Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Properties of Orbits Space of Indefinite Hamiltonian Resonances

Reza Mazrooei-Sebdani [1] ✉, **Omid Toghraei** [2]

1. Corresponding Author, Department of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, Isfahan 84156-83111, Iran. ✉ E-mail: mazrooei@iut.ac.ir
2. Department of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, Isfahan 84156-83111, Iran. E-mail: o.toghraei@math.iut.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 19 February 2024
Received in revised form: 29 May2025
Accepted: 30 June 2025
Published online: 4 October 2025

Keywords:
Hamiltonian resonance,
Indefinite resonance,
Normal form,
Orbits space.

ABSTRACT

Introduction

The study of Hamiltonian systems around the elliptic equilibrium points, which is a non-generic subject in the study of Hamiltonian systems, has received attention in recent decades. Such systems appear in many applied models, including molecular physics, galactic dynamics, and mechanics.

Consider a Hamiltonian of n degrees of freedom, whose quadratic part is as follows,

$$\mathrm{H}_2(q.p) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \omega_j\left(q_j^2 + p_j^2\right), \quad \omega_j \epsilon \mathbb{Z}, \quad j = 1.\dots.n. \tag{1}$$

The vector $\omega \coloneqq (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ is called frequency vector (related to H_2) and its components are called frequency. If all frequencies are non-zero, ω is called non-degenerate, and if at least one of the frequencies is zero, we say ω is degenerate.

Definition. Any integer-valued vector perpendicular to the frequency vector ω is called a resonance or annihilator vector. In other words, $k \in \mathbb{Z}^n/_{\{0\}}$ is a resonant vector for the frequency vector ω if

$$\langle k, \omega \rangle = \sum_{j=1}^{n} k_j \omega_j = 0.$$

If there is such an annihilator vector for ω, we call the ω resonance frequency vector. If at least one of the components of the non-degenerate resonance frequency vector ω is negative, the Hamiltonian resonance is called indefinite.

Materials and Methods

In this paper, we focus on indefinite Hamiltonian resonances, introducing important physical models to illustrate their occurrence in various fields of science, including the satellite problem, plasma interactions, Pais-Uhlenbeck oscillators (PU), and a problem in cosmology. Then, by using the normal form

of indefinite Hamiltonian resonances, we will discuss the space structure of the corresponding vector field.

Results and discussion

As we mentioned, there are many models passing indefinite Hamiltonian resonances. We present and describe the properties of the space of orbits of indefinite Hamiltonian resonances topologically. Specifically, we will see that it can be unbounded in comparison to the space of orbits of other Hamiltonian resonances unless we deal with some degeneracy conditions.

How to cite: Mazrooei-Sebdani, R., & Toghraei, O., (2025). Properties of Orbits Space of Indefinite Hamiltonian Resonances. *Mathematical Researches*, **11** (1), 19 – 34.

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

ویژگی‌های فضای مدارهای تشدیدهای همیلتونی نامعین

رضا مزروعی‌سبدانی [۱]✉، امید طغرایی [۲]

۱. نویسنده مسئول، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، صندوق پستی،۸۳۱۱۱-۸۴۱۵۶، اصفهان، ایران. رایانامه: mazrooei@iut.ac.ir
۲. دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، صندوق پستی،۸۳۱۱۱-۸۴۱۵۶، اصفهان، ایران. رایانامه: o.toghraei@math.iut.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۱/۳۰
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۳/۸
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۴/۹
تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۷/۱۲

واژه‌های کلیدی:
تشدید همیلتونی،
تشدید نامعین،
فرم نرمال،
فضای مدارها.

چکیده

در این مقاله به تشدیدهای همیلتونی نامعین و به‌خصوص فرم نرمال توابع همیلتونی مربوطه برحسب مختصات عمل-زاویه می‌پردازیم. آنگاه همچنین برخی مدل‌های مختلف از فیزیک و مکانیک گذرنده از تشدیدهای همیلتونی نامعین، را معرفی می‌کنیم. ویژگی‌های فضای حالت و فضای مدارهای مربوط به تشدیدهای همیلتونی نامعین به‌خصوص ویژگی‌های توپولوژیکی و خاصیت بی‌کرانی آن‌ها را به‌عنوان نتیجه اصلی مقاله بررسی خواهیم کرد.

استناد: مزروعی‌سبدانی، رضا؛ طغرایی، امید (۱۴۰۴). ویژگی‌های فضای مدارهای تشدیدهای همیلتونی نامعین. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۱** (۱)، ۱۹ – ۳۴.

مقدمه

مطالعه‌ی سیستم‌های همیلتونی حول نقاط تعادل بیضوی تشدیدشده که یک موضوع غیرعام در بحث سیستم‌های همیلتونی است، در دهه‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته‌است. چنین سیستم‌هایی در بسیاری از مسائل کاربردی از جمله فیزیک مولکولی، دینامیک‌های کهکشانی و مکانیک ظاهر می‌شوند.

یک تابع همیلتونی از n درجه‌ی آزادی را در نظر بگیرید، که قسمت درجه دوم آن به‌صورت زیر است،

$$\mathrm{H}_2(q.p) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\omega_j\left(q_j^2 + p_j^2\right), \quad \omega_j\epsilon\mathbb{Z}, \quad j = 1.\dots.n. \tag{1}$$

بردار $\omega := (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ را بردار فرکانس (مربوط به H_2) و مولفه‌های آن را فرکانس می‌نامیم. اگر همه فرکانس‌ها ناصفر باشد، ω را ناتباهیده و اگر حداقل یکی از فرکانس‌ها صفر باشد، ω را تباهیده گوییم.

