Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Surjective Norm-Additive in Modulus Maps between Real Lipschitz Algebras with Lipschitz Involution

Mansureh Mohammadi [1], **Davood Alimohammadi** [2] ✉

1. Department of Mathematics, Faculty of Science, Arak University,38481-77584, Arak, Iran. E-mail: s39912131067.phd@araku.ac.ir

2. Department of Mathematics, Faculty of Science, Arak University, 38481-77584, Arak, Iran. ✉ E-mail: d-alimohammadi@araku.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 24 February 2024
Received in revised form: 9 January 2025
Accepted: 17 February 2025
Published online: 28 February 2025

Keywords:
Lipschitz involution,
Norm-additive in modulus,
Real Lipschitz algebra,
Uniform norm.

ABSTRACT

Introduction

Let X be a topological space. We denote by $C(X)$ the set of all complex-valued functions on X. Then $C(X)$ is a commutative complex algebra. Let $C^b(X)$ denote the set of all $f \in C(X)$ for which f is bounded. It is known that $C^b(X)$ is a commutative complex Banach algebra with the uniform norm $\|\cdot\|_X$ defined by $\|f\|_X = \sup\{|f(x)|: x \in X\}$ $(f \in C^b(X))$. Note that, $\lambda_X \in C^b(X)$ where $\lambda \in \mathbb{C}$ and λ_X is the constant function on X with value λ. We denote by $C_0(X)$ the set of all $f \in C(X)$ for which f vanishes at infinity. It is known that $C_0(X)$ is a uniformly closed subalgebra of $C^b(X)$. Note that, $1_X \notin C_0(X)$ whenever X is not compact and $C^b(X) = C_0(X) = C(X)$ whenever X is compact.

The symbol $\mathbb{k}$ denotes a field can be $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. Let X and Y be topological spaces, A and B be linear subspaces of $C^b(X)$ and $C^b(Y)$, respectively, over $\mathbb{K}$ and $T: A \to B$ be a map. We say that T is $\mathbb{R}^+$-*homogenous* if $T(rf) = rT(f)$ for all $r > 0$ and $f \in A$. The map T is called *norm-additive in modulus* if $\| |T(f)| + |T(g)| \|_Y = \||f| + |g|\|_X$ for every pair $f, g \in A$.

In [9], Tonev and Yates characterized surjections T from a complex uniform algebra A on X to a complex uniform algebra B on Y for which T is $\mathbb{R}^+$-homogenous norm-additive in modulus, where X and Y are compact Hausdorff spaces. They also gave certain conditions under which T is an isometric algebra isomorphism. In [4], Hosseini and Font generalized the main result in [9] for function algebras on locally compact Hausdorff spaces. In fact, they characterized maps T and S from a complex function algebra A on X to a function algebra B on Y for which T and S are surjection $\mathbb{R}^+$-homogenous and satisfying

$$\||T(f)| + |T(g)|\|_Y = \||f| + |g|\|_X = \||S(f)| + |S(g)|\|_Y$$

for all $f, g \in A$, which are called *jointly norm-additive in modulus*, where X and Y are locally compact Hausdorff spaces.

Let (X, d) and (Y, ρ) be metric spaces. A map $\psi: X \to Y$ is called a *Lipschitz mapping* from $(X, d)$to (Y, ρ) if there exists a constant C such that $\rho(\psi(x_1), \psi(x_2)) \leq Cd(x_1, x_2)$ for all $x_1, x_2 \in X$. A *Lipschitz homeomorphism* from (X, d) to (Y, ρ) is a bijection $\psi: X \to Y$ such the ψ is a Lipschitz mapping from $(X, d)$to (Y, ρ) and ψ^{-1} is a Lipschitz mapping from (Y, ρ) to (X, d).

Let (X, d)be a metric space. For a $\mathbb{K}$-valuded function f on X, the *Lipschitz constant* of f is denoted by $\mathcal{L}_{(X,\,d)}(f)$ and defined by

$$\mathcal{L}_{(X,\,d)}(f) = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y\right\}.$$

A function $f: X \to \mathbb{K}$ is called a $\mathbb{K}$-*valued Lipschitz function* on (X, d)if $\mathcal{L}_{(X,\,d)}(f) < \infty$. We denote by $\mathrm{Lip}_{\mathbb{K}}(X, d)$ the set of all $\mathbb{K}$-valued bounded Lipschitz functions f on (X, d). Then $\mathrm{Lip}_{\mathbb{K}}(X, d)$ is a subalgebra of $C^b(X)$ over $\mathbb{k}$ that contains 1_X and a Banach algebra over $\mathbb{k}$ with the Lipschitz sum norm $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}(X,\,d)}$ defined by

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}(X,\,d)} = \|f\|_X + \mathcal{L}_{(X,\,d)}(f) \qquad \big(f \in \mathrm{Lip}_{\mathbb{K}}(X, d)\big).$$

The algebra $\mathrm{Lip}_{\mathbb{K}}(X, d)$ is called *Lipschitz algebra* over $\mathbb{K}$ on (X, d). This algebra was first introduced by Sherbert in [7]. We write by $\mathrm{Lip}(X, d)$ insteand of $\mathrm{Lip}_{\mathbb{C}}(X, d)$.

In [4], Hosseini and Font characterized surjective $\mathbb{R}^+$-homogenous and jointly norm-additive maps between complex Lipschitz algebras on compact metric spaces as the following**.**

Theorem [4, Corollary 3.7]**.** *Let (X, d) and (Y, ρ) be compact metric spaces and let $T, S: \mathrm{Lip}(X, d) \to \mathrm{Lip}(Y, \rho)$ be surjective $\mathbb{R}^+$-homogenous jointly norm-additive in modulus maps. Then there exists a Lipschitz homeomorphism φ from (Y, ρ) to (X, d) such that $|T(f)(y)| = |f(\varphi(y))| = |S(f)(y)|$ for all $f \in \mathrm{Lip}(X, d)$ and $y \in Y$.*

Let X be a compact Hausdorff Space. A self-map $\tau : X \to X$ is called a *topological involution* on X if τ is continuous and $\tau\big(\tau(x)\big) = x$ for all $x \in X$. For a topological involution τ on X the map $\tau^*: C(X) \to C(X)$ defined by $\tau^*(f) = \bar{f} \circ \tau, f \in C(X)$, is an algebra involution on $C(X)$ which is called the *induced algebra involution by* τ on $C(X)$ where $\bar{f}$ is the conjugate function of f. Define $C(X, \tau) = \{f \in C(X) : \tau^*(f) = f\}$. Then $C(x, \tau)$ is a self-adjoint uniformly closed real subalgebra of $C(X)$ that contains 1_X and separates the points of X. Moreover, $C(X) = C(x, \tau) \oplus iC(x, \tau)$ and $i1_X \notin C(X, \tau)$. This algebra was first introduced by Kulkarni and Limaye in [4]. For a detailed account of several properties of $C(x, \tau)$, we refer to [5].

Let (X, d) be a compact matric space. A self-map τ of X is called a *Lipschitz involution* on (X, d) if τ is a Lipschitz mapping on (X, d) and $\tau\big(\tau(x)\big) = x$ for all $x \in X$. For example, the self-map τ on $\overline{\mathbb{D}}$ defined by $\tau(z) = \bar{z}$, $z \in \overline{\mathbb{D}}$, is a Lipschitz involution on $\overline{\mathbb{D}}$ where $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Let τ be a Lipschitz involution on (X, d) and τ^* be the induced algebra involution by τ on $C(X)$. Then $\tau^*\big(\mathrm{Lip}(X, d)\big) = \mathrm{Lip}(X, d)$. Define

$$\mathrm{Lip}(X, d, \tau) = \{f \in \mathrm{Lip}(X, d): \tau^*(f) = f\}.$$

Then $\mathrm{Lip}(X, d, \tau)$ is a self-adjoint real subalgebra of $\mathrm{Lip}(X,d)$ and $C(X,\tau)$ that contains 1_X and separates the points of X. Moreover, $\mathrm{Lip}(X, d) = \mathrm{Lip}(X, d, \tau) \oplus i\mathrm{Lip}(X, d, \tau)$ and $\mathrm{Lip}(X, d, \tau) = \mathrm{Lip}_{\mathbb{R}}(X, d)$ if and only if τ is the identity map on X. The $\mathrm{Lip}(X, d, \tau)$-algebras are called *real Lipschitz algebras with Lipschitz involution*. These algebras were first introduced in [2].

