Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Kharazmi University

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Optimal Lie Algebraic Structure and Classification of Exact Solutions of the Flow Energy Equation

M. Jafari[1]

1. Department of Mathematics, Payame Noor University, PO BOX 19395-4697, Tehran, Iran. m.jafarii@pnu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 2 August 2024
Accepted: 12 June 2025
Published online:
4 October 2025

Keywords:
Lie symmetry group,
Flow energy equation,
Conservation laws.

ABSTRACT

Introduction

The Lie symmetry method, first developed by Sophus Lie, is a fundamental tool in the analysis of differential equations, particularly for generating exact solutions and reducing equation order. One of its key applications lies in identifying invariant solutions and simplifying complex nonlinear systems through symmetry reductions. In recent decades, this method has been extended and applied to a wide range of physical models. The present study focuses on the flow energy equation, which arises in fluid mechanics and describes thermal energy distribution in incompressible Newtonian pipe flow. Using classical Lie point symmetries, we obtain the symmetry generators of the equation and classify its one-parameter subalgebras through the adjoint representation. Based on this classification, an optimal system is constructed to systematically generate non-equivalent invariant solutions. In addition to symmetry reductions, we compute several exact solutions of the reduced equations and analyze the structure of conservation laws associated with the flow energy equation. These conservation laws are derived using both direct and variational approaches. The results highlight the effectiveness of Lie symmetry analysis in understanding and solving nonlinear PDEs in applied mathematics and physics.

Material and Methods

We applied the classical Lie symmetry method to the flow energy equation by determining its infinitesimal generators and computing the corresponding Lie algebra. An optimal system of one-parameter subalgebras was constructed via the adjoint representation. Each generator was used to reduce the PDE to an ODE, from which exact invariant solutions were obtained. Conservation laws were also derived using the direct method and the homotopy operator, with symbolic computations performed in Maple.

Results and discussion

The symmetry analysis revealed that the flow energy equation admits a four-dimensional Lie algebra, generated by specific infinitesimal transformations. Using the optimal system, several group-invariant solutions were systematically derived through order reduction. These exact solutions demonstrate the effectiveness of the method in simplifying the equation and capturing its essential dynamics. Furthermore, three nontrivial conservation laws were obtained, shedding light on the physical structure and invariants of the model.

Conclusion

The following conclusions are obtained from this research.

- The Lie point symmetries of the flow energy equation were computed, showing that it admits a four-dimensional Lie algebra.
- An optimal system of one-parameter subalgebras was constructed using the adjoint representation technique.
- Several exact group-invariant solutions were obtained by reducing the PDE to ODEs using similarity variables.
- Conservation laws were derived via both the direct method and the homotopy operator, illustrating the variational structure of the equation.

The results demonstrate the efficiency of Lie symmetry methods in simplifying and solving nonlinear PDEs arising in fluid dynamics.

How to cite: Jafari, M. (2025). Optimal Lie Algebraic Structure and Classification of Exact Solutions of the Flow Energy Equation. *Mathematical Researches*, **11** (1), 1 – 18.

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸
پژوهش‌های ریاضی
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

دستگاه بهینه جبر تقارنی و طبقه‌بندی جواب‌های دقیق معادلهٔ نیروی جریان

مهدی جعفری[1]

۱. گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. رایانامه: m.jafarii@pnu.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۵/۱۲
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۳/۲۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۴/۷/۱۲

واژه‌های کلیدی:
گروه لی تقارنی
معادله نیروی جریان
قوانین پایستگی

چکیده

در این مقاله گروه لی تقارنهای معادلهٔ نیروی جریان را تحلیل و بررسی می‌کنیم. معادلهٔ نیروی جریان یکی از معادلات مهم و کاربردی در مکانیک سیالات است که میزان انرژی گرمایی حاصل از جریان را بررسی می‌کند. به کمک گروه لی تقارنی معادلهٔ نیروی جریان، می‌توانیم جوابهای جدیدی را با استفاده از جوابهای قبلی این معادله بدست آوریم. این جوابها در مطالعه وابستگی جوابها به پارامترها و حل کردن مسائل مقدار مرزی کاربرد فراوان دارد. در ادامه، به نوعی طبقه بندی زیرجبرهای لی تقارنی بر اساس نگاشت الحاقی پرداخته و به کمک این طبقه بندی، دستگاه بهینه زیرجبرهای یک پارامتری جبر لی تقارنی معادله را به دست می‌آوریم. همچنین با روش کاهش مرتبه و استفاده از ناورداهای دیفرانسیلی، جوابهای دقیقی را برای معادلهٔ نیروی جریان بدست آورده و طبقه بندی می‌کنیم. در پایان با استفاده از گروه لی تقارنی به محاسبه قوانین پایستگی این معادله می‌پردازیم.

استناد: جعفری، مهدی (۱۴۰۴). دستگاه بهینه جبر تقارنی و طبقه‌بندی جواب‌های دقیق معادلهٔ نیروی جریان. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۱** (۱)، ۱ – ۱۸.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

روش تقارنی لی اولین بار توسط سوفوس لی در اواسط قرن نوزدهم میلادی مطرح شد و از آن زمان به بعد مورد توجه بسیاری از ریاضیدانان و محققین در این زمینه قرار گرفته است [۱۳]. در واقع مهمترین و کاربردی ترین روش برای بررسی جوابهای یک معادله دیفرانسیل، روش تقارنی لی یا همان روش کلاسیک است. در سالهای اخیر برخی از ریاضیدانان به گسترش این روش و تعمیم آن پرداخته اند که از آن جمله می‌توان به [۵، ۶، ۱۸] اشاره کرد. اگر بخواهیم به طور اجمالی در مورد گروه تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل صحبت کنیم، می‌توان گفت که این گروه ها شامل تبدیلاتی هستند که جوابهای دستگاه را به هم تبدیل می‌کنند. از دیدگاه لی، تقارنها، تبدیلاتی هندسی هستند که روی فضای شامل متغیرهای مستقل و وابستهٔ دستگاه عمل کرده و روی جوابهای دستگاه نیز با تغییراتی که روی گراف آنها اعمال کرده، عمل می‌کنند. یکی از مهمترین اکتشافات لی در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل آن است که وی توانست نشان دهد که می‌توان شرایط غیر خطی پیچیدهٔ حاکم بر یک دستگاه دینامیکی را بوسیلهٔ ناورداهای بینهایت کوچک آن دستگاه، تحت مولدهای گروه تقارنش موضعاً به شرایطی خطی مبدل کرد که در فیزیک از اهمیت زیادی برخوردار است. داشتن گروه تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مزیتهای بسیاری دارد که از آن جمله می‌توان به طبقه بندی جوابهای دستگاه معادلات دیفرانسیل اشاره کرد [۱۲]. این رده بندی به این روش است که جوابهایی که در یک دسته قرار می‌گیرند، بوسیلهٔ برخی از مولدهای گروه تقارن قابل تبدیل به هم باشند [۱۷]. اگر با یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی درگیر باشیم، گروه تقارنی به ما کمک می‌کند تا با کاهش مرتبه معادله به یک، جواب را با یک بار انتگرالگیری بدست آوریم و در حالتی که معادلهٔ مورد نظر مرتبهٔ اول باشد، جواب عمومی نیز بدست خواهد آمد [۱۵]. اما متاسفانه چنین چیزی در مورد معادلات دیفرانسیل جزئی برقرار نیست، یعنی جواب عمومی چنین معادلاتی را نمی‌توان لزوماً با داشتن گروه تقارنها بدست آورد. (مگر در حالتی که دستگاه قابل تبدیل به یک دستگاه خطی باشد.) در این شرایط تنها برخی از جوابها بدست می‌آیند که تحت بعضی از زیرگروه های گروه تقارن ناوردا هستند. این جوابها، به جوابهای ناوردای گروهی مشهورند که از حل دستگاهی که شامل تعداد متغیر مستقل کمتری نسبت به دستگاه اصلی است بدست می‌آیند[۵، ۱۴].