تعریف. هر بردار صحیح- مقدار عمود بر بردار فرکانسω را یک بردار تشدیدشده یا پوچ‌ساز می‌نامند. به عبارت دیگر $k \in \mathbb{Z}^n/_{\{0\}}$ یک بردارتشدید برای بردار فرکانس ω است، اگر

$$\langle k, \omega\rangle = \sum_{j=1}^{n} k_j\omega_j = 0.$$

اگر چنین بردار پوچ‌سازی برای ω وجود داشته‌باشد، ω را یک بردار فرکانس تشدید می‌نامیم. اندازه بردار تشدید $k := (k_1, k_2, \dots, k_n)$ را با $\boldsymbol{k}$ نمایش می‌دهیم، یعنی،

$$\boldsymbol{k} = \sum_{j=1}^{n}\left|k_j\right|.$$

اگر حداقل یکی از مولفه‌های بردار فرکانس تشدید ناتباهیده ω، منفی باشد، تشدید همیلتونی را نامعین می‌نامند.

از جمله مراحل اصلی مطالعه تشدیدهای همیلتونی، به‌کارگیری فرم‌های نرمال آن‌ها می‌باشد. نوشتن فرم‌های نرمال برحسب برخی مختصات به ساده‌سازی بیشتر آن ها کمک می‌کند. مختصات عمل-زاویه این ویژگی را دارد.

شکل تبدیل‌یافته از مختصات دکارتی (q_j, p_j) به مختصات قطبی (r_j, θ_j) برای $j = 1.\dots.n$ سیمپلکتیک نیست، یعنی ساختار دستگاه‌های همیلتونی راحفظ نمی‌کند. اما از آنجایی که $dq_j \wedge \mathrm{d}p_j = r_j\mathrm{d}r_j \wedge \mathrm{d}\theta_j = \mathrm{d}\left(\frac{r_j^2}{2}\right) \wedge d\theta$، به‌صورت زیر یک تغییر مختصات سیمپلکتیک داریم،

$$I_j = \frac{1}{2}\left(q_j^2 + p_j^2\right) = \frac{r_j^2}{2}, \quad \theta_j = arctan\left(\frac{p_j}{q_j}\right)$$

یا

$$q_j = \sqrt{2I_j}\, cos\theta_j, \qquad p_j = \sqrt{2I_j}\, sin\theta_j,$$

برای

$$\theta_j \in \mathbb{S}^1, \quad I_j \in [0,\infty)\,.$$

درواقع متغیرهای عمل – زاویه (I_j,θ_j)، یک تبدیل سیمپلکتیک معرفی می‌کنند. برای مشاهده جزئیات بیشتر می‌توانید به کتاب [31] مراجعه نمایید.

از یک دیدگاه می‌توان تشدیدهای همیلتونی را به دو دسته‌ی تشدیدهای مرتبه‌ی اول اصلی و تشدیدهای مرتبه‌ی دوم اصلی تقسیم کرد.
تشدیدهای مرتبه اول اصلی، آن دسته از تشدیدهایی هستند، که در مرتبه‌ی اول نرمال‌سازی (نرمال‌سازی تا درجه‌ی سه) یک برهم‌کنش کامل بین n درجه‌ی آزادی سیستم بروز می‌کند، درحالی‌که در تشدیدهای مرتبه‌ی دوم اصلی چنین رخدادی در مرتبه‌ی دوم نرمال‌سازی (نرمال‌سازی تا درجه‌ی چهارم) ایجاد می‌شود.

تعریف. تعداد بردار های تشدید مستقل خطی با اندازه $\boldsymbol{k}$ را عدد برهم‌کنش نامیده و با σ_k نمایش می‌دهیم. درواقع عدد برهم‌کنش، تعداد ترکیب‌های مستقل مولفه‌های زاویه‌ای θ_j در فرم نرمال تابع همیلتونی با قسمت درجه دوم در مختصات عمل-زاویه را نشان می‌دهند. اگر $\sigma_3 \geq n-1$، آنگاه ω را یک تشدید اصلی مرتبه اول می‌نامیم. اگر $\sigma_3 < n-1$ و $\sigma_3+\sigma_4 \geq n-1$، آنگاه ω را یک تشدید اصلی مرتبه دوم می‌نامیم.

در اینجا به‌طور مختصر برخی کارهای اصلی در مورد تشدیدهای همیلتونی را مرور می‌کنیم. نویسنده اول مقاله (رضا مزروعی سبدانی) طی سالیان گذشته تاکنون، مطالعات زیادی روی تشدیدهای همیلتونی سه و چهار درجه آزادی شامل بحث‌هایی در رابطه با انشعابات نسبت به پارامترهای تنظیم کننده، انتگرال‌ها و تاربندی‌ها به‌ویژه در رابطه با مسائل کاربردی، داشته‌است، به‌طوری‌که نتایج آن در مراجع [13,14, 26-30] قابل‌مشاهده هستند. یک مرور کلی در مورد نتایج اولیه روی تشدیدهای همیلتونی دو و سه درجه آزادی در فصل دهم کتاب [38] قابل‌مشاهده است. به‌طور جزئی‌تر به‌عنوان نمونه برخی نتایج در مورد تشدیدهای همیلتونی از سه درجه آزادی را بیان می‌کنیم. طی یک مطالعه در [41] جواب‌های تناوبی و نوع پایداری آن‌ها برای تشدیدهای مرتبه اول اصلی $1:2:\omega$ با $\omega = 1,2,3,4$، توسط ون در آ انجام شده‌است. با این مطالعه علاقه‌مندی در رابطه با بررسی انتگرال‌پذیری فرم‌های نرمال در چنین سیستم‌هایی بیشتر شد. از آن‌چه که در آثار مارتیننت و همکارانش[25] ، ون در آ و سندرز [42]، ون در آ [41] و ون در آ و ورهولست [44] برداشت می‌شود، این است که تشدیدهای مرتبه اول اصلی به جز تشدید $1:2:2$ در حالت کلی (بدون حضور تقارن‌های اضافی) در فرم نرمال بریده‌شده تا جملات درجه‌ی سه، انتگرال‌پذیر نیستند.