Maine Results

In this paper, we obtain the following results.

Theorem 1.1. *Let (X, d) and (Y, ρ)be compact metric spaces, τ be a Lipschitz involution on (X, d), η be a Lipschitz involution on (Y, ρ), A be a real subalgebra of $C(X, \tau)$ which contains $\mathrm{Lip}(X, d, \tau)$ and B be a real subalgebra* *of* $C(Y,\eta)$ *which contains* $\mathrm{Lip}(Y,\rho,\eta)$. *Suppose that* $x_\tau = \{x, \tau(x)\}$ *for all* $x \in X$, *and* $X_\tau = \{x_\tau : x \in X\}$, $y_\eta = \{y,\ \eta(y)\}$ *for all* $y \in Y$ *and* $Y_\eta = \{y_\eta : y \in Y\}$. *Let* $T: A \to B$ *be a surjective* $\mathbb{R}^+$*-homogenous norm-additive map. Then* $|T(1_X)| = 1_Y$ *and there exists a unique bijection* $\Phi: Y_\eta \to X_\tau$ *such that if* $y \in Y$ *and* $x \in \Phi(y_\eta)$ *then* $|T(f)(y)| = |f(x)|$ *for all* $f \in A$.

Theorem 1.2. *Let* (X,d) *and* (Y,ρ) *be compact metric spaces. If* $T: \mathrm{Lip}_{\mathbb{R}}(X,d) \to \mathrm{Lip}_{\mathbb{R}}(Y,\rho)$ *is a surjective* $\mathbb{R}^+$*-homogenous norm-additive map, then* $|T(1_X)(y)| = 1_Y$ *and there exists a Lipschitz homeomorphism* φ *from* (Y,ρ) *to* (X,d) *such that* $|T(f)(y)| = |f(\varphi(y))|$ *for all* $f \in \mathrm{Lip}_{\mathbb{R}}(X,d)$ *and* $y \in Y$.

How to cite: Mohammadi, M. & Alimohammadi, D. (2024). Surjective norm-additive in modulus maps between real Lipschitz algebras with Lipschitz involution, *Mathematical Researches*, **10** (4), 77 – 99.

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

نگاشت‌های نرم–جمعی در قدرمطلق پوشا بین جبرهای حقیقی لیپشیتس با برگشت لیپشیتس

منصوره محمدی [۱]**، داود علیمحمدی** [۲] ✉

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه اراک، ۳۸۴۸۱-۷۷۵۸۴، ایران. رایانامه: s39912131067.phd@araku.ac.ir

۲. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم، ۷۷۵۸۴-۳۸۴۸۱، ایران. رایانامه: d-alimohammadi@araku.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۵
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۱۰/۲۰
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۱/۲۹
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۱۲/۱۰

واژه‌های کلیدی:
برگشت لیپشیتس،
جبر حقیقی لیپشیتس،
نرم- جمعی در قدرمطلق،
نرم یکنواخت.

چکیده

فرض کنیم (X,d) و (Y,ρ) فضاهای متریک فشرده، τ یک برگشت لیپشیتس بر (X,d) و η یک برگشت لیپشیتس بر (Y,ρ) باشند. همچنین فرض کنیم به ازای هر $x \in X$؛ $x_\tau = \{x, \tau(x)\}$، $X_\tau = \{x_\tau: x \in X\}$، به ازای هر $y \in Y$؛ $y_\eta = \{y,\ \eta(y)\}$ و $Y_\eta = \{y_\eta: y \in Y\}$، A یک زیرجبر حقیقی $C(X,\tau)$ باشد که شامل $\mathrm{Lip}(X,d,\tau)$ است و B یک زیرجبر حقیقی $C(Y,\eta)$ باشد که شامل $\mathrm{Lip}(Y,\rho,\eta)$ است. ثابت می‌کنیم اگر $T: A \to B$ یک نگاشت پوشای $\mathbb{R}^+$-همگن نرم- جمعی در قدرمطلق باشد ، دوسویی یکتای $\Phi: \mathrm{Y}_\eta \to \mathrm{X}_\tau$ وجود دارد به‌طوری‌که هرگاه $y \in Y$ و $x \in \Phi(y_\eta)$ آنگاه به ازای هر $f \in A$ داریم $|T(f)(y)| = |f(x)|$. با استفاده از این موضوع نشان می‌دهیم اگر (X,d) و (Y,ρ) فضاهای متریک فشرده باشند و T یک نگاشت پوشای $\mathbb{R}^+$- همگن نرم- جمعی در قدرمطلق از $\mathrm{Lip}_\mathbb{R}(X,d)$ به $\mathrm{Lip}_\mathbb{R}(Y,\rho)$ باشد، آنگاه یک همسانریختی لیپشیتس φ از (Y,ρ) به (X,d) یافت می‌شود به‌طوری‌که به ازای هر $f \in \mathrm{Lip}_\mathbb{R}(Y,\rho)$ و $y \in Y$؛ $|T(f)(y)| = |f(\varphi(y))|$.

استناد: محمدی، منصوره و علیمحدی، داود؛ (۱۴۰۳). نگاشت‌های نرم-جمعی در قدرمطلق پوشا بین جبرهای حقیقی لیپشیتس با برگشت لیپشیتس. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۰** (۴)، ۷۷ – ۹۹.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

فرض کنیم $\mathbb{K}$ یک میدان باشد که یا میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است یا میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$.

تعریف ۱٫۱. فرض کنیم A و B فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشند و $T: A \to B$ یک تابع باشد. گوییم T یک نگاشت $\mathbb{R}^+$- همگن است هرگاه به ازای هر عدد حقیقی مثبت r و هر $\mathfrak{a} \in A$ داشته باشیم $T(r\mathfrak{a}) = rT(\mathfrak{a})$.

فرض کنیم E یک مجموعه ناتهی بوده و $B(E)$ مجموعه همه توابع مختلط- مقدار کراندار بر E باشد. می‌دانیم $B(E)$ یک جبر باناخ[1] تعویض‌پذیر مختلط تحت نرم یکنواخت $\|\cdot\|_E$ است که به‌صورت

$$\|f\|_E = \sup\{|f(x)|: x \in E\} \qquad (f \in B(E)),$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۲٫۱. فرض کنیم X و Y مجموعه‌های ناتهی باشند، A یک زیرفضای خطی $B(X)$ بوده و B یک زیرفضای خطی $B(Y)$ روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. همچنین فرض کنیم $T: A \to B$ یک تابع باشد. گوییم T نرم- جمعی در قدرمطلق است هرگاه به ازای هر $f, g \in A$ داشته باشیم $\|\,|T(f)| + |T(g)|\,\|_Y = \|\,|f| + |g|\,\|_X$.

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. مجموعه همه توابع مختلط- مقدار پیوسته بر X را با $C(X)$ نشان می‌دهیم. در این‌صورت $C(X)$ یک جبر مختلط تعویض‌پذیر است. مجموعه همه توابع مختلط- مقدار پیوسته و کراندار بر X را به $C^b(X)$ نشان می‌دهیم. در این‌صورت $C^b(X)$ یک زیرجبر مختلط $B(X)$ و $C(X)$ است و با نرم یکنواخت $\|\cdot\|_X$ یک جبر مختلط باناخ تعویض‌پذیر است. توجه کنید که $\lambda_X \in C^b(X)$، که $\lambda \in \mathbb{C}$ و λ_X تابع ثابت با مقدار λ بر X است. مجموعه همه توابع f در $C(X)$ را که در بینهایت به صفر می‌روند، با $C_0(X)$ نشان می‌دهیم. می‌دانیم که $C_0(X)$ یک زیرجبر مختلط یکنواخت بسته $C^b(X)$ است. توجه کنید اگر X فشرده نباشد آنگاه $1_X \notin C_0(X)$ و اگر X فشرده باشد آنگاه

$$C^b(X) = C_0(X) = C(X).$$

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک موضعاً فشرده هاوسدورف[2] باشد. زیرجبر مختلط A از $C_0(X)$، یک جبر تابعی بر X نامیده می‌شود هرگاه A قویاً نقاط X را جدا کند، به این مفهوم که برای هر دو نقطه متمایز x و z در X یک تابع f در A یافت شود به‌طوری‌که $f(x) \neq f(z)$ و برای هر $x \in X$ یک تابع g در A یافت شود که $g(x) \neq 0$. یک جبر تابعی یکنواخت بسته بر X، یک جبر تابعی بر X است که در $(C_0(X), \|\cdot\|_X)$ بسته است. توجه کنید وقتی X فشرده است، فرض می‌کنیم جبرهای تابعی بر X شامل توابع مختلط- مقدار ثابت بر X هستند و دراین‌حالت هر جبر تابعی یکنواخت بسته بر X، یک جبر تابعی یکنواخت بر X نامیده می‌شود.

