتیجه می‌شود که

$$\phi(x^2)\circ\phi(\mathbf{1})^*+\phi(x^2)^*\circ\phi(\mathbf{1})=2\phi(x)\circ\phi(x)^*.$$

بنابراین اثبات کامل می‌گردد.

از قضیه قبل نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۱.۸. فرض کنید A و B دوC^*-جبر یکدار و $\phi:A\longrightarrow B$ یک نگاشت خطی پیوسته باشد به‌طوری که

$$x,y\in A,\quad x\circ y^*=\mathbf{1}\qquad\Longrightarrow\quad\phi(x\circ y^*)=\phi(x)\circ\phi(y)^*.$$

اگر $\phi(\mathbf{1})=\mathbf{1}$، آنگاه ϕ یک $*$-همریختی ژوردان است.

۲. اشتقاق‌های ژوردان

در این بخش نگاشت‌های خطی پیوسته از یک جبر باناخ به یک A-مدول باناخ که حافظ حاصل‌ضرب یا حاصل‌ضرب ژوردان در نقطه $w = \mathbf{1}$ می‌باشند، بررسی می‌شود.

قضیه ۲.۱. فرض کنید A یک جبر باناخ یکدار و X یک A-مدول باناخ یکدار باشد. اگر $\sigma: A \longrightarrow X$ یک نگاشت خطی پیوسته باشد به‌طوری که

$$x, y \in A, \quad xy = \mathbf{1} \quad \Longrightarrow \quad \sigma(xy) = \sigma(x)y + x\sigma(y),$$

آنگاه σ یک اشتقاق ژوردان است.

اثبات. از آنجا که $\mathbf{1} = \mathbf{1} \times \mathbf{1}$، لذا $\sigma(\mathbf{1}) = 2\sigma(\mathbf{1})$ و درنتیجه $\sigma(\mathbf{1}) = 0$. فرض کنید $a \in A$ دلخواه باشد. برای هر $t \in \mathbb{R}$ ، قرار می‌دهیم $x = e^{ita}$ و $y = e^{-ita}$. در این صورت $xy = \mathbf{1}$. بنابراین،

$$\sigma\left(e^{ita}\right)e^{-ita} + e^{ita}\sigma\left(e^{-ita}\right) = \sigma(\mathbf{1}) = 0.$$

با دوبار مشتق‌گیری از رابطه فوق نسبت به متغیر t به دست می‌آوریم:

$$\sigma\left(a^2e^{ita}\right)e^{-ita} + e^{ita}\sigma\left(a^2e^{-ita}\right) + \sigma\left(e^{ita}\right)a^2e^{-ita} + a^2e^{ita}\sigma\left(e^{-ita}\right) =$$

$$(10)\qquad 2\sigma\left(ae^{-ita}\right)ae^{-ita} + 2ae^{ita}\sigma\left(ae^{-ita}\right).$$

با جایگذاری $t = 0$ در رابطه (10)، تساوی زیر حاصل می‌شود.

$$\sigma(a^2) = \sigma(a)a + a\sigma(a), \qquad a \in A.$$

بنابراین، σ یک اشتقاق ژوردان است.

قضیه ۲.۲. فرض کنید A یکC^*-جبر یکدار و X یک $*$-A-مدول باناخ یکدار باشد. اگر $\sigma: A \longrightarrow X$ یک نگاشت خطی پیوسته باشد به‌طوری که

$$x, y \in A, \quad xy^* = \mathbf{1} \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma(xy^*) = \sigma(x)y^* + x\sigma(y)^*,$$

آنگاه σ یک $*$-اشتقاق است.

اثبات. از آنجا که $\mathbf{1} = \mathbf{1} \times \mathbf{1}^*$، لذا $\sigma(\mathbf{1}) = \sigma(\mathbf{1})+\sigma(\mathbf{1})^*$ و درنتیجه $\sigma(\mathbf{1})^* = 0$. بنابراین، $\sigma(\mathbf{1}) = 0$. فرض کنید $a \in A_{sa}$ دلخواه باشد. برای هر $t \in \mathbb{R}$، قرار می‌دهیم $x = y = e^{-ita}$.