از کاربردهای دیگر روش تقارنی لی، محاسبه قوانین پایستگی یک معادله است. قوانین پایستگی نقش بسیار اساسی و مهمی در بررسی و آنالیز معادلات دیفراسیل با مشتقات جزئی دارد که به عنوان مثال می‌توان به مطالعه وجود و یکتایی جواب های معادلات غیرخطی اشاره کرد. در فیزیک بنیادی تعابیر مختلف ریاضی از قوانین پایستگی در موارد مختلف بکار می‌رود به عنوان نمونه می‌توان به پایستگی ماده و انرژی، اندازه حرکت، پایستگی بار و انرژی و ... اشاره کرد. همچنین در دستگاه های معادلات دیفرانسیل معمولی، قوانین پایستگی همان انتگرال های اول دستگاه و در دستگاه های کران دار که به زمان وابسته اند این قوانین همان کمیتهای ثابت هستند.

در سالهای اخیر، استفاده از قوانین پایستگی در بررسی دستگاه های معادلات به روشهای عددی هم مورد توجه بسیاری از ریاضیدانان قرار گرفته است. به عنوان مثال می‌توان به منابع [۱, ۴, ۸] مراجعه کرد. همچنین یکی دیگر از کاربردهای مهم و اساسی قوانین پایستگی در خصوص معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، ساختن یک دستگاه هم ارز با دستگاه اولیه است که متغیرهای موضعی (پتانسیل) آن بطور سراسری به دستگاه اولیه مرتبط است. در بسیاری از موارد حل چنین دستگاهی منجر به نتایج قابل توجهی برای دستگاه اولیه می‌شود و این موضوع در علوم مختلف خصوصا ریاضی فیزیک بسیار حائز اهمیت است [۱، ۴، ۸ ، ۱۲، ۲۱]. در خصوص روش های موجود برای بدست آوردن قوانین پایستگی منابع و مآخذ گوناگونی

وجود دارد. یکی از متداول ترین روشها، روش منسوب به امی نوتر[1] است که در این روش قوانین پایستگی را با استفاده از نوعی از تقارن دستگاه بدست می‌آورند. این تقارنها، تقارنهای تغییراتی نام دارند که حافظ انتگرال کنش معادله هستند [۱۶]. محدودیتی که روش نوتر دارد این است که از این روش فقط در مورد دستگاه های معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که خودالحاق هستند، می‌توان استفاده کرد و این در حالی است که اکثر دستگاه های موجود در مسائل کاربردی خودالحاق نیستند. بنابراین روشهای کلی برای بدست آوردن قوانین پایستگی یکی از مباحث همیشگی و مهم در بین ریاضیدانان و همچنین محققین در رشته های مرتبط بوده است [۸]. یکی از این روشها که بسیار کاربردی است روش مستقیم نام دارد که اولین بار توسط آنکو و بلومن مطرح شد [۱]. پس از آنکو و بلومن، این روش با اندکی تغیرات در محاسبه توسط دیگر ریاضیدانان نیز مطرح شده است [۴، ۸].

روش دیگری برای محاسبه قوانین پایستگی وجود دارد به نام روش تجانس که بر خلاف روشهای قبلی از ابزاری ساده مانند حساب تغیرات و جبرخطی استفاده می‌کند. به طور خلاصه این روش به این صورت است که ابتدا یک چگالی پیش فرض برای قانون پایستگی انتخاب می‌شود که این چگالی، ترکیب خطی با ضرایب نامعلوم از جملاتی است که تحت تقارن تجانس معادله ناوردا هستند. با مشتق گیری از این چگالی نسبت به زمان و جایگزین کردن عبارات وابسته به زمان از معادله و همچنین استفاده از عملگر اویلر یک دستگاه معادلات خطی ایجاد می‌شود که با حل آن، ضرایب نامعلوم چگالی، معلوم می‌گردند. با مشخص شدن چگالی می‌توان شار متناظر را با استفاده از عملگر هموتوپی بدست آورد و به اینصورت قانون پایستگی ساخته می‌شود [۱۱، ۲۰].

هدف این مقاله تحلیل گروه لی و درنتیجه، یافتن و طبقه بندی جوابها و همچنین یافتن قوانین پایستگی یکی از معادلات مهم در فیزیک و مکانیک سیالات به نام معادله نیروی جریان است. معادله نیروی جریان یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u_{xx}+u_{yy}+\frac{1}{x}u_x+(A-Bx^2)u_y-C+Dx^2=0 \tag{۱,۱}$$

که در آن A، B، C و D پارامترهای ثابت و $u(x,y)$ متغیر وابسته با دامنه $\Omega\subset R^{+}\times R$ است [۳، ۲۲]. معادلات نیروی جریان لوله، تعادل نیروی حرارتی را در جریان به اصطلاح هاگن-پوازوی[2] توصیف می‌کند. این یک جریان پیوسته، توسعه یافته و آرام از یک سیال نیوتنی تراکم ناپذیر از طریق لوله ای با مقطع دایره ای است [۱۱].

ترتیب مطالب این مقاله به صورت زیر است: در بخش دوم به بیان اجمالی تعریف و طریقهٔ محاسبه تقارنهای نقطه ای و همچنین قوانین پایستگی برای یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی دلخواه می‌پردازیم. در بخش سوم تقارنهای معادله نیروی جریان را محاسبه می‌کنیم. بخش چهارم را به طبقه بندی زیرجبرهای تقارنی معادله نیروی جریان و به دست آوردن دستگاه بهینه زیرجبرهای یک پارامتری اختصاص داده ایم. در بخش پنجم به کمک روش کاهش مرتبه، برخی از جوابهای ناوردای گروهی را برای این معادله محاسبه کرده ایم و قوانین پایستگی معادله را در بخش ششم محاسبه نموده ایم.