---

[1] Banach
[2] Hausdorff

تونف[1] و ییتس[2] در [8] نگاشت‌های نرم- خطی و نرم- جمعی در قدرمطلق بین جبرهای یکنواخت A و B بر فضاهای فشرده هاوسدورف X و Y را مورد بررسی قرار دادند و نشان دادند که نگاشت‌های پوشای $\mathbb{R}^{+}$- همگن نرم- جمعی در قدرمطلق بین جبرهای مذکور، عملگرهای ترکیبی در قدرمطلق ویژه هستند. به عبارت دقیق‌تر، نتیجه زیر را بدست آوردند.

قضیه ۳٫۱.[8, Proposition 10] اگر A و B جبرهای تابعی یکنواخت به ترتیب بر فضاهای فشرده هاوسدورف X و Y باشند و $T: A \to B$ یک نگاشت پوشای $\mathbb{R}^{+}$- همگن نرم- جمعی در قدرمطلق باشد، آنگاه یک نگاشت پیوسته ψ از $\mathrm{Ch}(A, X)$ به $\mathrm{Ch}(B, Y)$ یافت می‌شود به‌طوری‌که به ازای هر $f \in A$ و هر $x \in X$ ؛ $|T(f)(\psi(x))| = |f(x)|$، که در آن $\mathrm{Ch}(A, X)$ مرز شوکه A نسبت به X است.

حسینی[3] و فونت[4] در [3]، نگاشت‌های نرم- جمعی در قدرمطلق بین جبرهای تابعی، نه لزوماً یکنواخت بسته، بر فضاهای موضعاً فشرده هاوسدورف را بررسی‌کردند و برخی از نتایج به‌دست‌آمده توسط تونف و ییتس را برای جبرهای تابعی بر فضاهای موضعاً فشرده هاوسدورف تعمیم دادند. در واقع، آنها در [3, Corollary 3.6] ساختار نگاشت‌های T و S از یک جبر تابعی A بر X به یک جبر تابعی B بر Y را مشخص کردند که T و S نگاشت‌های $\mathbb{R}^{+}$- همگن پوشا هستند و در شرط

$$\| |T(f)| + |T(g)| \|_{Y} = \| |f| + |g| \|_{X} = \| |S(f)| + |S(g)| \|_{Y} \quad (f, g \in A),$$

صدق می‌کنند، که در آن X و Y فضاهای موضعاً فشرده هاوسدورف هستند. این نگاشت‌ها تواماً نرم- جمعی در قدرمطلق نامیده می‌شوند.

فرض کنیم (X, d) و (Y, ρ) فضاهای متریک باشند. نگاشت $\psi: X \to Y$ یک نگاشت لیپشیتس[5] از (X, d) به (Y, ρ) می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت C یافت شود به‌طوری‌که به ازای هر $x_1, x_2 \in X$ ؛

$$\rho\big(\psi(x_1), \psi(x_2)\big) \leq C d(x_1, x_2).$$

نگاشت $\varphi: Y \to X$ را یک همسانریختی لیپشیتس از (Y, ρ) به (X, d) می‌نامیم هرگاه φ دوسویی باشد ، φ یک نگاشت لیپشیتس از (Y, ρ) به (X, d) بوده و φ^{-1} یک نگاشت لیپشیتس از (X, d) به (Y, ρ) باشد .

فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. تابع $f: X \to \mathbb{K}$ را یک *تابع* $\mathbb{K}$- مقداری لیپشیتس بر (X, d) می‌نامیم هرگاه f یک نگاشت لیپشیتس از (X, d) به فضای متریک $\mathbb{K}$ با متریک اقلیدسی باشد. ثابت لیپشیتس f را به $\mathcal{L}_{(X,d)}(f)$ نشان می‌دهیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{L}_{(X,d)}(f) = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y\right\}.$$

---

[1] Tonév
[2] Yates
[3] Hosseini
[4] Font
[5] Lipschitz

مجموعه همه توابع $\mathbb{K}$- مقداری کراندار لیپشیتس بر (X, d) را به $\mathrm{Lip}_{\mathbb{K}}(X, d)$ نشان می‌دهیم. می‌دانیم $\mathrm{Lip}_{\mathbb{K}}(X, d)$ یک جبر باناخ تعویض‌پذیر یکانی با نرم- جمعی لیپشیتس $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}\,(X,\,d)}$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}\,(X,\,d)} = \|f\|_X + \mathcal{L}_{(X,\,d)}(f) \qquad\qquad \big(f \in \mathrm{Lip}_{\mathbb{K}}(X, d)\big).$$

این جبرها نخستین بار توسط شربرت[1] در [7] معرفی شده‌اند. توجه داریم که $\mathrm{Lip}_{\mathbb{K}}(X, d)$ نقاط X را جدا می‌کند. هرگاه $\mathbb{K} = \mathbb{C}$، جبر $\mathrm{Lip}_{\mathbb{K}}(X, d)$ را با $\mathrm{Lip}(X, d)$ نشان می‌دهیم.

حسینی و فونت در [3] ساختار نگاشت‌های پوشای $\mathbb{R}^+$- همگن تواماً نرم- جمعی در قدرمطلق بین جبرهای مختلط لیپشیتس را تعیین کردند و نشان دادند که این نگاشت‌ها ترکیبی موزون در قدرمطلق هستند. به عبارت دقیق‌تر:

قضیه ۴،۱. [3, Corollary 3.7]. فرض کنیم (X, d) و (Y, ρ) فضاهای متریک فشرده بوده و S و T نگاشت‌های پوشای $\mathbb{R}^+$- همگن تواماً نرم- جمعی در قدر مطلق از $\mathrm{Lip}(X, d)$ به $\mathrm{Lip}(Y, \rho)$ باشند. در این‌صورت یک همسانریختی لیپشیتس φ از (Y, ρ) به (X, d) یافت می‌شود به‌طوری‌که به ازای هر $f \in \mathrm{Lip}(X, d)$ و هر $y \in Y$؛

$$|S(f)(y)| = |f(\varphi(y))| = |T(f)(y)|.$$

فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد. خودنگاشت $\tau: X \to X$ یک برگشت بر X نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in X$؛ $\tau(\tau(x)) = x$. گوییم زیرمجموعه E از X یک مجموعه τ- پایا است هرگاه $\tau(E) \subseteq E$. واضح است که در این‌صورت $\tau(E) = E$. در صورتی‌که X یک فضای توپولوژیک باشد، خودنگاشت $\tau: X \to X$ یک برگشت توپولوژیک بر X نامیده می‌شود هرگاه τ یک برگشت بر X بوده و یک نگاشت پیوسته باشد. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک فشرده هاوسدورف بوده و $\tau: X \to X$ یک برگشت توپولوژیک بر X باشد. در این‌صورت نگاشت $\tau^*: C(X) \to C(X)$ تعریف شده به‌صورت

$$\tau^*(f) = \bar{f} \circ \tau \qquad\qquad \big(f \in C(X)\big),$$

یک برگشت جبری بر $C(X)$ است که برگشت جبری القایی توسط τ بر $C(X)$ نامیده می‌شود،که $\bar{f}$ تابع مزدوج f است. قرار می‌دهیم

$$C(X, \tau) = \{f \in C(X):\ \tau^*(f) = f\}.$$

کولکارنی[2] و لیمایه[3] در [5] نشان‌دادند $C(X, \tau)$ یک زیرجبر حقیقی خودالحاقی $C(X)$ است که نقاط X را جدا می‌کند، $1_X \in C(X, \tau)$، $i1_X \notin C(X, \tau)$ و $C(X) = C(X, \tau) \oplus iC(X, \tau)$. جبر $C(X, \tau)$ اولین بار توسط کولکارنی و لیمایه در [5] معرفی شده است. برای دانستن جزئیات بیشتر در مورد $C(X, \tau)$ و زیرجبرهای حقیقی آن به [6] مراجعه شود.