براساس یک دیدگاه بیشتر هندسی در مورد تشدید $1:2:3$ مطالعه‌ای توسط هووین و ورهولست در [17] ارائه شده‌است، به‌طوری که در آن با در نظر گرفتن فرم نرمال مرتبه دوم تشدید، به‌صورت عددی وجود یک مدار هموکلینیک نظیر یک نقطه‌ی تعادل نسبی را نشان می‌دهند. بعد از آن هووین در [16]، با استفاده از روش ملنیکوف این مطالعه را با اثبات این‌که منیفلدهای پایدار و ناپایدار تعادل نسبی به‌طور غیرمماسی تلاقی می‌کنند، تکمیل کرده و رفتار آشوبی در این تشدید را نشان می‌دهد.

برخی تحقیقاتی که در حوزه تشدیدهای مرتبه دوم اصلی صورت گرفته‌است، را در ادامه ارائه می‌کنیم.

در مورد تشدید $1:1:1$ پژوهش‌های نسبتا زیادی را می‌توان دید، که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به [5, 9-10] اشاره کرد.
در [34] به بررسی تشدید انتگرال‌پذیر $1:3:4$ پرداخته شده‌است. در این پایان‌نامه با کاهش سیستم به یک درجه‌ی آزادی به مطالعه‌ی کامل سیستم پرداخته شده و همچنین وجود انشعاب‌های هاپف همیلتونی در این تشدید نشان داده شده‌است.
ون در آ در [43] نتایجی در رابطه با تشدیدهای $1:2:\omega$ با $\omega = 5, 6$، برای انتگرال‌پذیری، مدارهای تناوبی و نوع پایداری آن‌ها ارائه نموده‌است.

اما در هرصورت با وجود تمامی تلاش‌های صورت گرفته، در تشدیدهای مرتبه‌ی دوم و مراتب بالاتر، با این‌که برخی نتایج موجود هستند، ولی کامل نیستند. به‌خصوص مطالعه در زمینه تشدید های همیلتونی نامعین، به ندرت انجام شده‌است و در مراجع به سختی می‌توان مطلبی در مورد آن‌ها یافت.

در این مقاله ما روی تشدیدهای همیلتونی نامعین متمرکز می‌شویم، به‌طوری‌که با معرفی برخی مدل‌های مهم فیزیکی، بروز آن‌ها را در بخش‌های مختلف فیزیک مرور می‌کنیم. آنگاه با بررسی فرم نرمال تشدیدهای همیلتونی نامعین به ساختار فضای مدارهای میدان برداری مربوطه می‌پردازیم.

به‌طور واضح‌تر، مطالب مقاله به این ترتیب سازماندهی شده‌است، که در بخش دوم مقاله نحوه محاسبه فرم نرمال تشدیدهای همیلتونی را مرور می‌کنیم. آنگاه در بخش سوم برخی مدل‌های مهم گذرنده از تشدیدهای نامعین شامل مساله ماهواره، برهم‌کنش‌های پلاسمایی، نوسانگرهای پایس-اولنبک (PU) و مساله‌ای از کیهان‌شناسی را معرفی می‌کنیم. در نهایت در بخش چهارم با استفاده از فرم نرمال تشدیدهای همیلتونی نامعین، به ویژگی‌های فضای مدارهای این تشدیدها می‌پردازیم و نتایج اصلی را ارائه می‌نماییم.

۱. فرم نرمال تشدید های همیلتونی

فرض کنید $M = \mathbb{R}^{2n}$ مجهز به براکت پواسن کانونی باشد. یک تابع همیلتونی تحلیلی H چنان در نظر بگیرید، که دارای یک نقطه تعادل است. بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد این نقطه تعادل مبدا است. همچنین از آنجا که مقدار تابع همیلتونی در مبدا روی دینامیک ها تاثیر ندارد، می توان فرض کرد مقدار آن در مبدا صفر است. بسط تیلور تابع H حول مبدا را به‌صورت

$$H(q,p) = H_2(q,p) + H_3(q,p) + H_4(q,p) + \cdots \tag{۲}$$

در نظر بگیرید، که در آن

$$q \equiv (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad p \equiv (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n,$$

و برای $m = 2, 3, 4, \dots$، $H_m(q,p)$ چندجمله‌ای همگن از درجه m برحسب متغیرهای (q,p) است.

در این مقاله، علاقه ما به حالتی است که $H_2(q,p)$ به شکل (۱) است و بردار فرکانس $\omega := (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ در حالت تشدید است. با استفاده از روش فرم نرمال می‌توان تابع همیلتونی (۲) را ساده سازی نمود و بسیاری از جملات H_3، H_4، ... را حذف نمود. درواقع طی یک سری تبدیلات کانونی نزدیک همانی به‌طوری‌که H_2، را به‌طورناوردا حفظ می‌کنند، فرم نرمال تابع همیلتونی به شکل

$$\bar{H} = H_2 + \bar{H}_3 + \bar{H}_4 + \dots + \bar{H}_{m-1} + O(m), \tag{۳}$$

خواهد شد، که در آن $m - 1 \geq 3$، مرتبه نرمال سازی است و $\bar{H}_j$ یک چندجمله‌ای همگن از درجه j است، چنان‌که $\{\bar{H}_j, H_2\} = 0$. بنابراین برای هر برشی از فرم نرمال دو انتگرال یعنی خود تابع همیلتونی نرمال شده و H_2 وجود دارند.