---
[1] Emmy Noether
[2] Hagen-Poiseuille flow

۲. تقارنهای کلاسیک لی

در این بخش تقارنهای نقطه ای (کلاسیک) یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را تعریف و طریقهٔ محاسبهٔ آن را به صورت خلاصه بیان می‌کنیم. فرض کنید $\Delta(x,u^{(n)})=0$ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی شامل p متغیر مستقل $x=(x^1,...,x^p)$ و q متغیر وابسته $u=(u^1,...,u^q)$ باشد. جواب چنین دستگاهی، تابعی به صورت $u=f(x)$ است که در آن

$$u^{\alpha}=f^{\alpha}(x^1,...,x^p),\qquad \alpha=1,...,q. \tag{۱,۲}$$

تابعی هموار از متغیرهای مستقل $x=(x^1,...,x^p)$ است. حال فرض می‌کنیم x یک دستگاه مختصات روی $X\simeq R^p$ و u یک دستگاه مختصات روی $U\simeq R^q$ باشد، در اینصورت تعریف می‌کنیم:

تعریف۱,۲: فضای اقلیدسی $E=X\times U\simeq R^{p+q}$ که شامل متغیرهای مستقل x و وابسته u است را فضای کل[۱] دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta(x,u^{(n)})=0$ می‌نامند.

تعریف۲,۲: تقارنهای نقطه ای در واقع دیفئومورفیسمهایی به صورت

$$(\tilde{x},\tilde{u}):=g.(x,u)=(\xi(x,u),\eta(x,u)), \tag{۲,۲}$$

هستند که روی فضای کل E اثر می‌گذارند.

قضیه۳,۲: اگر G گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی زیر مجموعهٔ بازی از E مانند O عمل کند و V یک مولد آن باشد، آنگاه دستگاه $\Delta=0$، V را به عنوان یک گروه تقارن می پذیرد اگر $\mathrm{Pr}V^{(n)}(\Delta)=0$ هر کجا که $\Delta=0$.

اثبات: [۱۷].

منظور از $\mathrm{Pr}V^{(n)}$ امتداد[۲] مرتبه n-ام میدان برداری V است که خود یک میدان برداری روی فضای جت مرتبه n است و بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mathrm{Pr}V^{(n)}\Big|_{(x,u^{(n)})}=\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\left[\exp(\varepsilon V)\right]^{(n)}(x,u^{(n)}),\qquad (x,u^{(n)})\in J^{(n)}(O) \tag{۳,۲}$$

لازم بذکر است که فضای جت[۳] مرتبهٔ n-ام یک تابع، فضای لازم برای نشان دادن بسط تیلور آن تابع تا مرتبهٔ n-ام به همراه متغیرهایش است. این فضا را با $J^{(n)}$ نشان می‌دهیم.

تعریف۴,۲: فرض کنید G یک گروه تبدیلات باشد، یک ناوردای دیفرانسیلی[۴] تابعی مانند $I:J^{(n)}(M)\to R$ است بطوریکه،

[1] Total Space
[2] Prolongation
[3] Jet Space
[4] Differential Invariant

$$I(g^{(n)}.(x,u^{(n)})) = I(x,u^{(n)}).$$

کاربرد ناوردای دیفرانسیلی در روش تقارنی لی است. مثلا می توان در حالتهای خاص با یافتن ناورداها و جایگذاری آنها در معادله مرتبه معادله دیفرانسیل را به تعداد مرتبه گروه تقارن، کاهش داد و معادله را با انتگرالگیری حل کرد.

در حالت کلی برای p متغییر مستقل x^i و q متغیر وابسته u^α فرم کلی میدانهای برداری که تشکیل یک گروه تقارنی برای معادله دیفرانسیل می دهند بشکل زیر است:

$$V = \sum_{i=1}^{p} \xi^i (x^i, u^q) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \varphi_\alpha (x^i, u^q) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \qquad (۴,۲)$$

که در آن ξ^i نشان دهندۀ ضرایب متغیرهای مستقل و φ_α مربوط به متغیرهای وابسته می‌باشد.

تعریف ۵,۲: یک قانون پایستگی برای یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی عبارت است از رابطۀ دیورژانسی زیر که روی جوابهای دستگاه برقرار است:

$$\mathrm{div}\,\phi[\mathrm{u}] = \mathrm{D}_i\, \phi^i[u] = \mathrm{D}_1 \phi^1[u] + \cdots + \mathrm{D}_n\, \phi^n[u] = 0$$

در رابطه فوق ϕ^i ها را شارهای قانون پایستگی گویند. در واقع

$$\phi^i[u] = \phi^i(x, u, \partial u, \ldots, \partial^r u)$$

که در آن r یعنی بالاترین مرتبه مشتق موجود در شارها را مرتبه قانون پایستگی می‌نامند.

در صورتیکه متغیر زمان یعنی t یکی از متغیرهای مستقل دستگاه باشد می‌توان قانون پایستگی را بصورت زیر نوشت:

$$D_t \psi[u] + \mathrm{div}\,\phi[\mathrm{u}] = 0$$

که در آن

$$\mathrm{div}\,\phi[\mathrm{u}] = \mathrm{D}_i\, \phi^i[u] = \mathrm{D}_1 \phi^1[u] + \cdots + \mathrm{D}_{n-1} \phi^{n-1}[u]$$

با فرضیات بالا $\mathrm{div}\,\phi[\mathrm{u}]$ را دیورژانس فضایی، $\psi[u]$ را چگالی و همچنین $\phi^i[u]$ را شار فضایی قانون پایستگی می‌نامند. همچنین در تعاریف فوق D_t مشتق کامل است که بصورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۶,۲: عملگر مشتق کامل نسبت به متغیرهای مستقل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ii_1}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1}^\alpha} + u_{ii_1i_2}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1i_2}^\alpha} + \cdots, \qquad i = 1, \ldots, p, \quad \alpha = 1, \ldots q.$$

تعریف ۷،۲: عملگر دیفرانسیلی اویلر نسبت به u^{α} برای $\alpha=1,\dots,q$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_{u^{\alpha}}=\sum_{J}(-D)_J\frac{\partial}{\partial u_J{}^{\alpha}},\qquad J=(j_1,\dots,j_k),\quad 1\le j_k\le p \tag{۴،۲}$$

عملگر دیفرانسیل اویلر نسبت به تابع $u(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E_u=\frac{\partial}{\partial u}-D_i\frac{\partial}{\partial u_i}+\cdots+(-1)^s D_{i_1}\cdots D_{i_s}\frac{\partial}{\partial u_{i_1\dots i_s}}+\cdots \tag{۵،۲}$$

تعریف ۸،۲: فرض کنیم $f\,(X,U^{(M)}(X))$ یک تابع دیفرانسیلی از مرتبهٔ M باشد. اگر $X=x$ آنگاه f را دقیق می‌نامند هر گاه یک تابع دیفرانسیلی مانند $F(x,U^{(M-1)}(x))$ وجود داشته باشد که $f=D_xF$.