[1] Sherbert
[2] Kulkarni
[3] Limaye

فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد. خودنگاشت $\tau: X \to X$ یک برگشت لیپشیتس بر (X,d) نامیده می‌شود هرگاه τ یک برگشت بر X بوده و یک نگاشت لیپشیتس از (X,d) به (X,d) باشد. توجه کنید اگر τ یک برگشت لیپشیتس بر (X,d) باشد، $C > 0$ و به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $d(\tau(x),\tau(y)) \leq Cd(x,y)$ آنگاه $C \geq 1$. برای مثال، خودنگاشت τ بر $\overline{\mathbb{D}}$ را به‌صورت

$$\tau(z) = \bar{z} \qquad (z \in \overline{\mathbb{D}}),$$

تعریف می‌کنیم. در این‌صورت τ یک برگشت لیپشیتس بر $\overline{\mathbb{D}}$ است، که $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1\}$.

فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک فشرده باشد ، τ یک برگشت لیپشیتس بر (X,d) بوده و τ^* برگشت جبری القایی بر $C(X)$ توسط τ باشد. در این‌صورت $\tau^*(\mathrm{Lip}(X,d)) = \mathrm{Lip}(X,d)$. قرار می‌دهیم

$$\mathrm{Lip}(X,d,\tau) = \{f \in \mathrm{Lip}(X,d):\ \tau^*(f) = f\}.$$

در واقع، $\mathrm{Lip}(X,d,\tau) = \mathrm{Lip}(X,d) \cap C(X,\tau)$. در [2] ثابت شده‌است که $\mathrm{Lip}(X,d,\tau)$ یک زیرجبر خودالحاقی جبرهای $\mathrm{Lip}(X,d)$ و $C(X,\tau)$ است که نقاط X را جدا می‌کند، $1_X \in \mathrm{Lip}(X,d,\tau)$، $i1_X \notin \mathrm{Lip}(X,d,\tau)$، $\mathrm{Lip}(X,d) = \mathrm{Lip}(X,d,\tau) \oplus i\mathrm{Lip}(X,d,\tau)$ و $\mathrm{Lip}(X,d,\tau)$ با نرم $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}(X,d)}$ یک جبر باناخ حقیقی است. به‌علاوه، $\mathrm{Lip}(X,d,\tau) = \mathrm{Lip}_{\mathbb{R}}(X,d)$ اگر و فقط اگر τ نگاشت همانی بر X باشد. جبر $\mathrm{Lip}(X,d,\tau)$ نخستین بار در [2] معرفی شده است.

فرض کنیم (X,d) و (Y,ρ) فضای متریک فشرده بوده، τ و η به ترتیب برگشت‌های لیپشیتس بر (X,d) و (Y,ρ) باشند، برای هر $x \in X$؛ $x_\tau = \{x,\tau(x)\}$ و $X_\tau = \{x_\tau : x \in X\}$، برای هر $y \in Y$؛ $y_\eta = \{y,\eta(y)\}$ و $Y_\eta = \{y_\eta : y \in Y\}$. همچنین فرض می‌کنیم A یک زیرجبر حقیقی $C(X,\tau)$ باشد که شامل $\mathrm{Lip}(X,d,\tau)$ است و B یک زیرجبر حقیقی $C(Y,\eta)$ باشد که شامل $\mathrm{Lip}(Y,\rho,\eta)$ است. در بخش ۲، ابتدا نشان می‌دهیم که اگر T یک نگاشت پوشای $\mathbb{R}^+$- همگن نرم- جمعی در قدرمطلق از A به B باشد، آنگاه $|T(1_X)| = 1_Y$ بر Y و دو سویی یکتای $\Phi: Y_\eta \to X_\tau$ یافت می‌شود به‌طوری‌که به ازای هر $f \in \mathrm{Lip}(X,d,\tau)$، هر $y \in Y$ و هر $x \in \Phi(Y_\eta)$؛

$$|T(f)(y)| = |f(x)|.$$

سپس ثابت می‌کنیم اگر (X,d) و (Y,ρ) فضاهای متریک فشرده باشند و $T: \mathrm{Lip}_{\mathbb{R}}(X,d) \to \mathrm{Lip}_{\mathbb{R}}(Y,\rho)$ یک نگاشت پوشای $\mathbb{R}^+$- همگن نرم- جمعی در قدرمطلق باشد، آنگاه $|T(1_X)| = 1_Y$ بر Y و یک همسانریختی لیپشیتس φ از (Y,ρ) به (X,d) یافت می‌شود به‌طوری‌که به ازای هر $f \in \mathrm{Lip}_{\mathbb{R}}(X,d)$ و هر $y \in Y$؛

$$|T(f)(y)| = |f(\varphi(y))|.$$

۲. نتایج اصلی

برای تعیین ساختار نگاشت‌های پوشای $\mathbb{R}^+$- همگن نرم- جمعی در قدرمطلق بین جبرهای حقیقی لیپشیتس، به چند لم نیاز داریم.

لم ۱،۲. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک فشرده بوده و $\tau: X \to X$ یک برگشت لیپشیتس بر (X, d) باشد. همچنین فرض کنیم $x \in X$ و U زیرمجموعه‌ای τ- پایا از X باشد که در (X, d) باز است و $x \in U$ در این‌صورت تابع $g \in \mathrm{Lip}(X, d, \tau)$ وجود دارد به‌طوری‌که $g(x) = g(\tau(x)) = 1$، به ازای هر $z \in X$، $0 \leq g(z) \leq 1$ و به ازای هر $z \in X \backslash U$، $g(z) = 0$.

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم $U = X$. قرار می‌دهیم $g = 1_X$. در این‌صورت $g \in \mathrm{Lip}(X, d, \tau)$ تابع مطلوب است. حال فرض کنیم U یک زیرمجموعه سره X باشد. در این‌صورت x_τ و $X \backslash U$ مجموعه‌های ناتهی فشرده در (X, d) هستند و $x_\tau \cap X \backslash U = \emptyset$. بنابراین $d(X \backslash U, x_\tau) > 0$، که

$$d(X \backslash U, x_\tau) = \inf\{d(s, t): s \in X \backslash U, t \in x_\tau\}.$$

تابع $f: X \to \mathbb{C}$ را به‌صورت

$$f(z) \coloneqq \max\left\{0, 1 - \frac{d(z, x_\tau)}{d(X \backslash U, x_\tau)}\right\} \quad (z \in X)$$

تعریف می‌کنیم ، که

$$d(z, x_\tau) = \inf\{d(z, t): t \in x_\tau\} = \min\{d(z, x), d(z, \tau(x))\}.$$

در این‌صورت $f \in \mathrm{Lip}(X, d)$، به ازای هر $z \in X$؛ $0 \leq f(z) \leq 1$ و $f(x) = f(\tau(x)) = 1$. به‌علاوه ، اگر $z \in X \backslash U$ آنگاه $d(z, x_\tau) \geq d(X \backslash U, x_\tau) > 0$ و لذا $f(z) = 0$. حال قرار می‌دهیم $g = (f \circ \tau) f$. در این‌صورت $g \in \mathrm{Lip}(X, d, \tau)$، $g(x) = g(\tau(x)) = 1$ ، به ازای هر $z \in X$؛ $0 \leq g(z) \leq 1$ و به ازای هر $z \in X \backslash U$؛ $g(z) = 0$. بنابراین اثبات کامل می‌شود.

تعریف ۲،۲. فرض کنیم X یک فضای فشرده هاوسدورف باشد و $f \in C(X)$. مجموعه ماکسیمم f در X با $\mathrm{M}(f)$ نشان داده و به‌صورت $\mathrm{M}(f) = \{x \in X: \|f\|_X = |f(x)|\}$ تعریف می‌شود.

واضح است که $\mathrm{M}(f)$ یک زیرمجموعه ناتهی فشرده X است.