برای تشریح جزئیات بیشتر تابع همیلتونی (۲) به عنوان یک تابع حقیقی مقدار، آن را برحسب مختصات مختلط زیر می‌نویسیم،

$$z_j = q_j + ip_j, \qquad \bar{z}_j = q_j - ip_j, \qquad j = 1, \dots, n, \tag{۴}$$

آنگاه تابع همیلتونی به‌صورت زیر خواهد شد

$$H(z,\bar{z}) = H_2(z,\bar{z}) + H_3(z,\bar{z}) + H_4(z,\bar{z}) + \cdots,$$

که در آن برای هر $m = 2, 3, \dots$،

$$H_m(z,\bar{z}) = \sum_{|k|+|l|=m} c_{kl} z^k \bar{z}^l,$$

چنان‌که

$$|k| + |l| = \sum_{i=1}^{n} (k_i + l_i), \qquad z^k \bar{z}^l \equiv z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} \bar{z}_1^{l_1} \dots \bar{z}_n^{l_n}, \qquad k_i, l_i \geq 0\,.$$

فرض کنید P_r فضای همه چندجمله‌ای‌های همگن حقیقی مقدار از درجه $r \geq 2$ برحسب متغیرهای مختلط (۴) باشد. در این صورت فضای سری‌های توانی P به‌صورت زیر خواهد بود،

$$\bigoplus_{r=2}^{\infty} P_r\,.$$

یک تابع مشخص $F \in P$ را در نظر بگیرید و نگاشت خطی $ad_F: P \to P$ را به‌صورت $ad_F(H) = -\{F, H\}$ تعریف کنید.

گویند $H = \bigoplus_{r=2}^{\infty} H_r \in P$ فرم نرمال از جملات مرتبه $m \geq 2$ نسبت به $F \in P$ گفته می‌شود، اگر $ad_F(H_r) = -\{F, H_r\} = 0$ برای هر $2 \leq r \leq m$.

همچنین گفته می‌شود $F \in P_r$، فضای P را مجزا می‌کند، اگر بتوانیم برای $r \geq 2$ بنویسیم $P_r = N_r \oplus R_r$ که در آن $N_r = Ker(ad_F|_{P_r})$ و $R_r = Im(ad_F|_{P_r})$.

اگر $F \in P_r$، فضای P را مجزا کند، آنگاه $ad_F|_{R_r}: R_r \to R_r$ یک ایزومرفیسم است، به‌طوری‌که $\Gamma_r: R_r \to R_r$ معکوس آن را نشان می‌دهد.

با استفاده از گزاره زیر الگوریتمی برای تبدیل تابع همیلتونی به فرم نرمال آن ارائه خواهد شد.

گزاره ۱. (مرجع [45]) فرض کنید $H = \bigoplus_{r=2}^{\infty} H_r \in P$ فرم نرمال از مرتبه $(m-1) \geq 2$ نسبت به H_2 باشد، و فرض کنید H_2 فضای P را مجزا می‌کند. فرض کنید $H_m = \widehat{H}_m + \widetilde{H}_m$ که در آن $\widehat{H}_m \in N_m$ و $\widetilde{H}_m \in R_m$ و قرار دهید $K_m = \Gamma_m(\widetilde{H}_m)$. در این صورت $exp(ad_{K_m})(H)$ فرم نرمال از جملات مرتبه m نسبت به H_2 است، به‌طوری‌که با جملات از مرتبه $m-1$ از H یکسان است و $\widehat{H}_m$ جملات از مرتبه m آن است.

معمولا $H_2 \in P_2$، به‌صورت (1) در نظر گرفته می‌شود و گزاره فوق به‌کار برده می‌شود. در این حالت

$$ad_{H_2}(z^k \bar{z}^l) = -i\langle k-l, \omega\rangle\, z^k \bar{z}^l, \tag{5}$$

که در آن،

$$\langle k-l, \omega\rangle = \sum_{j=1}^{n} (k_j - l_j)\omega_j\,.$$

بنابراین H_2 فضای P را مجزا می‌کند و تک‌جمله ای $z^k \bar{z}^l$ با $|k| + |l| = m$ در فرم نرمال H_m باقی می‌ماند، یعنی نسبت به H_2 ناورداست اگر $\langle k-l, \omega\rangle = 0$.

بنابراین می‌توان نوشت $H_m = \widehat{H}_m + \widetilde{H}_m$، که در آن

$$\widehat{H}_m(z, \bar{z}) = \sum_{|k|+|l|=m, \langle k-l,\omega\rangle = 0} c_{kl} z^k\, \bar{z}^l,$$

و

$$\widetilde{H}_m(z,\bar{z}) = \sum_{|k|+|l|=m,\langle k-l,\omega\rangle\neq 0} c_{kl} z^k \,\bar{z}^l \,.$$

بنا به (5) همچنین داریم،

$$K_m = (\Gamma_m \circ \widetilde{H}_m)(z,\bar{z}) = i \sum_{|k|+|l|=m,\langle k-l,\omega\rangle\neq 0} \langle k-l,\omega\rangle^{-1} c_{kl} z^k \,\bar{z}^l \,.$$

در اینجا توجه کنید با توجه به این‌که

$$z_j = \sqrt{2I_j} e^{i\theta_j},$$

$$\bar{z}_j = \sqrt{2I_j} e^{-i\theta_j},$$

برای

$$\theta_j \in \mathbb{S}^1, \quad I_j \in [0,\infty),$$

به‌طوری‌که

$$\mathrm{d}z_j \wedge d\bar{z}_j = 2id\theta_j \wedge dI_j,$$

فرم نرمال می‌تواند برحسب مختصات عمل-زاویه (I_j,θ_j) برای $j = 1. \dots . n$ نوشته‌شود، به‌خصوص آن‌که در این صورت داریم،

$$\mathrm{H}_2 = \sum_{j=1}^{n} \omega_j I_j \,.$$

در رابطه با جزئیات بیشتر درباره فرآیند نرمال سازی شما می‌توانید، به مراجع [1, 31, 45] مراجعه کنید.