همچنین وقتی که $X=(x,y)$ یا $X=(x,y,z)$ آنگاه f را دقیق می‌نامند هر گاه یک تابع برداری دیفرانسیلی مانند $F(X,U^{(M-1)}(X))$ وجود داشته باشد که $f=\mathrm{Div}F$.

قضیه ۹،۲: تابع دیفرانسیلی $f\,(X,U^{(M)}(X))$ دقیق است اگر و تنها اگر $E_{\mathbf{u(x)}}f=0$ یعنی اثر عملگر اویلر روی آن تابع برابر با صفر باشد.

تعریف ۱۰،۲: فرض کنید $X=x$ متغیر مستقل و $f=f\,(x,U^{(M)}(x))$ تابع دیفرانسیلی دقیق باشد. یعنی یک تابع F وجود داشته باشد که $F=D_x^{-1}f$، بنابراین F انتگرال f است. عملگر هموتوپی یک بعدی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_{U(x)}f=\int_0^1\Big(\sum_{\alpha=1}^{q}I_{u^{\alpha}(x)}f\Big)[\lambda U]\frac{d\lambda}{\lambda},\qquad U=(u^1,\dots,u^q). \tag{۶،۲}$$

تابع انتگرالده $I_{u^{\alpha}(x)}f$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_{u^{\alpha}(x)}f=\sum_{k=1}^{M_1^{\alpha}}\Big(\sum_{j=0}^{k-1}u_{jx}^{\alpha}(-D_x)^{k-(j+1)}\Big)\frac{\partial f}{\partial u_{kx}^{\alpha}}, \tag{۷،۲}$$

که در آن M_1^{α} مرتبه f در متغیر وابسته u^{α} نسبت به x می‌باشد. نماد $f\,[\lambda U]$ بدان معناست که در تابع f ، U را با λU و U_x را با λU_x و همه مشتقات U را به این طریق جاگذاری کرده ایم که λ یک پارامتر کمکی است.

در واقع برای یک تابع دیفرانسیلی دقیق، عملگر هموتوپی یک بعدی، انتگرال جزء به جزء در x را با یک سری از دیفرانسیل گیری ها که با یک انتگرال استاندارد نسبت به λ همراه می‌باشد جایگزین می‌کند.

قضیه زیر هدف استفاده از عملگر هموتوپی را بیان می‌کند.

قضیه ۱۱،۲: [۲۱] فرض کنید $f=f(x,U^{(M)}(x))$ یک تابع دیفرانسیلی دقیق باشد. یعنی تابع دیفرانسیلی $F(x,U^{M-1}(x))$ موجود باشد که $DF=f$. در اینصورت $F=D_x^{-1}f=H_{\mathbf{u}(x)}f$.

اگر شارهای قوانین پایستگی به صورت $M^i[u]+H^i[u]$ باشند که در آن $M^i[u]$ روی جوابهای دستگاه برابر با صفر باشند و $D_iH^i[u]=0$ یک دیورژانس بدیهی باشد آنگاه قانون پایستگی دستگاه را بدیهی می‌نامیم. همچنین دو قانون پایستگی را هم ارز گوییم هرگاه تفاضل آنها یک قانون پایستگی بدیهی باشد.

تعریف ۱۲،۲: فرض کنید دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی $\Delta_v(x,u^{(n)})=0$ دارای قوانین پایستگی P باشد. در این صورت توابع $Q_v^J(x,u^{(m)})$ وجود دارند به طوری که به ازای هر (x,u)

$$\mathrm{Div}P=\sum_{v,J}Q_v^J D_J\Delta_v,$$

در نتیجه l-تایی $Q=(Q_1,\ldots,Q_l)$ با مولفه های $Q_v=\sum_J -D_JQ_v^J$ وجود دارند که $\mathrm{Div}P=Q.\Delta$.

l-تایی $Q=(Q_1,\ldots,Q_l)$ را مشخصه قانون پایستگی مربوط به P می‌نامند [۱۷].

تعریف ۱۳،۲: فرض کنیم $\mathrm{P}[u]=\mathcal{P}\left(x,u^{(n)}\right)\in\mathcal{A}^r$ یک تابع دیفرانسیلی $r-$تایی باشد. مشتق فرشه $\mathcal{P}$ یک عملگر دیفرانسیلی $D_{p:}A^q\to A^r$ می‌باشد به طوری که

$$\mathcal{D}_{\mathcal{P}}(Q)=\frac{d}{d\mathcal{E}}\Big|_{\varepsilon=0}\mathcal{P}\big[u+\varepsilon Q[u]\big],\quad Q\in\mathcal{A}^q$$

به عبارت دیگر به منظور محاسبه $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}(Q)$، u و مشتقات آن را در P با $u+\in Q$ جایگزین می‌نماییم و سپس از عبارت به دست آمده نسبت به ε مشتق می‌گیریم. به عنوان مثال هرگاه $\mathrm{P}_{[u]}=u_xu_{xx}$، در این صورت

$$\mathcal{D}_{\mathcal{P}}(Q)=\frac{d}{d\mathcal{E}}\mid_{\varepsilon=0}(u_x+\varepsilon\mathcal{D}_xQ)(u_{xx}+\varepsilon D_x^2Q)=u_xD_x^2Q+u_{xx}\mathcal{D}_xQ,$$

بنابراین، $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}=u_xD_x^2+u_{xx}\mathcal{D}_x$.

این محاسبه به سادگی تعمیم می‌یابد و نشان می‌دهد که مشتق فرشه یک تابع $r-$ تایی $P=(\mathrm{P}_1,\ldots,\mathrm{P}_r)$ یک عملگر دیفرانسیلی ماتریسی $\mathrm{q}\times\mathrm{r}$ با مولفه هایی به صورت زیر است:

$$(\mathcal{D}_{\mathcal{P}})_{\mu v}=\sum_J(\partial\mathcal{P}_\mu/\partial u_J\,v)\mathcal{D}_J,\qquad \mu=1\ldots,\mathrm{r},v=1,\ldots,q.$$

قضیه ۱۴،۲: [۱۷] هرگاه $\mathcal{P}\in\mathcal{A}^r$ و $Q\in\mathcal{A}^q$، در این صورت

$$\mathcal{D}_{\mathcal{P}}(Q)=prv_Q(P)$$

تعریف ۱۵,۲: هرگاه

$$\mathcal{D} = \sum_J \mathcal{P}_j[u]\, D_j \qquad , \qquad \mathcal{P}_j \in \mathcal{A}$$

یک عملگر دیفرانسیلی باشد، الحاق آن D^* یک عملگر دیفرانسیلی است که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\int_\Omega^{\cdot} P.DQdx = \int_\Omega^{\cdot} Q.D^*Pdx\,, \qquad P,Q \in \mathcal{A}$$