نمادگذاری ۳،۲. فرض کنیم X یک فضای فشرده هاوسدورف باشد، E یک زیرمجموعه ناتهی X بوده و A یک زیرمجموعه ناتهی $C(X)$ باشد. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{F}_E(A) = \{f \in A: E \subseteq \mathrm{M}(f), \|f\|_X = 1\}.$$

واضح است که $1_X \in \mathcal{F}_E(A)$. درصورتی‌که $x \in X$ به‌جای $\mathcal{F}_{\{x\}}(A)$ می‌نویسیم $\mathcal{F}_x(A)$. اگر τ یک برگشت توپولوژیک بر X بوده، A یک زیرمجموعه ناتهی $C(X, \tau)$ باشد و $x \in X$ ، آنگاه به آسانی دیده می‌شود

$$\mathcal{F}_{x_\tau}(A) = \mathcal{F}_x(A) = \mathcal{F}_{\tau(x)}(A).$$

لم ۴،۲. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک فشرده باشد، $\tau : X \to X$ یک برگشت لیپشیتس بر (X, d) بوده، A یک زیرجبر $C(X, \tau)$ باشد که شامل $\mathrm{Lip}\,(X, d, \tau)$ است و $x, z \in X$. در این‌صورت $x_\tau = z_\tau$ اگر و فقط اگر $\mathcal{F}_x(A) \subseteq \mathcal{F}_z(A)$.

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم $x,z\in X$ و $x_\tau=z_\tau$ در این‌صورت $x=z$ یا $x=\tau(z)$. بنابراین $\mathcal{F}_x(A)=\mathcal{F}_z(A)$ یا $\mathcal{F}_x(A)=\mathcal{F}_{\tau(z)}(A)$ چون $\mathcal{F}_z(A)=\mathcal{F}_{\tau(z)}(A)$، لذا $\mathcal{F}_x(A)=\mathcal{F}_z(A)$. پس لزوم برقرار است.

اینک فرض می‌کنیم $x,z\in X$ و $x_\tau\neq z_\tau$. در این‌صورت $x_\tau\cap z_\tau=\emptyset$. فشردگی مجموعه‌های x_τ و z_τ در فضای متریک فشرده (X,d) ایجاب‌می‌کنند یک مجموعه باز τ- پایا در فضای متریک (X,d) مانند U وجود دارد به‌طوری‌که $x_\tau\subseteq U$ و $z_\tau\subseteq X\backslash U$. با توجه به لم ۱،۲، تابع $g_x\in \mathrm{Lip}(X,d,\tau)$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $t\in X$؛ $0\le g_x(t)\le 1$، $g_x(x)=g_x(\tau(x))=1$ و به ازای هر $t\in X\backslash U$؛ $g_x(t)=0$. واضح است که تابع g_x عضوی از $\mathcal{F}_x(A)$ است. از این‌که $z\in X\backslash U$ نتیجه می‌شود $g_x(z)=0$ که ایجاب‌می‌کند $g_x\notin\mathcal{F}_z(A)$، پس $\mathcal{F}_x(A)\nsubseteq\mathcal{F}_z(A)$. بنابراین نشان داده‌ایم که اگر $\mathcal{F}_x(A)\subseteq\mathcal{F}_z(A)$ آنگاه $x_\tau=z_\tau$. پس کفایت برقرار است و اثبات کامل می‌شود.

نکته. توجه داریم که در لم ۴،۲ از $x,z\in X$ و $x_\tau=z_\tau$ نتیجه شد $\mathcal{F}_x(A)=\mathcal{F}_z(A)$. اما در صورتی‌که $x,z\in X$ برای بدست آوردن $x_\tau=z_\tau$ کافی است داشته باشیم $\mathcal{F}_x(A)\subseteq\mathcal{F}_z(A)$.

لم ۵،۲. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک فشرده باشد، $\tau:X\to X$ یک برگشت لیپشیتس بر (X,d) بوده و A یک زیرفضای $C(X,\tau)$ باشد که شامل $\mathrm{Lip}(X,d,\tau)$ است. اگر $x\in X$ و $f\in A\backslash\{0_X\}$ آنگاه

$$|f(x)|+\|f\|_X=\inf\{\,\|\,|f|+|h|\,\|_X : h\in\|f\|_X\mathcal{F}_x(A)\}.$$

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم $x\in X$ و $f\in A\backslash\{0_X\}$ که $\|f\|_X=1$. قرار می‌دهیم

$$E=\{\|\,|f|+\,|g|\,\|_X : g\in\,\mathcal{F}_x(A)\}.$$

ثابت می‌کنیم $\inf E$ موجود است و

$$|f(x)|+1=\inf E.\qquad (۲،۱)$$

از این‌که $1_X\in\mathcal{F}_x(A)$ نتیجه می‌شود که E یک مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی است. اگر $g\in\mathcal{F}_x(A)$، آنگاه

$$|f(x)|+1=|f(x)|+|g(x)|\le\,\|\,|f|+|g|\|_X.$$

بنابراین $|f(x)|+1$ یک کران پایین E است. فرض کنیم $\epsilon>0$. قرار می‌دهیم

$$U_\epsilon=\{z\in X: |f(z)|<|f(x)|+\epsilon\}.$$

در این‌صورت U_ϵ یک زیرمجموعه τ- پایای X است که در فضای متریک (X,d) باز است و $x\in U_\epsilon$. طبق لم ۱،۲، تابع $g_\epsilon\in\mathrm{Lip}(X,d,\tau)$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $z\in X$؛ $0\le g_\epsilon(z)\le 1$، $g_\epsilon(x)=g_\epsilon(\tau(x))=1$ و به ازای هر $z\in X\backslash U_\epsilon$؛ $g_\epsilon(z)=0$. واضح است که $g_\epsilon\in\mathcal{F}_x(A)$. اگر $z\in U_\epsilon$، آنگاه

$$|f(z)|+|g_\epsilon(z)|\le|f(z)|+1<|f(x)|+\epsilon+1=|f(x)|+1+\epsilon.$$

اگر $z\in X\backslash U_\epsilon$، آنگاه

$$|f(z)|+|g_\epsilon(z)|=|f(z)|+0=|f(z)|\le\|f\|_X=1<|f(x)|+1+\epsilon.$$

پس نشان داده‌ایم که به ازای هر $z\in X$؛

$$|f(z)|+|g_\epsilon(z)|<|f(x)|+1+\epsilon.$$

بنابراین با توجه به پیوستگی تابع حقیقی- مقدار $|f|+|g_\epsilon|$ بر X و فشردگی X در (X,d) نتیجه می‌گیریم

$$\| \, |f| + |g_\epsilon| \, \|_X < |f(x)| + 1 + \epsilon.$$

پس طبق خاصیت مشخصه اینفیموم، (۲,۱) برقرار است.

اینک فرض می‌کنیم $x \in X$ و $f \in A\backslash\{0_X\}$. قرار می‌دهیم $f_1 = \frac{1}{\|f\|_X} f$. در این‌صورت $f_1 \in A\backslash\{0_X\}$ و $\|f_1\|_X = 1$. طبق استدلال ارائه‌شده، داریم

$$|f_1(x)| + 1 = \inf\{\| |f_1| + |g| \|_X : g \in \mathcal{F}_x(A)\}.$$

این ایجاب‌می‌کند

$$\|f\|_X |f_1(x)| + \|f\|_X = \inf\{\|f\|_X \| \, |f_1| + |g| \, \|_X : g \in \mathcal{F}_x(A)\}.$$

پس با توجه به این‌که $f = \|f\|_X f_1$، داریم

$$\begin{aligned} |f(x)| + \|f\|_X &= \inf\{\| \, \|f\|_X |f_1| + \|f\|_X |g| \, \|_X : g \in \mathcal{F}_x(A)\} \\ &= \inf\{\| \, |f| + | \, \|f\|_X g| \, \|_X : g \in \mathcal{F}_x(A)\} \\ &= \inf\{\| \, |f| + |h| \, \|_X : h \in \|f\|_X \, \mathcal{F}_x(A)\}. \end{aligned}$$

بنابراین اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۶,۲. فرض کنیم (X, d) و (Y, ρ) فضاهای متریک فشرده بوده و $\tau : X \to X$ و $\eta : Y \to Y$ به ترتیب برگشت‌های لیپشیتس بر (X, d) و (Y, ρ) باشند. همچنین فرض کنیم A یک زیرجبر حقیقی $C(X, \tau)$ باشد که شامل $\mathrm{Lip}(X, d, \tau)$ است، B یک زیرجبر حقیقی $C(Y, \eta)$ باشد که شامل $\mathrm{Lip}(Y, \rho, \eta)$ است و $T : A \to B$ یک نگاشت پوشای $\mathbb{R}^+$- همگن نرم- جمعی در قدرمطلق باشد. در این‌صورت دوسویی یکتای $\Phi: Y_\eta \to X_\tau$ وجود دارد به‌طوری‌که اگر $y \in Y$ و $x \in \Phi(y_\eta)$، آنگاه به ازای هر $f \in A$؛ $|T(f)(y)| = |f(x)|$.