۲. مدل‌هایی با تشدیدهای همیلتونی نامعین

۱.۲ مساله‌ی ماهواره

یکی از توابع همیلتونی گذرنده از خانواده‌ای از تشدیدهای نامعین که در مراجع مختلف به آن پرداخته‌شده‌است، مربوط به مساله ماهواره است. به‌طور کلی مساله ماهواره مربوط به حرکت یک ماهواره نسبت به مرکز جرم آن در یک میدان جاذبه مرکزی است. همان‌طور که در مراجع [22, 23] می‌بینیم، ماهواره دارای گشتاورهای مرکزی اصلی اینرسی است، که لزوما مساوی نیستند و مرکز جرم آن براساس یک مدار دایره‌ای است. به علت اهمیت پروژه های اختردینامیک، اهمیت بررسی

پایداری مساله ماهواره همواره مورد توجه بوده‌است. برخی نتایج اصلی و پایه در زمینه پایداری این‌گونه مدل‌ها در مراجع [4, 8, 18, 22, 23, 24, 48, 49] آمده‌است. همچنین در مورد انواع پایداری شامل پایداری خطی، پایداری لیاپانوف و پایداری لی که مربوط به پایداری موثر می‌شود، در مقاله‌های مختلف بررسی شده‌اند. در حقیقت براساس مطالب مراجع مختلف مدل مربوط به مساله ماهواره یک دستگاه همیلتونی خودگردان از سه درجه آزادی است، به‌طوری‌که قسمت درجه دوم تابع همیلتونی نظیر در دو ناحیه I و II مشخص برحسب مختصات عمل به‌ترتیب به‌صورت

$$H_2(I) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3$$

و

$$H_2(I) = \omega_1 I_1 - \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3$$

است، به‌طوری‌که فرکانس های $\omega_j \geq 0, j = 1, 2,3$ برحسب پارامترهای مختلف مدل هستند. بنابراین همان‌طورکه مشاهده می‌شود، این مدل در ناحیه II، از تشدید نامعین $\omega_1 : -\omega_2 : \omega_3$ عبور می‌کند.

۲,۲ برهم‌کنش‌های پلاسمایی

به‌طورکلی برهم‌کنش موج‌های پلاسمایی براساس دستگاه‌های همیلتونی می‌تواند فرمول‌بندی شود. به‌طور طبیعی وقتی با مدهای انرژی منفی مواجه هستیم، تشدیدهای همیلتونی نامعین در تابع همیلتونی ظاهر می‌شوند. در مقاله [19]، چند برهم‌کنش از سه موج با انرژی‌های منفی معرفی می‌شوند، به طوری که دستگاه‌های همیلتونی خودگردان از سه درجه آزادی با تشدید نامعین تشکیل می‌دهند. درواقع برای فرکانس‌های $\omega_j \geq 0, j = 1, 2, 3$ توابع همیلتونی مربوط به این برهم‌کنش‌ها برحسب مختصات عمل-زاویه عبارتند از،

$$H(I) = \omega_1 I_1 - \omega_2 I_2 - \omega_3 I_3 + \gamma\sqrt{I_1 I_2 I_3}\, sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

به‌طوری‌که از تشدید نامعین $\omega_1 : -\omega_2 : -\omega_3$ عبور می‌کند و همچنین،

$$K(I) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 - \omega_3 I_3 + \delta\sqrt{I_1 I_2 I_3}\, sin(\theta_1 - \theta_2 + \theta_3)$$

به‌طوری‌که از تشدید نامعین $\omega_1 : \omega_2 : -\omega_3$ عبور می‌کند.

۳,۲ نوسانگرهای PU

یک خانواده مهم تشدیدهای همیلتونی نامعین نوسانگرهای پایس-اولنبک (PU) است. این نوسانگر به عنوان یکی از نوسانگرهایی که مورد علاقه بسیاری از محققین و دانشمندان در حوزه دستگاه‌های مکانیکی با مشتقات مراتب بالاتر است، چنان‌که در نظریه کوانتم ظاهر می‌شود (می‌توانید مراجع [2, 3, 33, 40, 47] را مشاهده کنید). تابع همیلتونی مربوط به قسمت درجه دوم این مدل براساس روش استروگرادسکی [32]، به ازای فرکانس‌های $\omega_j > 0,\ \ j = 1. \dots n$ برای مشتقات مراتب بالاتر تابع لاگرانژی به‌صورت زیر است،

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j(p_j^2 + \omega_j^2 q_j^2)\,.$$

این تابع همیلتونی با استفاده از تغییر متغیر سیمپلکتیک

$$(q_j, p_j) \to (\frac{1}{\sqrt{\omega_j}} q_j, \sqrt{\omega_j} p_j),\ \ j = 1. \dots . n$$

به‌صورت زیر خواهد شد،

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j \omega_j (q_j^2 + p_j^2)\,.$$

بنابراین همان‌طور که مشاهده می‌شود، این مدل نیز یک تشدید همیلتونی نامعین از n درجه آزادی معرفی می‌کند.