که در آن به ازای هر عضو دامنه $\Omega \in \mathbb{R}^p$ و هر تابع $u = f_x$ از مجموعه فشرده Ω ، توابع دیفرانسیلی Q و P وقتی $u = 0$ صفر می‌باشند. یک انتگرال گیری ساده جزء به جزء نشان می‌دهد که

$$D^* = \sum_J (-D)_J \mathcal{P}_J$$

این به آن معنا می‌باشد که به ازای هر $Q \in \mathcal{A}$ ،

$$D^*Q = \sum_J (-D)_J [\mathcal{P}_J\, Q]$$

به عنوان مثال ، هرگاه $D = D_x^2 + u\mathcal{D}_x$ در این صورت الحاق آن به فرم زیر می‌باشد

$$D^* = (-\mathcal{D}_x)^2 + (-\mathcal{D}_x).u = D_x^2 - u\mathcal{D}_x - u_{x0}$$

به طور مشابه، یک عملگر دیفرانسیلی ماتریسی $\mathcal{D}: \mathcal{A}^k \to \mathcal{A}^{\mathrm{I}}$ با درایه های $\mathcal{D}_{\mu v}$ دارای الحاق $D^*: \mathcal{A}^{\mathrm{I}} \to \mathcal{A}^k$ با درایه های $D^* = (\mathcal{D}_{\mu v})^*$ می‌باشد. در واقع، درایه های عملگر الحاقی، الحاق ترانهاده درایه های $\mathcal{D}$ می‌باشند. قابل توجه می‌باشدکه به ازای عملگرهای دیفرانسیلی $D, \mathcal{E}$، $(D\mathcal{E})^* = \mathcal{E}^* D^*$ [۷].

تعریف ۱۶,۲: عملگر دیفرانسیلی D را خود الحاق نامند، هرگاه $D^* = D$ و پادالحاق نامند هرگاه $D^* = -D$.

به عنوان مثال، عمگر دیفرانسیلی $D_x^2 + u$ یک عملگر خودالحاق است و عملگر $D_x^3 + 2u\mathcal{D}_x + u_x$ پادالحاق می‌باشد [۹].

اکنون، با توجه به مفهوم مشتق فرشه و الحاق عملگر دیفرانسیلی به بیان یک شرط لازم و کافی برای آنکه I- تایی Q مشخصه یک قانون پایستگی باشد می‌پردازیم.

گزاره ۱۷,۲: [۱۷] فرض می‌کنیم $\Delta = 0$ یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل باشد. یک I-تایی Q مشخصه قانون پایستگی می‌باشد اگر و تنها اگر

$$D_\Delta^*(Q) + D_Q^*(\Delta) = 0.$$

به ویژه، یک شرط لازم برای آنکه Q مشخصه یک قانون پایستگی دستگاه معادلات دیفرانسیل Δ باشد آن است که به ازای همه جواب های Δ داشته باشیم $D_{\Delta}^{*}=0$. زیرا، روی جواب های دستگاه به طور بدیهی $D_{Q}^{*}(\Delta)=0$. این فرم ساده شده می‌تواند به طور مؤثر برای حذف بسیاری از حالات ممکن I-تایی به عنوان مشخصه های قوانین پایستگی به کار گرفته شود و بنابراین، به یک طبقه بندی کامل از قوانین پایستگی دستگاه منجر گردد.

تعریف ۱۸,۲: میدان برداری تعمیم یافته (۲,۴) را یک تقارن تغییراتی تابع عملکردی $\mathcal{L}\,[u]=\int L\big(x,u^{(n)}\big)dx$ نامند اگر و تنها اگر یک $\mathcal{P}-$تایی از توابع دیفرانسیلی وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر x، u

$$prv(\Delta)+LDiv\xi=DivB.$$

گزاره ۱۹,۲: میدان برداری تعمیم یافته v تقارن تغییراتی $\mathcal{L}\,[u]$ است اگر و تنها اگر نمایش تکاملی v_Q نیز چنین باشد[۱۷].

قضیه ۲۰,۲: هرگاه میدان برداری تعمیم یافته v یک تقارن تغییراتی $\mathcal{L}\,[u]=\int L\big(x,u^{(n)}\big)dx$ باشد، در این صورت v یک تقارن تعمیم یافته از معادلات اویلر-لاگرانژ $E[L]=0$ می‌باشد [۱۷].

۳. تقارنهای کلاسیک معادله نیروی جریان

در این بخش با استفاده از روش ارائه شده در قسمت قبل به محاسبهٔ تقارنهای نقطه ای معادله نیروی جریان می‌پردازیم. قبل از هر چیز یادآوری می‌کنیم که معادله نیروی جریان یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است که دارای یک متغیر وابسته u و دو متغیر مستقل x و y است. بنابراین فرم کلی مولدهای جبر تقارنی این معادله بصورت زیر است:

$$V\,(x,y,u)=\xi^{1}(x,y,u)\frac{\partial}{\partial x}+\xi^{2}(x,y,u)\frac{\partial}{\partial y}+\varphi(x,y,u)\frac{\partial}{\partial u} \qquad (۱,۳)$$

چون مرتبه معادله (۱,۱) برابر با ۲ است، می‌بایست امتداد مرتبه دوم میدان فوق را روی معادله اثر دهیم و برابر با صفر قرار دهیم تا ضرایب ξ^1 ، ξ^2 و φ بدست آیند. با انجام این کار و استفاده از نرم افزار میپل برای محاسبات داریم:

$$\begin{aligned}\xi^{1}&=C_1x\\ \xi^{2}&=C_1y+C_2\\ \varphi&=C_3u+C_4\end{aligned} \qquad (۲,۳)$$

بنابراین فرم کلی مولدهای جبر تقارنی بصورت

$$V\,(x,y,u)=C_1x\,\frac{\partial}{\partial x}+(C_1y+C_2)\frac{\partial}{\partial y}+(C_3u+C_4)\frac{\partial}{\partial u} \qquad (۳,۳)$$

است که در آن C_i ، $i=1,\dots,4$ اعداد ثابت هستند. بنابراین قضیه زیر به دست می‌آید:

قضیه۱,۳: مولدهای بینهایت کوچک هر گروه لی یک پارامتری از تقارنهای نقطه ای معادله نیروی جریان، یک ترکیب خطی از میدانهای برداری زیر است:

$$V_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad V_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad V_3 = u\frac{\partial}{\partial u}, \qquad V_4 = \frac{\partial}{\partial u}. \tag{۴,۳}$$

اثبات: میدانهای برداری V_i از قرار دادن $C_i = 1$ و $C_j = 0$ برای $j \neq i$ در $V(x,y,u)$ به دست می‌آیند.

فرض کنید $\Im$ جبر لی تولید شده توسط (۴,۳) باشد. در اینصورت جدول جابجاگر[1] $\Im$ بصورت زیر حاصل می‌شود. لازم به ذکر است که درایۀ واقع بر سطر iام و ستون j ام برابر $[V_i, V_j] = V_iV_j - V_jV_i$ است که $i, j = 1, \dots, 4$.