برهان: اثبات را در چند گام انجام می‌دهیم.

گام ۱. $T(0_X) = 0_Y$ و T حافظ نرم یکنواخت است.

برهان: با توجه به این‌که $T : A \to B$ یک نگاشت نرم- جمعی در قدرمطلق است، $0_X \in A$ و $0_Y \in B$، داریم

$$\begin{aligned} 2\|\mathrm{T}(0_X)\|_Y &= 2\| \, |\mathrm{T}(0_X))| \, \|_Y = \| |\mathrm{T}(0_X)| + |\mathrm{T}(0_X)| \|_Y \\ &= \| \, |0_X| + |0_X| \, \|_X = 2\| \, |0_X| \, \|_X \\ &= 2\|0_X\|_X = 0. \end{aligned}$$

این ایجاب‌می‌کند که $\|T(0_X)\|_Y = 0$ و لذا $T(0_X) = 0_Y$.

اگر $f \in A$، آنگاه

$$\begin{aligned} \|T(f)\|_Y &= \| \, |T(f)| \, \|_Y = \| \, |T(f)| + |0_Y| \, \|_Y = \| \, |T(f)| + |T(0_X)| \, \|_Y \\ &= \| \, |f| + |0_X| \, \|_X = \| \, |f| + 0_X \|_X = \| \, |f| \, \|_X = \|f\|_X. \end{aligned}$$

بنابراین T حافظ نرم یکنواخت است و اثبات گام ۱ کامل می‌شود.

گام ۲. به ازای هر $y \in Y$ یک تابع f_y در A یافت می‌شود به‌طوری‌که $T(f_y) \in \mathcal{F}_y(B)$.

برهان: فرض کنیم $y \in Y$. طبق [1, Lemma 2.1] یک تابع h_y در $\mathrm{Lip}(Y, \rho, \eta)$ یافت می‌شود به‌طوری‌که $h_y(y) = h_y(\eta(y)) = 1$ و به ازای هر $w \in Y \backslash\{y , \eta(y)\}$؛ $0 \le h_y(w) < 1$. بنابراین

$$\|h_y\|_Y = 1 = |h_y(y)| = |h_y(\eta(y))|.$$

پس $h_y \in \mathcal{F}_y(B)$. پوشا بودن $T: A \to B$ ایجاب‌می‌کند تابع $f_y \in A$ وجود دارد به‌طوری‌که $h_y = T(f_y)$. بنابراین $T(f_y) \in \mathcal{F}_y(B)$ و اثبات گام ۲ کامل می‌شود.

گام ۳. فرض کنیم $y \in Y$ و B_y اشتراک همه $M(f)$ هایی باشد که $f \in A$ و $T(f) \in \mathcal{F}_y(B)$. در این‌صورت B_y یک زیرمجموعه ناتهی τ- پایای X است که در (X, d) فشرده است.

برهان: طبق گام ۲، تابع $f_y \in A$ یافت می‌شود به‌طوری‌که $T(f_y) \in \mathcal{F}_y(B)$. از این‌که به ازای هر $f \in A$؛ $M(f)$ یک مجموعه فشرده ناتهی است و X با متریک توپولوژی یک فضای فشرده است، برای اثبات ناتهی بودن B_y از خاصیت اشتراک متناهی استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ و $f_1, \dots, f_n \in A$ به‌طوری‌که $T(f_1), \dots, T(f_n) \in \mathcal{F}_y(B)$. قرار می‌دهیم $h = \prod_{j=1}^n T(f_j)$. واضح است که $h \in B$. به‌علاوه ، داریم

$$\|h\|_Y \geq |h(y)| = \prod_{j=1}^n |T(f_j)(y)| = \prod_{j=1}^n \|T(f_j)\|_Y \geq \left\|\prod_{j=1}^n T(f_j)\right\|_Y = \|h\|_Y.$$

این ایجاب‌می‌کند $\|h\|_Y = |h(y)|$. ازطرف دیگر،

$$|h(y)| = \left|\prod_{j=1}^n T(f_j)\right| = \prod_{j=1}^n |T(f_j)| = 1.$$

بنابراین $h \in \mathcal{F}_y(B)$. پوشایی $T : A \to B$ ایجاب‌می‌کند تابع $f \in A$ وجود دارد به‌طوری‌که $h = T(f)$. با توجه به گام ۱، T حافظ نرم یکنواخت است. بنابراین

$$\|f\|_X = \|T(f)\|_Y = \|h\|_Y = 1.$$

این ایجاب‌می‌کند $x \in X$ یافت می‌شود به‌طوری‌که $|f(x)| = 1$. ادعا می‌کنیم $x \in \bigcap_{j=1}^n M(f_j)$. درغیر این‌صورت $l \in \{1, \dots, n\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $x \notin M(f_l)$ که ایجاب‌می‌کند $|f_l(x)| < \|f_l\|_X = 1$. پیوستگی f_l در x ایجاب‌می‌کند که یک مجموعه باز V در (X, d) وجود دارد به‌طوری‌که $x \in V$ و به ازای هر $z \in V$ ؛ $|f_l(z)| < 1$. قرار می‌دهیم $U = V \cup \tau(V)$. در این‌صورت $x \in U$ ، U یک مجموعه τ- پایای باز در فضای متریک (X, d) است و به ازای هر $z \in U$؛ $|f_l(z)| < 1$. با توجه به لم ۱،۲، تابع $g_x \in A$ یافت می‌شود به‌طوری‌که به ازای هر $z \in X$ ؛ $0 \leq g_x(z) \leq 1$، $g_x(x) = g_x(\tau(x)) = 1$ و به ازای هر $z \in X \setminus U$؛ $g_x(z) = 0$. اگر $z \in U$، آنگاه

$$|g_x(z)| + |f_l(z)| < |g_x(z)| + 1 \leq 1 + 1 = 2.$$

اگر $z \in X \setminus U$، آنگاه

$$|g_x(z)| + |f_l(z)| = 0 + |f_l(z)| < 1 + |f_l(z)| \leq 1 + \|f_l\|_X = 1 + 1 = 2.$$

پس به ازای هر $z \in X$؛ $|g_x(z)| + |f_l(z)| < 2$. با توجه به پیوستگی تابع حقیقی‌مقدار $|g_x| + |f_l|$ بر X و فشردگی X در (X, d) نتیجه می‌شود $\||g_x| + |f_l|\|_X < 2$. بنابراین با توجه به این‌که T نرم- جمعی در قدرمطلق است، داریم

$$\| |T(g_x)| + |T(f_l)| \|_Y < 2.$$

از طرف دیگر، به ازای هر $w \in Y$ داریم

$$\begin{aligned}
|T(g_x)(w)| + |T(f)(w)| &= |T(g_x)(w)| + |h(w)| \\
&= |T(g_x)(w)| + \left|\prod_{j=1}^{n} T(f_j)(w)\right| \\
&= |T(g_x)(w)| + |T(f_l)(w)| \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq l}}^{n} |T(f_j)(w)| \\
&\le \|T(g_x)\|_Y + |T(f_l)(w)| \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq l}}^{n} \|T(f_j)\|_Y \\
&= \|g_x\|_X + |T(f_l)(w)| \\
&= 1 + |T(f_l)(w)| \\
&< 1 + 1 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

بنابراین با توجه به پیوستگی تابع حقیقی- مقدار $|T(g_x)| + |T(f)|$ بر Y و فشردگی Y در (Y, ρ) نتیجه می‌شود

$$\||T(g_x)| + |T(f)|\|_Y < 2. \qquad (۲,۲)$$

از طرف دیگر، با توجه به نرم- جمعی در قدرمطلق بودن T، داریم

$$2 = |1 + 1| = \big||g_x(x)| + |f(x)|\big| \le \||g_x| + |f|\|_X = \||T(g_x)| + |T(f)|\|.$$

این با (۲,۲) تناقض دارد. بنابراین ادعای ما برقرار است. پس $x \in \bigcap_{j=1}^{n} M(f_j)$ و لذا $\bigcap_{j=1}^{n} M(f_j) \neq \emptyset$. بنابراین خانواده $\{M(f): f \in A;\ T(f) \in \mathcal{F}_y(B)\}$ خاصیت اشتراک متناهی دارد. پس B_y ناتهی است. از این‌که به ازای هر $f \in A$؛ $M(f)$ یک زیرمجموعه τ- پایای X است *که در فضای متریک* (X, d) بسته است، نتیجه می‌گیریم B_y یک زیرمجموعه τ- پایای X است که در (X, d) بسته است. فشردگی X در (X, d) ایجاب‌می‌کند B_y در (X, d) فشرده است و اثبات گام ۳ کامل می‌شود.