۴,۲ کیهان‌شناسی

مدلی از کیهان‌شناسی با تشدید همیلتونی نامعین $1{:}-1{:}1$، در مرجع [35] با تابع همیلتونی به شکل زیر معرفی شده‌است،

$$H = \frac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2) - \frac{1}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_3^2 + p_3^2) + \varepsilon^2[\alpha(q_1^4 + q_2^4 + q_3^4) + \beta(q_1^2 q_2^2 + q_1^2 q_3^2 + q_2^2 q_3^2)]$$

به‌طوری‌که در آن α و β دو پارامتر حقیقی و ثابت هستند و پارامتر ε یک ثابت مثبت کوچک فرض می‌شود. همان‌طورکه در مراجع [11, 12, 20, 21, 36-38, 45] آمده‌است، وقتی $z = Z = 0$، این تابع همیلتونی مربوط به مدلی از جهان است، که توسط متریک فریدمن-لمایتر-رابرتسون-والکر به‌دست می‌آید و جهان انبساطی-انقباضی ایزوتروپیک و همگن را تشریح می‌کند.

۳. ویژگی‌های فضای حالت و فضای مدارها

فرم نرمال تابع همیلتونی به عنوان تقریبی از قسمت درجه دوم تابع همیلتونی است. درواقع فرآیند نرمال‌سازی تقریبی از قسمت خطی میدان برداری همیلتونی را خواهد داد. به‌طورکلی یک تابع همیلتونی H تشدید نامعین از n درجه‌ی آزادی را در نظر بگیرید، که قسمت درجه دوم آن به‌صورت (1) باشد. بنابراین حداقل یکی از مولفه‌های بردار فرکانس تشدید ω، منفی است.

مطابق با مطالب بخش دوم، ما توجه می‌کنیم، که فرم نرمال تابع همیلتونی $\overline{H}$ می‌تواند برحسب متغیرهای مختلط (۴) نوشته‌شود. بنابراین میدان برداری همیلتونی خطی معرفی شده توسط قسمت درجه دوم برحسب متغیرهای مختلط (۴) به‌صورت زیر است،

$$\mathrm{H}_2(z,\bar{z}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \omega_j\, z_j \bar{z}_j,$$

چنان‌که جریان تناوبی

$$\varrho\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,$$

با ضابطه

$$\varrho(t, z_1, \dots, z_n) = (e^{-i\omega_1 t} z_1, \dots, e^{-i\omega_n t} z_n)$$

را تولید می‌کند، به‌طوری‌که درواقع یک $\mathbb{S}^1$-عمل روی $T^*\mathbb{R}^{2n}$ است. علاوه برآن به‌طور دقیق‌تر برای $t \in [0,2\pi)$ یک عمل آزاد و سره برای هر سطح انرژی $\mathcal{M}_2(\eta) = H_2^{-1}(2\eta) \subset \mathbb{R}^{2n}$ برای هر $\eta > 0$ معرفی می‌کند. منیفلد $\mathcal{M}_2(\eta)$ یک فضای کاهش یافته‌است و درواقع منیفلد $(2n-1)$ بعدی به‌صورت زیر است،

$$\mathcal{N}_\eta^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n :\ H_2(z) = \eta\}$$

به‌طوری‌که معادل آن برحسب مختصات عمل-زاویه به‌صورت زیر است،

$$\{I \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} :\ H_2(I) = \eta\}.$$

فضای مداری $\mathbb{S}^1$-عمل روی $\mathcal{M}_2(\eta)$ به‌صورت زیر است،

$$\mathcal{P}(\eta) = \frac{\mathcal{N}_\eta^{2n-1}}{\mathbb{S}^1}.$$

فضای $\mathcal{P}(\eta)$ یک منیفلد سیمپلکیک از بعد $2(n-1)$ است. با توجه به این‌که یکی از فرکانس ها منفی است، بنابراین این فضا در صورت غیرتباهیده بودن، کران‌دار نیست و این تفاوت اصلی تشدیدهای نامعین در قیاس با تشدیدهای معین است. فضای $\mathcal{P}(\eta)$ می‌تواند توسط برخی ثابت های حرکت یا انتگرال های H_2 که چند جمله‌ای‌های همگن هستند، تشریح شود. به آن‌ها ناورداهای پایه می‌گویند. درواقع می‌توان حلقه توابع ناوردا تحت جریان که توسط پایه‌های ناوردای هیلبرت تولید می‌شوند را به‌کار برد. فرض کنید π تابعی را نشان دهد که ناورداهای پایه هیلبرت را معرفی می‌کند. در این‌صورت $T^*\mathbb{R}^{2n}$ منیفلد سیمپلکتیک و تابع همیلتونی هموار $\mathrm{H}_2\colon T^*\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ با میدان برداری همیلتونی V_{H_2} را در نظر بگیرید. در اینجا توجه می‌کنیم، برای هر مقدار $2\eta > 0$ از H_2 سطح انرژی $\mathcal{M}_2(\eta) = H_2^{-1}(2\eta) \subset \mathbb{R}^{2n}$ کلافی همبند بی‌کران در صورت غیرتباهیده بودن روی فضای پایه $\mathcal{P}(\eta)$ با تصویر $\pi\colon \mathcal{M}_2(\eta) \to \mathcal{P}(\eta)$ است. در حقیقت کلیه جواب‌های V_{H_2}

لزوما کران‌دار نیستند. همچنین برای $j = 3, 4, \ldots$ توجه می‌کنیم که $\mathrm{H_j}: T^*\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ با میدان برداری همیلتونی $V_{\mathrm{H_j}}$ و