$[\ ,\ ]$	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	0	$-V_2$	0	0
V_2	V_2	0	0	0
V_3	0	0	0	$-V_4$
V_4	0	0	V_4	0

جدول۱: جدول جابجاگر جبر لی $\Im$

با اثر دادن تابع پتانسیل یا همان تابع نمایی روی مولدهای بینهایت کوچک تقارنی (۴,۳) می‌توانیم گروههای یک پارامتری $G_i(s)$ که توسط V_i تولید می‌شود را بدست آوریم.

$$\begin{aligned} G_1(s) &: (x,y,u) \mapsto (xe^s, ye^s, u) \\ G_2(s) &: (x,y,u) \mapsto (x, s+y, u) \\ G_3(s) &: (x,y,u) \mapsto (x, y, ue^s) \\ G_4(s) &: (x,y,u) \mapsto (x, y, s+u) \end{aligned} \tag{۵,۳}$$

با استفاده از این مطلب و داشتن جوابی از معادله (۱,۱) می‌توان جوابهای جدید را با اثر دادن تبدیلات $G_i(s)$ روی جوابهای اولیه بدست آورد.

۴. دستگاه بهینه و طبقه‌بندی زیرجبرهای معادله نیروی جریان

در این بخش به طبقه بندی زیرجبرهای تقارنی معادله (۱,۱) می‌پردازیم و با استفاده از آن دستگاه بهینه معادله نیروی جریان را به دست می‌آوریم. همانطور که در مقدمه بیان شد گروههای لی نقش مهمی در یافتن جوابهای دقیق و کاهش مرتبۀ یک معادله دارند. چون هر ترکیب خطی از مولدهای بینهایت کوچک، خود یک مولد بینهایت کوچک است می‌توان تعداد نامتناهی زیرگروه تقارنی مختلف برای یک معادله دیفرانسیل بدست آورد. بنابراین برای استفاده بیشتر از جوابها، مشخص کردن آندسته

[1] Commutator Table

از زیرگروههایی که دسته‌های متفاوت از جواب‌ها بدست می آورند، لازم است. چون هر تبدیل در گروه تقارنی یک جواب را به جوابی دیگر تبدیل می کند باید به دنبال جوابهای ناوردایی باشیم که به تبدیلات در کل گروه تقارنی وابسته نباشد. این مطلب منجر به پیدایش مفهومی به نام دستگاه بهینه می شود [۱۷]. یافتن یک دستگاه بهینه برای زیرگروهها با یافتن دستگاه بهینه برای زیرجبرها هم ارز است. خصوصاً برای زیرجبرهای یک-بعدی، این طبقه بندی همان طبقه بندی مدارهای نمایش الحاقی است. روش کار به این صورت است که یک عضو کلی در جبر لی را در نظر می‌گیریم و تبدیلات الحاقی مختلف را روی آن اثر می‌دهیم. این کار را تا آنجایی که این عضو به ساده ترین شکل ممکن تبدیل شود ادامه می دهیم [۱۷، ۱۸].

فرض کنید $[V_i, V_j]$ جابجاگر جبر لی، s پارامتر و $i, j = 1, \ldots, 4$ است. عمل الحاقی توسط سری زیر محاسبه می‌شود:

$$Ad(\exp(sV_i)V_j) = V_j - s[V_i, V_j] + \frac{s^2}{2}[V_i, [V_i, V_j]] - \cdots \qquad (۱,۴)$$

قضیه ۱,۴: یک سیستم بهینه یک-پارامتری برای جبر لی تقارنی معادله نیروی جریان بصورت زیر است.

۱) $V_1 + aV_3$ ۲) $V_1 + \varepsilon V_4$

۳) V_1 ۴) $\varepsilon V_2 + V_3$

۵) V_3 ۶) $\varepsilon V_2 + V_4$

۷) V_2 ۸) V_4

(۲,۴)

که در آن $a \in R$ دلخواه و $\varepsilon = \pm 1$ است.

اثبات: فرض کنید $F_i^s : \mathfrak{I} \to \mathfrak{I}$ توسط $V \mapsto Ad(\exp(sV_i)\ V)$ تعریف شود ($i = 1, \ldots, 4$ و $\mathfrak{I}$ جبر لی تولید شده توسط $V_1, \ldots, V_4$ است). نگاشتهای فوق خطی هستند و بنابراین می توان ماتریس متناظر با این نگاشتها را نسبت به پایه $\{V_1, \ldots, V_4\}$ بدست آورد. این ماتریسها که با M_i^s نشان می دهیم بترتیب عبارتند از:

(۳,۴)

$$M_1^s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{s_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2^s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -s_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_3^s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{s_3} \end{bmatrix}, \quad M_4^s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -s_4 & 1 \end{bmatrix}.$$

فرض کنید $V = \sum_{i=1}^{4} a_i V_i$، داریم:

$$F_4^{s_4} \circ F_3^{s_3} \circ F_2^{s_2} \circ F_1^{s_1} : V \mapsto (a_1 - s_2 a_2)V_1 + (e^{s_1} a_2)V_2 + (a_3 - s_4 a_4)V_3 + (e^{s_3} a_4)V_4 \qquad (۴,۴)$$

حال V را بصورت زیر ساده می کنیم:

اگر $a_1,a_3 \neq 0$ آنگاه بترتیب با قرار دادن $s_2=-\frac{a_2}{a_1}$ و $s_4=-\frac{a_4}{a_3}$ در $F_2^{s_2}$و $F_4^{s_4}$ می توان ضرایب V_2 و V_4 را به صفر تبدیل کرد. همچنین در صورت نیاز می توان با تغییر مقیاس فرض کرد $a_1=1$ و در نتیجه V به حالت (۱) کاهش می یابد.

اگر $a_3=0$ و $a_1 \neq 0$ آنگاه بترتیب با قرار دادن $s_2=-\frac{a_2}{a_1}$ و $s_3=\ln|a_4|$ در $F_2^{s_2}$ و $F_3^{s_3}$ می توان ضریب V_2 را به صفر و ضریب V_4 را به ± 1 یا صفر تبدیل کرد. همچنین در صورت نیاز می توان با تغییر مقیاس فرض کرد $a_1=1$ و در نتیجه V به یکی از حالتهای (۲) و (۳) کاهش می یابد.

اگر $a_1=0$ و $a_3 \neq 0$ آنگاه بترتیب با قرار دادن $s_4=-\frac{a_4}{a_3}$ و $s_1=\ln|a_2|$ در $F_4^{s_4}$و $F_1^{s_1}$ می توان ضریب V_4 را به صفر و ضریب V_2 را به ± 1 یا صفر تبدیل کرد. همچنین در صورت نیاز می توان با تغییر مقیاس فرض کرد $a_3=1$ و در نتیجه V به یکی از حالتهای (۴) و (۵) کاهش می یابد.