گام ۴. فرض کنیم $x \in X$ و A_x اشتراک همه $M(T(f))$هایی باشد که $f \in \mathcal{F}_x(A)$. در این‌صورت A_x یک زیرمجموعه ناتهی η- پایای Y است که در (Y, ρ) فشرده است.

برهان: با توجه به این‌که به ازای‌هر $f \in A$؛ $M(T(f))$ یک مجموعه ناتهی فشرده در فضای متریک (Y, ρ) است، برای اثبات ناتهی بودن A_x از خاصیت اشتراک متناهی استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ و $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}_x(A)$. ثابت می‌کنیم $\bigcap_{j=1}^{n} M(T(f_j)) \neq \emptyset$. قرار می‌دهیم $f = \prod_{j=1}^{n} f_j$. در این‌صورت $f \in A$ و به آسانی دیده می‌شود که $f \in \mathcal{F}_x(A)$. این ایجاب‌می‌کند که $\|f\|_X = 1$. با توجه به‌این‌که $T(f) \in B$، نتیجه می‌شود $y \in B$ی وجود دارد به‌طوری‌که $|T(f)(y)| = \|T(f)\|_Y$. چون T حافظ نرم یکنواخت است، داریم $\|T(f)\|_Y = \|f\|_X$. پس

$|T(f)(y)| = 1$. ادعا می‌کنیم به ازای هر $j \in \{1, \dots, n\}$؛ $y \in M\left(T(f_j)\right)$. فرض کنیم چنین نباشد. در این‌صورت $l \in \{1, \dots, n\}$ای یافت می‌شود به‌طوری‌که $y \notin M\left(T(f_l)\right)$. بنابراین

$$|T(f_l)(y)| < \|T(f)\|_Y = \|f\|_X = 1.$$

چون $|T(f_l)(\eta(y))| = |T(f_l)(y)|$، با توجه به پیوستگی $T(f_l)$ در نقاط $\eta(y)$ و y نتیجه می‌گیریم یک مجموعه τ- پایای باز در فضای متریک (Y, ρ) مانند V یافت می‌شود به‌طوری‌که $y \in V$ و به ازای هر $w \in V$؛

$$|T(f_l)(w)| < 1.$$

با توجه به لم ۱،۲، تابع $k \in \mathrm{Lip}(Y, \rho, \eta)$ وجود دارد به‌طوری‌که $k(y) = k\left(\eta(y)\right) = 1$، به ازای هر $w \in V$؛ $0 \leq k(w) \leq 1$ و به ازای هر $w \in Y \backslash V$، $k(w) = 0$. واضح است که $k \in B$. پوشا بودن نگاشت T از A به B ایجاب‌می‌کند تابع $g \in \mathrm{A}$ وجود دارد به‌طوری‌که $T(g) = k$. اگر $w \in V$، آنگاه

$$|T(f_l)(w)| + |T(g)(w)| = |T(f_l)(w)| + |k(w)| < 1 + |k(w)| \leq 1 + 1 = 2.$$

اگر $w \in Y \backslash V$، آنگاه

$$\begin{aligned}|T(f_l)(w)| + |T(g)(w)| &= |T(f_l)(w)| + |k| = |T(f_l)(w)| + 0 \\ &< \|T(f_l)\|_Y + 1 = \|f_l\|_X + 1 = 1 + 1 = 2.\end{aligned}$$

پس به ازای هر $w \in Y$؛ $|T(f_l)(w)| + |T(g)(w)| < 1$. بنابراین با توجه به فشردگی Y در (Y, ρ) و پیوستگی تابع حقیقی- مقدار $|T(f_l)| + |T(g)|$ بر Y نتیجه می‌گیریم $\|\, |T(f_l)| + |T(g)|\, \|_Y < 2$. این ایجاب‌می‌کند که

$$\|\, |f_l| + |g|\, \|_X < 2, \qquad (۲،۳)$$

زیرا T یگ نگاشت نرم- جمعی در قدرمطلق است. با توجه به این‌که به ازای هر $j \in \{1, \dots, n\}$؛ $\|f_j\|_X = 1$، به آسانی می‌توان نشان داد که به ازای‌هر $z \in X$؛ $|f(z)| \leq |f_l(z)|$. این ایجاب‌می‌کند که به ازای‌هر $z \in X$؛

$$|f(z)| + |g(z)| \leq |f_l(z)| + |g(z)| \leq \|\, |f_l| + |g|\, \|_X.$$

بنابراین با توجه به (۲،۳) نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $z \in X$؛

$$|f(z)| + |g(z)| < 2.$$

این ایجاب‌می‌کند

$$\|\, |f| + |g|\, \|_X < 2, \qquad (۲،۴)$$

زیرا X در (X, d) فشرده است و $|f| + |g|$ یک تابع حقیقی- مقدار پیوسته بر X است. با توجه به (۲،۴) و نرم- جمعی در قدرمطلق بودن T، نتیجه می‌گیریم

$$\|\, |T(f)| + |T(g)|\, \|_Y < 2. \qquad (۲،۵)$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned}\|\, |T(f)| + |T(g)|\, \|_Y &\geq |T(f)(y)| + |T(g)(y)| = 1 + |k(y)| \\ &= 1 + 1 = 2,\end{aligned}$$

که با (۲،۵) تناقض دارد. پس ادعای ما برقرار است. بنابراین $\bigcap_{j=1}^{n} M(T(f_j))$ ناتهی است. با توجه به خاصیت اشتراک متناهی نتیجه می‌گیریم که A_x ناتهی است. از این‌که به ازای هر $h \in B$؛ $M(h)$ یک زیرمجموعه η- پایای Y است که

در (Y,ρ) بسته است، نتیجه می‌گیریم A_x یک زیرمجموعه η- پایای Y است که در (Y,ρ) بسته است. فشردگی Y در (Y,ρ) ایجاب‌می‌کند A_x در (Y,ρ) فشرده است. بنابراین اثبات گام ۴ کامل می‌شود.

گام ۵. اگر $x \in X$ و $w \in A_x$، آنگاه $T(\mathcal{F}_x(A)) \subseteq \mathcal{F}_w(B)$.

برهان: فرض کنیم $x \in X$ و $w \in A_x$. برای اثبات حکم، فرض کنیم $f \in \mathcal{F}_x(A)$. از این‌که $w \in A_x$ نتیجه می‌شود $w \in M(T(f))$. بنابراین $|T(f)(w)| = \|T(f)\|_Y = \|f\|_X = 1$، زیرا T حافظ نرم یکنواخت است. پس $T(f) \in \mathcal{F}_w(B)$. بنابراین اثبات گام ۵ کامل می‌شود.

گام ۶. اگر $y \in Y$ و $x \in B_y$، آنگاه $T^{-1}\left(\mathcal{F}_y(B)\right) \subseteq \mathcal{F}_x(A)$.

برهان: فرض کنیم $y \in Y$ و $x \in B_y$. برای اثبات حکم، فرض کنیم $f \in T^{-1}\left(\mathcal{F}_y(B)\right)$. در این‌صورت $f \in A$ و $T(f) \in \mathcal{F}_y(B)$. بنابراین $\|T(f)\|_Y = |T(f)(y)| = 1$ و $\|f\|_X = |f(x)|$ زیرا $x \in B_y$. پس $\|f\|_X = |f(x)| = 1$. بنابراین $f \in \mathcal{F}_x(A)$ و لذا گام ۶ برقرار است.