در این صورت $xy^* = \mathbf{1}$. از این‌رو،

$$\sigma\left(e^{-ita}\right)e^{ita}+e^{-ita}\sigma\left(e^{-ita}\right)^{*}=\sigma(\mathbf{1})=0.$$

با مشتق‌گیری نسبت به متغیر t به دست می‌آوریم:

$$\sigma\left(-ae^{-ita}\right)e^{ita}+\sigma\left(e^{-ita}\right)ae^{ita}-ae^{-ita}\sigma\left(e^{-ita}\right)^{*}+e^{-ita}\sigma\left(ae^{-ita}\right)^{*}=0. \qquad (11)$$

با جایگذاری $t=0$ در رابطه (11)، تساوی

$$\sigma(a)=\sigma(a)^{*}, \qquad a\in A_{sa},$$

حاصل می‌شود. برای هر $x\in A$، عناصر خودالحاق a و b موجود هستند به‌طوری که $x=a+ib$. بنابراین،

$$\sigma(x^{*})=\sigma(a-ib)=\sigma(a)^{*}-i\sigma(b)^{*}=\sigma(x)^{*}.$$

درنتیجه σ خودالحاق است. با مشتق‌گیری از رابطه (11) نسبت به متغیر t، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\sigma\left(a^{2}e^{-ita}\right)e^{-ita}+e^{-ita}\sigma\left(a^{2}e^{-ita}\right)^{*}+\sigma\left(e^{-ita}\right)a^{2}e^{-ita}+a^{2}e^{-ita}\sigma\left(e^{-ita}\right)^{*}\\ =2\sigma\left(ae^{-ita}\right)ae^{ita}+2ae^{-ita}\sigma\left(ae^{-ita}\right)^{*}.\end{aligned}$$

با جایگذاری $t=0$ در رابطه فوق و با توجه به تساوی $\sigma(a)=\sigma(a)^{*}$، نتیجه می‌شود که

$$\sigma(a^{2})=\sigma(a)a+a\sigma(a), \qquad a\in A_{sa}.$$

برای هر $a,b\in A_{sa}$، داریم:

$$\sigma((a+b)^{2})=\sigma(a+b)(a+b)+(a+b)\sigma(a+b),$$

از این‌رو،

$$\sigma(ab+ba)=\sigma(a)b+a\sigma(b)+\sigma(b)a+b\sigma(a).$$

برای هر $x\in A$، عناصر خودالحاق a و b موجود هستند به‌طوری که $x=a+ib$. بنابراین،

$$\begin{aligned}\sigma(x^{2})&=\sigma(a^{2})-\sigma(b^{2})+i\sigma(ab+ba)\\ &=\sigma(a)a+a\sigma(a)-\sigma(b)b-b\sigma(b)+i[\sigma(a)b+a\sigma(b)+\sigma(b)a+b\sigma(a)].\\ &=\sigma(x)x+x\sigma(x).\end{aligned}$$

درنتیجه σ یک $*$-اشتقاق ژوردان است. بنابر قضیه جانسون، σ یک $*$-اشتقاق است.

قضیه ۲.۳. فرض کنید A یک C^{*}-جبر یکدار و X یک $*$-A-مدول باناخ یکدار باشد. اگر $\sigma: A\longrightarrow X$ یک نگاشت خطی پیوسته باشد به‌طوری که

$$x, y \in A, \quad x \circ y^* = \mathbf{1} \quad \Longrightarrow \quad \sigma(x \circ y^*) = \sigma(x) \bullet y^* + x \bullet \sigma(y)^*,$$

آنگاه σ یک *-اشتقاق است.

اثبات. فرض کنید $a \in A_{sa}$ دلخواه باشد. برای هر $t \in \mathbb{R}$، با فرض $x = \frac{1}{2}e^{ita}$ و $y = e^{ita}$، داریم $x \circ y^* = \mathbf{1}$. بنابراین،

$$\sigma\left(e^{ita}\right) \bullet e^{-ita} + e^{ita} \bullet \sigma\left(e^{ita}\right)^* = 2\,\sigma(\mathbf{1}). \tag{12}$$

با جایگذاری $t = 0$ در رابطه (12)، تساوی زیر حاصل می‌شود.

$$2\,\sigma(\mathbf{1}) = 2\,\sigma(\mathbf{1}) + 2\sigma(\mathbf{1})^*.$$

از این‌رو، $\sigma(\mathbf{1})^* = 0$ و درنتیجه $\sigma(\mathbf{1}) = 0$.