اگر $a_1=a_3=0$ آنگاه با قرار دادن $s_1=\ln|a_2|$ و $s_3=\ln|a_4|$ به ترتیب در $F_1^{s_1}$ و $F_3^{s_3}$ می توان ضریب V_2 و V_4 را به ± 1 یا صفر تبدیل کرد. در نتیجه V به یکی ازحالتهای (۶) و (۷) کاهش می یابد.

اگر $a_1=a_2=a_3=0$ آنگاه با قرار دادن $s_3=\ln|a_4|$ در $F_3^{s_3}$ می توان ضریب V_4 را به 1 تبدیل کرد. در نتیجه V به حالت (۸) کاهش می یابد. حالت دیگری برای بررسی باقی نمانده است و اثبات قضیه کامل می‌شود.

در اثبات قضیه فوق از روش حالت به حالت استفاده شده که اولین بار توسط اوزیانیکوف ارائه گردید [۱۸].

۵. معادلات کاهش یافته و جواب‌های دقیق معادله نیروی جریان

در این بخش با استفاده از مفهوم ناورداهای دیفرانسیلی، معادله نیروی جریان را کاهش می‌دهیم و برخی از جوابهای ناوردای گروهی آن را به دست می‌آوریم. همانطور که در بخش قبل اشاره شد ساختن جوابهای جدید از جوابهای قبلی یک معادله دیفرانسیل، از کاربردهای مهم تقارنهای آن معادله می‌باشد. در واقع، رویه های ناوردای نظیر یک گروه لی از تبدیلات متناظر با یک دستگاه از معادلات منجر به پیدایش جوابهای ناوردای گروهی خواهد شد. همانطور که بیان شد معادله نیروی جریان در دستگاه مختصات (x,y,u) تعریف شده است، بنابراین برای کاهش این معادله به دستگاه مختصاتی نیاز داریم که دارای یک متغیر مستقل و یک متغیر وابسته باشد. این دستگاه مختصات با یافتن ناورداهای مستقل (r,w)، نظیر مولدهای بینهایت کوچک تقارنی ساخته خواهد شد. در ادامه با استفاده از قاعده مشتق گیری زنجیره ای معادله مورد نظر به معادله ای در دستگاه جدید تبدیل می‌شود که مرتبه آن یک واحد کاهش یافته است.

به عنوان مثال برای V_1+aV_3 جوابهای ناوردای گروهی را با استفاده از کاهش مرتبه بدست می‌آوریم:

برای بدست آوردن ناورداهای دیفرانسیلی باید معادلهٔ $(V_1+aV_3)I=0$ را حل نمود.

$$(V_1+aV_3)I=(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+au\frac{\partial}{\partial u})I=x\frac{\partial I}{\partial x}+y\frac{\partial I}{\partial y}+au\frac{\partial I}{\partial u}=0 \qquad (۱,۵)$$

این معادله یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی همگن است و برای حل آن کافی است معادله دیفرانسیل مشخصه متناظر را که یک معادلهٔ معمولی است حل کنیم:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{du}{au} \qquad (۲,۵)$$

با حل این دو معادله دو ناوردای مستقل تابعی $r=\frac{y}{x}$ و $w=ux^{-a}$ بدست می‌آید. حال اگر تابع w را به عنوان تابعی از r در نظر بگیریم می‌توانیم با استفاده از قاعده زنجیری به محاسبه مشتقات جزئی موجود در معادله نیروی جریان بپردازیم. پس از جایگذاری در معادله، معادله نیروی جریان به معادله دیفرانسیل معمولی زیر تبدیل می‌گردد.

$$ww''+2Dr^2w+\frac{3}{2}Crww'+(A-2B)(rw')^2=0 \qquad (۳,۵)$$

که با حل آن و تبدیل دوبارهٔ متغیرها، جواب زیر به دست می‌آید:

$$u=-\frac{D}{16}x^4+\frac{C}{4}x^2 \qquad (۴,۵)$$

این جواب از معادله نیروی جریان، جواب ناوردای گروهی متناظر با V_1+aV_3 است. به همین صورت می‌توان به ازای بقیهٔ میدانهای برداری موجود در قضیه ۱,۴ جوابهای ناوردای گروهی را بدست آورد. برخی دیگر از جوابهای ناوردای گروهی معادله نیروی جریان محاسبه و در جدول زیر نشان داده شده است.

j	X	r_j	w_j	جواب معادلات کاهش یافته پس از تغییر متغیر
۱	V_1+V_4	yx^{-1}	$-\ln x+u$	$u=\ln x-\frac{D}{16}x^4+\frac{C}{4}x^2$
۲	V_1	yx^{-1}	u	$u=(\frac{D}{4}x^2+C)x^2+\ln\frac{4}{x}$
۳	V_2+V_3	x	ue^{-y}	$u=(B(\ln x^2-1)-\frac{D}{16})x^4+(8A(1-\ln x)+\frac{C}{4})x^2+32y\ln x$
۴	V_2+V_4	x	$-y+u$	$u=(B-\frac{D}{16})x^4+(\frac{C}{4}-4A)x^2+16y$
۵	V_2	x	u	$u=((Byx^2-1)-Dy^{-1})x^4+(8Ay+4Cy^{-\frac{1}{2}})x^2+16\sqrt{y}$

جدول ۲. جوابهای دقیق معادله نیروی جریان

۶. قوانین پایستگی معادلهٔ (۱,۱)

در این بخش به محاسبه قوانین پایستگی معادله نیروی جریان می‌پردازیم. ابتدا لم زیر را بیان می‌کنیم

لم ۱,۶: توابع $Q \in A^q$ ، $L \in A$ مفروض می‌باشند. در این صورت

$$E\left[prv_Q(\Delta\,)\right] = prv_Q[E(L)] + D_Q^* E(L)$$

گزاره ۲,۶: [۱۹] فرض کنیم $\Delta = 0$ یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل باشد که مشتق فرشه آن خودالحاق است : $D^* = D_{\mathbb{A}}$ ، بنابراین، معادلات اویلر-لاگرانژ برای یک مسئله تغییراتی می‌باشد. یک میدان برداری تکاملی v_Q یک تقارن تغییراتی آن می‌باشد اگر و تنها اگر به ازای هر x,u

$$prv_Q(\Delta) + D_Q^*(\Delta) = 0$$

اکنون، با توجه به مطالب بیان شده مشاهده می‌گردد که در حالتی که دستگاه معادلات دیفرانسیل Δ ، معادلات اویلر-لاگرانژ برای مسئله تغییراتی باشد، شرط آن که Q مشخصه یک قانون پایستگی باشد و شرط آن که v_Q یک گروه تقارنی تغییراتی تولید نماید یکسان می‌باشند. بنابراین ، به بیان تعمیم قضیه نوتر می‌پردازیم.