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \cdots$$

با میدان برداری

$$V_H = V_{\mathrm{H_2}} + V_{\mathrm{H_3}} + V_{\mathrm{H_4}} + \cdots$$

است. فرض کنید،

$$\overline{H} = H_2 + \overline{H}_3 + \overline{H}_4 + \ldots + \overline{H}_m + O(m+1),$$

فرم نرمال H از مرتبه $2 \leq (m-1)$ باشد. در این‌صورت براساس نمادهای گزاره ۱، $\overline{H}_m = \widehat{H}_m + \widetilde{H}_m$، که در آن $\widehat{H}_m$ جملات از مرتبه m آن را تشکیل می‌دهد. اما مطابق با مرجع [45] $\widehat{H}_m$ میانگین H_m، در راستای جریان های H_2 یعنی $\varrho(t)$ است، یا به عبارتی دیگر

$$\widehat{H}_m = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathrm{H}_m \circ \varrho(t)\, dt\,.$$

در این‌صورت، اگر شرایط قضایای KAM (کولموگروف-آرنولد-موزر) برای فرم نرمال $\overline{H}$ برقرار باشد، ویژگی‌های مربوط به فضای مدارهای $V_{\mathrm{H_2}}$ قابل تعمیم به فضای مدارهای میدان برداری $V_{\overline{H}}$ مربوط به تابع همیلتونی فرم نرمال $\overline{H}$ است. به‌خصوص از آنجا که بواسطه وجود حداقل یک فرکانس منفی فضای حالت یا معادل آن فضای برداری $\mathcal{M}_2(\eta)$ مربوط به $V_{\mathrm{H_2}}$ در صورت غیرتباهیده بودن، کران‌دار نیست، پس فضای مدارهای میدان برداری $V_{\overline{H}}$ مربوط به تابع همیلتونی فرم نرمال $\overline{H}$ در حالت کلی نیز کران‌دار نمی‌تواند باشد، مگر برخی تباهیدگی‌ها براساس برخی شرایط مانند تقارن‌ها رخ دهند و فقط کمی تغییر شکل می‌دهد، به‌طوری‌که جزئیات میزان تغییرات براساس شرایط قضایای KAM می‌تواند بررسی شود.

References

1. 1. V. I. Arnol'd, V. V. Kozlov and A. I. Neishtadt, Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics; in Dynamical Systems III (ed. V.I. Arnol'd). Encyc. Math. Sciences, Springer (2006).

2. K. Andrzejewski, J. Gonera and P. Maslanka, Euclidean Path Integral and Higher-Derivative Theories, Prog. Theor. Phys. 125 (2011) 247-260.

3. K. Bolonek and P. Kosinski, Hamiltonian structures for Pais-Uhlenbeck oscillator, Acta Phys. Pol. B 36 (2005) 2115-2131.

4. V. V. Beletskii, Motion of an artificial satellite about its center of mass, in Artificial Earth Satellites, 1, pp. 25--43; Academy of Sciences, Moscow, 1958 (in Russian); Artificial Earth Satellites, Vols. 1 and 2, L.V. Kurnosova, ed., pp. 30--54, Plenum Press, New York, (1960).

5. D. Carrasco, J. F. Palacian, C. Vidal, J. Vidarte and P. Yanguas, Dynamics of Axially Symmetric Perturbed Hamiltonians in 1 : 1 : 1 Resonance", J. Nonlinear Sci., 28 (2018) 1293-1359.

6. D. Carcamo-Diaz, J. F. Palacian, C. Vidal and P. Yanguas, Nonlinear Stability in the Spatial Attitude Motion of a Satellite in a Circular Orbit, SIAM J. Applied Dynamical Systems, 20 (2021) 1421-1463.

7. D.B. DeBra and R.H. Delp, Rigid body attitude stability and natural frequencies in a circular orbit, J. Astronaut. Sci., 8 (1961) 14-17.

8. R.H. Delp, Attitude Motion of a Small Satellite in an Inverse-Square Central-Force Field, Technical report, Lockheed Missiles and Space Division, (1958), 417670.

9. S. Ferrer, H. Hanßmann, J. Palacian and P. Yanguas, Hamiltonian oscillators in 1:1:1 resonance: normalization and integrability, J. Nonl. Sci. 10 (2000) 145–174.

10. S. Ferrer, J. Palacin and P. Yanguas, On perturbed oscillators in 1:1:1 resonance: the case of axially symmetric cubic potentials. J. Geom. Phys. 40 (2002) 320–369.

11. A. Friedmann, Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes, Z. Phys. A 21 (1922) 326–332.

12. A. Friedmann, Über die Krümmung des Raumes, Z. Phys. A 10 (1922) 377–386.

13. H. Hanßmann, R. Mazrooei-Sebdani and F. Verhulst, The 1 : 2 : 4 resonance in a particle chain, Indagat. Math. 32 (2021) 101–120.

14. H. Hanßmann and R. Mazrooei-Sebdani, Relative equilibria of a 4-particle ring close to the 1 : 2 : 4 resonance, J. Nonlinear Sci. (2025) 35:76.

15. H. Hanßmann and J. C. Van der Meer, Algebraic Methods for Determining Hamiltonian Hopf Bifurcations in Three-Degree-of-Freedom Systems, J. Dyn. Differ. Equ., 17 (2005) 455–474.

16. Hoveijn I., Aspects of resonance in dynamical systems, Ph.D. Thesis (1992).

17. I. Hoveijn and F. Verhulst, Chaos in the 1 : 2 : 3 Hamiltonian normal form. Physica D, 44 (1990) 397–406.

18. P.C. Hughes, Spacecraft Attitude Dynamics, Dover, Mineola, New York, 2004.

19. C. S. Kueny and P. J. Morrison, Nonlinear instability and chaos in plasma wave–wave interactions. II. Numerical methods and results, Physics of Plasmas, Vol 2, No. 6, (1995).