با مشتق‌گیری از رابطه (12) نسبت به متغیر t، به دست می‌آوریم:

$$\sigma\left(ae^{ita}\right) \bullet e^{-ita} - ae^{-ita} \bullet \sigma\left(e^{ita}\right) - \sigma\left(e^{ita}\right)^* \bullet ae^{ita} - e^{ita} \bullet \sigma\left(ae^{ita}\right)^* = 0. \tag{13}$$

با جایگذاری $t = 0$ در رابطه فوق، نتیجه می‌شود که

$$2\sigma(a) - 2\sigma(a)^* = \sigma(\mathbf{1}) \bullet a + a \bullet \sigma(\mathbf{1})^* = 0.$$

بنابراین، برای هر $a \in A_{sa}$، $\sigma(a) = \sigma(a)^*$. با یک اثبات مشابه که در قضیه قبل استفاده شد، ملاحظه می‌کنیم که σ خودالحاق است. با مشتق‌گیری از رابطه (13) نسبت به متغیر t، داریم:

$$\sigma\left(a^2e^{ita}\right) \bullet e^{-ita} - 2\sigma\left(ae^{ita}\right) \bullet ae^{-ita} + \sigma\left(e^{ita}\right) \bullet a^2e^{-ita}$$
$$+\sigma\left(a^2e^{ita}\right)^* \bullet e^{ita} - 2\sigma\left(ae^{ita}\right)^* \bullet ae^{ita} + \sigma\left(e^{ita}\right)^* \bullet a^2e^{ita} = 0.$$

با جایگذاری $t = 0$ در رابطه فوق به دست می‌آوریم:

$$\sigma(a^2) + \sigma(a^2)^* = \sigma(a) \bullet a + a \bullet \sigma(a)^*.$$

از آنجا که $\sigma(a) = \sigma(a)^*$، نتیجه می‌شود که

$$\sigma(a^2) = \sigma(a)a + a\sigma(a), \qquad a \in A_{sa}.$$

اکنون با یک اثبات مشابه که در قضیه قبل استفاده شد، برای هر $x \in A$، تساوی

$$\sigma(x^2) = \sigma(x)x + x\sigma(x).$$

حاصل می‌شود. درنتیجه σ یک *-اشتقاق ژوردان است و بنابر قضیه جانسون، σ یک *-اشتقاق است.

References

1. J. Alaminos, M. Bresar, J. Extremera and A. R. Villena, Characterizing Jordan maps on C^*-algebras through zero products, Proc. Roy. Soc. Edinb. Sect., **53** (2010), 543-555.

2. J. Araujo and K. Jarosz, Biseparating maps between operator algebras, J. Math. Anal. Appl., **282** (2003), 48-55.

3. M. Burgos and J. Sanchez-Ortega, On mappings preserving zero products, Linear Multilinear Algebras, **61**(3) (2013), 323-335.

4. M. A. Chebotar, W. F. Ke, and P. H. Lee, Maps characterized by action on zero products, Pacific J. Math., **216** (2004), 217-228.

5. B. Fadaee and H. Ghahramani, Linear maps on C^*-algebras behaving like (anti-)derivations at orthogonal elements, Bull. Malays. Math. Sco., **43**(3), (2020), 2851-2859.

6. H. Ghahramani, On derivations and Jordan derivations through zero products, Operators and Matrices, **8**(3), (2014), 759–771.

7. H. Ghahramani, Characterizing Jordan maps on triangular rings through commutative zero products, Mediterranean J. Math., **15**(2), (2018), 1-10.

8. L. Hou and L. Zhao, Jordan zero product preserving additive maps on operator algebras, J. Math. Anal. Appl., **314** (2006), 689-700.

9. B. E. Johnson, Symmetric amenability and the nonexistence of Lie and Jordan derivations, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **120** (1996), 455-473.

10. F. Lu, Characterization of derivations and Jordan derivations on Banach algebras, Linear Algebra Appl. **430** (2009) 2233–2239**.**

۱۱. A. Zivari-Kazempour and A. Bodaghi, Generalized derivations and generalized Jordan derivations on C^*-algebras through zero products, J. Math., (2022), 1-6.

۱۲. A. Zivari-Kazempour, Characterization of n-Jordan homomorphisms and their automatic continuity on Banach algebras, Ann. Univ. Ferrara, **69** (2023), 263-271.

۱3. A. Zivari-Kazempour, Characterization of Jordan homomorphisms and Jordan derivation Khayyam J. Math., **10**(1), (2024), 1-9