قضیه ۳,۶: یک میدان برداری تعمیم یافته v یک گروه تقارنی از تابع عملکردی $\mathcal{L}$ تعیین می‌نماید اگر و تنها اگر مشخصه $Q \in A^q$ از آن، مشخصه یک قانون پایستگی $DivP = 0$ معادلات اویلر-لاگرانژ متناظر $E[L] = 0$ باشد. به ویژه، هر گاه $\mathcal{L}$ یک مسئله تغییراتی نا تباهیده باشد، آن گاه یک تناظر یک به یک بین کلاس هم ارزی از قوانین پایستگی غیر بدیهی معادلات اویلر-لاگرانژ و کلاس های هم ارزی تقارن های تغییراتی تابع عملکردی وجود دارد. [۱۹]

با استفاده از قضیه فوق که در واقع محکی برای قوانین پایستگی است و اثر دادن عملگر اویلر-لاگرانژ روی تبعک معادله نیروی جریان می‌توان مشخصه قوانین بقای این معادله را بدست آورد.

$$\begin{aligned}
Q_1 &= (xy - \frac{1}{2}x^2)u + xu - y\,(\frac{1}{3}u^3 + yu),\\
Q_2 &= \mathrm{u} - xu\,(yu - (\frac{1}{3}u^3 + xu)),\\
Q_3 &= xe^{x+\frac{1}{2}u^2+u} - yue^{x+\frac{1}{2}u^2+u}.
\end{aligned}$$

با استفاده از مشخصه های فوق و با اثر عملگر هموتوپی روی تقارنهای تعمیم یافته معادله و متحد قرار دادن ضرایب معادله تعیین کننده سه قانون پایستگی زیر برای معادله نیروی جریان بدست می‌آید

$$D_y[(x-\frac{1}{2}y^2)u+yu]+D_x[\frac{1}{2}y^2-x)\,\mathrm{u}-y\,(\frac{1}{3}u^3+u)]=0,$$
$$D_y[u-yu]+D_x[yu-(\frac{1}{3}u^3+u)]=0,$$
$$D_y[e^{x+\frac{1}{2}u^2+u}]+D_x[-ue^{x+\frac{1}{2}u^2+u}]=0.$$

نتیجه گیری

در این مقاله به تحلیل تقارنهای یکی از معادلات مهم در مکانیک سیالات به نام معادله نیروی جریان پرداختیم. ثابت شد که جبر تقارنهای این معادله توسط چهار مولد تولید می‌شود. همچنین دستگاه بهینه زیرجبرهای جبر تقارنی را بدست آوردیم. در ادامه جوابهای ناوردای گروهی مربوط به تقارنهای نقطه ای معادله نیروی جریان را بدست آورده و آنها را طبقه بندی کردیم. در پایان با استفاده از تقارنهای تعمیم یافته این معادله مشخصه مربوط به قوانین پایستگی آن را محاسبه و سه قانون پایستگی جدید برای این معادله بدست آوردیم.

References

1. S. Anco and G. Bluman, Direct construction method for conservation laws of partial differential equations Part II: general treatment, *Euro. J. Appl. Math*., **13** (2002), 567-585.

2. Y. AryaNejad, M. Jafari and A. Khalili, Examining (3+ 1)-Dimensional Extended Sakovich Equation Using Lie Group Methods, *Int. J. math. model. comput*., **13** (2)(2023), SPRING.

3. K. Avila et al., The Onset of Turbulence in Pipe Flow, *Science* **333** (8), (2011), 192-196.

4. G. W. Bluman, A. F. Cheviakov and S. C. Anco, *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations*, Appl. Math. Sciences, vol. 168, Springer, New York, (2010).

5. G. W. Bluman, and Cole, J. D., The general similarity solutions of the heat equation, *Journal of Mathematics and Mechanics*, **18** (1969), 1025-1042.

6. G. W. Bluman and J. D. Cole, *Similarity Methods for Differential equations*, Appl. Math. Sci., No. 13, Springer-Verlag, New York, (1974).

7. G. W. Bluman, and Kumei, S., *Symmetries and Differential Equations*, Springer, New York, (1989).

8. A. F. Cheviakov, Computation of fluxes of conservation laws, *J. Engineering Mathematics*, **66** (2010), 153-173.

9. P. A. Clarkson, E. L. Mansfield and T. J. Priestley, Symmetries of a class of nonlinear third-order partial differential equations, *Mathematical and modelling*, **25** (1997), 195-212.

10. W. Hereman, P. J. Adams, H. L. Eklund, M. S Hickman and B. M. Herbst, Direct methods and symbolic software for conservation laws of nonlinear equations. In: Z. Yan, (Ed.), Advances in Nonlinear Waves and Symbolic Computation, Nova Science Publishers, New York, (2009), 19-79.

11. E. Hillgarter, Lie symmetry analysis of a pipe flow energy equation, *Appl. Math. Sci*., **2** (2008), 1979-1988.

12. M. Jafari, A. Zaeim and M. Gandom, On similarity reductions and conservation laws of the two non-linearity terms Benjamin-Bona-Mahoney equation, *Journal of Mathematical Extension*, **17**(7) (2023), 1-22.

13. S. Lie, On integration of a class of linear partial differential equations by means of definite integrals, *Arch. For Math*., **6**, (1881). ***328***-368, translation by N. H. Ibragimov.

14. M. Nadjafikhah and M. Jafari, Computation of partially invariant solutions for the Einstein Walker manifolds' identifying equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul*., **18**(12) (2013), 3317-3324.

15. M. Nadjafikhah and M. Jafari, Symmetry reduction of the two-dimensional Ricci flow equation, *Geometry*, **2013**(2013), Article ID 373701.

16. E. Noether, Invariante variations probleme, *Nachr. Akad. Wiss. Gott. Math. Phys. Kl*., **2** (1918), 235-257. (English translation in Transp. Theory Stat. Phys., **1**(3) (1971), 186-207).

17. P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer, New York, (1986).

18. L. V. Ovsiannikov, *Group Analysis of Differential Equations*, Academic Press, New York, (1982).

19. S. Opanasenko and R. O. Popovych, Generalized symmetries and conservation laws of (1+1)-dimensional Klein-Gordon equation, *Journal of Mathematical Physics*, **61**(10) (2020), 101515.

20. D. Poole, Symbolic computation of conservation laws of nonlinear partial differential equations using homotopy operators, Ph.D. dissertation, Colorado School of Mines, Golden, Colorado, (2009).

21. D. Poole and W. Hereman, The homotopy operator method for symbolic integration by parts and inversion of divergences with applications, *Appl. Anal*. **87** (2010), 433-455. Prog. Theor. Phys. **64** (1980), 1959-1967.

22. R. Siegel, E. M. T. Sparrow and M. Hallman, Steady Laminar Heat Transfer in a Circular Tube with Prescribed Wall Heat Flux, *Applied Scientific Research*, A**7**(5) (1958), 386-392.