20. G. Lemaître, Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques, Ann. Soc. Sci. Brux. A 47 (1927) 49–59.

21. G. Lemaître, L'univers en expansion, Ann. Soc. Sci. Brux. A 53 (1933) 51–85.

22. A. P. Markeev, Linear Hamiltonian Systems and Certain Problems of Stability of Motion of a Satellite in Relation to its Center of Mass, NITs Regular and Chaotic Dynamics, Institute of Computational Analysis, Moscow-Izhevsk, Moscow, (2009) (in Russian).

23. A. P. Markeev and A. G. Sokolskii, On the stability of relative equilibrium of a satellite in a circular orbit, Kosmic. Issled., 13 (1975), pp. 139--146 (in Russian); Cosm. Res., 13 (1975) 119-125.

24. S. R. Marandi and V. J. Modi, Attitude stability of rigid satellites via a normalized Hamiltonian, Acta Astronaut., 19 (1989) 287-299.

25. L. Martinet, P. Magnenat and F. Verhulst, On the number of isolating integrals in resonant systems with 3 degrees of freedom, Celestial mechanics. 25 (1981) 93–99.

26. R. Mazrooei-Sebdani and E. Hakimi, Periodic Klein-Gordon chains with three particles in 1 : 2 : 2 resonance, J. Dyn. Differ. Equ. 34 (2022) 1349-1370.

27. R. Mazrooei-Sebdani and E. Hakimi, All relative equilibria of Hamiltonian in detuned 1 : 2 : 3 resonance, J. Differ. Equ. 292 (2021) 501-533.

28. R. Mazrooei-Sebdani and E. Hakimi, Non-degenerate Hamiltonian Hopf bifurcations in ω : 3 : 6 resonance (ω = 1 or 2), Regul. Chaotic Dyn. 25 (2020) 522-536.

29. R. Mazrooei-Sebdani and E. Hakimi, On detuned 1 : 1 : 3 Hamiltonian resonance with cases of symmetric cubic and quartic potentials, Chaos. 30 (2020) 093119.

30. R. Mazrooei-Sebdani and Z. Yousefi, Lagrangian Fibrations in Coupled Resonant Oscillators in the Paired Case of Four Degrees of Freedom Containing Swinging Spring Oscillator, Proc. Math. Phys. Eng. Sci. 478 (2022) 1-20.

31. K. R. Meyer and D. C. Offin, Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem, Third Edition Applied Mathematical Sciences 90, Springer, New York, (2017).

32. M. Ostrogradsky, Memoires sur les equations differentielles relatives au probleme des isoperim ` etres, Mem. Acad. St. Petersbourg VI 4, 385517 (1850).

33. A. Pais, G.E. Uhlenbeck, On field theories with non-localized action, Phys. Rev. 79 (1950) 145.

34. J. T. B. Oude Groeniger, The 1 : 3 : 4 resonance, Dynamics near a resonant equilibrium M.Sc. thesis, Utrecht University, (2018).

35. J. F. Palacián, C. Vidal, J. Vidarte and P. Yanguas, Periodic solutions, KAM tori and bifurcations in a cosmology-inspired potential, Nonlinearity 32 (2019) 3406–3444.

36. H. P. Robertson, Kinematics and world structure Astrophys. J. 82 (1935) 284–301.

37. H. P. Robertson, Kinematics and world structure II Astrophys. J. 83 (1936) 187–201.

38. H. P. Robertson, Kinematics and world structure III Astrophys. J. 83 (1936) 257–71.

39. J. A. Sanders, F. Verhulst, J. Murdock, Averaging methods in nonlinear dynamical systems, 2nd edn. Applied Mathematical Sciences, vol. 59. Berlin, Germany: Springer (2007).

40. A. V. Smilga, Comments on the Dynamics of the Pais–Uhlenbeck Oscillator, SIGMA 5 (2009) 017, arXiv:0808.0139.

41. E. Van der Aa., First order resonances in three-degrees-of-freedom systems, Celest. Mech. 31 (1983) 163–191.

42. E. Van der Aa, and J. A. Sanders, On the 1:2:1- resonance, its periodic orbits and integrals, in Asymptotic Analysis, from Theory to Application, ed. F. Verhulst, Lecture Notes in Mathematics 711, Springer-Verlag, Berlin (1979).

43. E. Van der Aa and M. De. Winkel, Hamiltonian systems in 1 : 2 : ω–resonance (ω = 5 or 6), Int. J. Nonlin. Mech., 29 (1994) 261–270.

44. E. Van der Aa and F. Verhulst, Asymptotic integrability and periodic solutions of a Hamiltonian system in 1 : 2 : 2-resonance, SIAM J. Math. Anal. 15 (1984) 890–911.

45. A. G. Walker, On Milne's theory of world-structure Proc. Lond. Math. Soc. 42 (1937) 90–127.

46. S. Wiggins, Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos, 2nd edn. Texts in Applied Mathematics, vol. 2. Berlin, Germany: Springer (2003).

47. R. P. Woodard, Avoiding Dark Energy with 1/R Modifications of Gravity, Lect. Notes Phys. 720 (2007) 403-433.

48. V. E. Zhavnerchik, On the stability of autonomous systems in the presence of several resonances, Prikl. Mat. Mekh., 43 (1979), pp. 229-234 (in Russian); J. Appl. Math. Mech., 43 (1979) 247-253.

49. V. E. Zhavnerchik, On stability in the presence of multiple resonance of odd order, Prikl. Mat. Mekh., 44 (1980), pp. 971-976 (in Russian); J. Appl. Math. Mech., 44 (1980) 692-696.