گام ۷. اگر $y \in Y$ و $x \in B_y$، آنگاه $T(\mathcal{F}_x(A)) \subseteq \mathcal{F}_y(B)$.

برهان: فرض کنیم $y \in Y$ و $x \in B_y$. همچنین فرض کنیم $f \in \mathcal{F}_x(A)$. گام ۴ ایجاب‌می‌کند A_x ناتهی است. فرض کنیم $w \in A_x$. در این‌صورت $w \in Y$ و طبق گام ۵، $T(f) \in \mathcal{F}_w(B)$. ادعا می‌کنیم $w_\eta = y_\eta$. درغیر این‌صورت، واضح است که $w_\eta \cap y_\eta = \emptyset$. فشردگی y_η و w_η در فضای متریک فشرده (Y,ρ) ایجاب‌می‌کنند که مجموعه‌های باز و η- پایای V و W در فضای متریک (Y,ρ) یافت می‌شوند به‌طوری‌که $y_\eta \subseteq V$ و $w_\eta \subseteq W$ و $W \cap V = \emptyset$ طبق لم ۱،۲، تابع $k \in \mathrm{Lip}(Y,\rho,\eta)$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $\mathrm{v} \in Y$؛ $0 \le k(\mathrm{v}) \le 1$، $k(y) = k(\eta(y)) = 1$ و به ازای هر $\mathrm{v} \in Y\backslash V$؛ $k(\mathrm{v}) = 0$. پس با توجه به این‌که $\mathrm{w} \in Y\backslash V$ نتیجه می‌گیریم $k(\mathrm{w}) = 0$. واضح است که $k \in \mathcal{F}_y(B)$. پوشایی $T\colon A \to B$ ایجاب‌می‌کند که تابع $g \in A$ وجود دارد به‌طوری‌که $T(g) = k$. پس $T(g) \in \mathcal{F}_y(B)$ و لذا $g \in T^{-1}\left(\mathcal{F}_y(B)\right)$. گام ۶ ایجاب‌می‌کند $g \in \mathcal{F}_x(A)$. با توجه به این که $w \in \mathrm{A}_x$، گام ۵ ایجاب‌می‌کند $T(g) \in \mathcal{F}_w(B)$. بنابراین $\|T(g)\|_Y = |T(g)(w)| = 1$. چون $w \in W$ و $W \cap V = \emptyset$ نتیجه می‌شود $w \in Y\backslash V$. بنابراین $T(g)(w) = k(\mathrm{w}) = 0$ که با $|T(g)(w)| = 1$ تناقض دارد. پس ادعای ما برقرار است، یعنی $w_\eta = y_\eta$. بنابراین $T(f) \in \mathcal{F}_y(B)$. پس $T(\mathcal{F}_x(A)) \subseteq \mathcal{F}_y(B)$. بنابراین گام ۷ برقرار است.

گام ۸. اگر $y \in Y$ و $x \in B_y$، آنگاه $B_y = \{x, \tau(x)\}$.

برهان: فرض کنیم $y \in Y$ و $x \in B_y$. با توجه τ- پایا بودن B_y، نتیجه می‌گیریم $\tau(x) \in B_y$. بنابراین

$$x_\tau = \{x, \tau(x)\} \subseteq B_y. \qquad (۲،۶)$$

فرض کنیم $z \in B_y\backslash\{x, \tau(x)\}$. در این‌صورت $z \in B_y$ و $z_\tau \cap x_\tau = \emptyset$. بنابراین یک زیرمجموعه τ- پایای U از X یافت می‌شود که در (X,d) باز است، $x_\tau \subseteq U$ و $z_\tau \subseteq X\backslash U$. با توجه به لم ۱،۲، تابع $f_x \in \mathrm{Lip}(X,d,\tau)$ یافت

می‌شود به‌طوری‌که به ازای هر $u \in X$، $0 \leq f_x(u) \leq 1$، $f_x(x) = f_x(\tau(x)) = 1$ و به ازای هر $u \in X\backslash U$، $f_x(u) = 0$. واضح است که $f_x \in \mathcal{F}_x(A)$. با توجه به این‌که $x \in B_y$، گام ۷ ایجاب‌می‌کند $T(f_x) \in \mathcal{F}_y(B)$. بنابراین $f_x \in T^{-1}(\mathcal{F}_y(B))$. حال با توجه به گام ۶ نتیجه می‌گیریم $f_x \in \mathcal{F}_z(A)$ زیرا $z \in B_y$. بنابراین $|f_x(z)| = 1$ و لذا $z \notin X\backslash U$ که با $z_\tau \subseteq X\backslash U$ تناقض دارد. پس

$$B_y\backslash\{x, \tau(x)\} = \emptyset. \qquad (۲,۷)$$

با توجه به (۲,۶) و (۲,۷) نتیجه می‌گیریم $B_y = \{x, \tau(x)\}$ و اثبات گام ۸ کامل می‌شود.

گام ۸ به ما این اجازه را می‌دهد که نگاشت $\Phi: Y_\eta \to X_\tau$ را به صورت $\Phi(y_\eta) = x_\tau$ تعریف کنیم که در آن $y \in Y$ و $x \in B_y$.

گام ۹. نگاشت $\Phi: Y_\eta \to X_\tau$ تعریف شده به‌صورت $\Phi(y_\eta) = x_\tau$ که در آن $y \in Y$ و $x \in B_y$، دوسویی است.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم Φ یک به یک است. فرض کنیم $y, w \in Y$ به‌طوری‌که $\Phi(y_\eta) = \Phi(w_\eta)$. فرض کنیم $h \in \mathcal{F}_y(B)$. از این‌که $T: A \to B$ پوشا است، تابع $f \in A$ یافت می‌شود به‌طوری‌که $T(f) = h$. این ایجاب‌می‌کند که $f \in T^{-1}(\mathcal{F}_y(B))$. فرض کنیم $x \in X$ به‌طوری‌که $\Phi(y_\eta) = x_\tau$. طبق تعریف Φ، $x \in B_y$. بنابراین با توجه به گام ۶ نتیجه می‌گیریم $f \in \mathcal{F}_x(A)$. از این‌که $x_\tau = \Phi(w_\eta)$ نتیجه می‌گیریم $x \in B_w$. حال با توجه به این‌که $f \in \mathcal{F}_x(A)$، گام ۷ ایجاب‌می‌کند $T(f) \in \mathcal{F}_w(B)$. پس $h \in \mathcal{F}_w(B)$. بنابراین $\mathcal{F}_y(B) \subseteq \mathcal{F}_w(B)$. اینک با توجه به لم ۴,۲ نتیجه می‌گیریم $w_\eta = y_\eta$. پس Φ یک به یک است.

حال نشان می‌دهیم Φ پوشا است. فرض کنیم $x \in X$. طبق گام ۴، A_x ناتهی است. فرض کنیم $y \in A_x$ و $z \in X$ که $\Phi(y_\eta) = z_\tau$. در این‌صورت $z \in B_y$. فرض کنیم $f \in \mathcal{F}_x(A)$. با توجه به این‌که $y \in A_x$، گام ۵ ایجاب‌می‌کند $T(f) \in \mathcal{F}_y(B)$ و لذا $f \in T^{-1}(\mathcal{F}_y(B))$. بنابراین از این‌که $y \in Y$ و $z \in B_y$، طبق گام ۶ داریم $f \in \mathcal{F}_z(A)$. پس $\mathcal{F}_x(A) \subseteq \mathcal{F}_z(A)$ و لذا طبق لم ۴,۲ داریم $x_\tau = z_\tau$. بنابراین $\Phi(y_\eta) = x_\tau$ و لذا Φ پوشا است. پس گام ۹ برقرار است.

گام ۱۰. فرض کنیم $y \in Y$، $x \in \Phi(y_\eta)$، $r > 0$ و $f \in A$. در این‌صورت $f \in r\mathcal{F}_x(A)$ فقط و فقط وقتی‌که $T(f) \in r\mathcal{F}_y(B)$.

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم $f \in r\mathcal{F}_x(A)$. در این‌صورت تابع $g \in \mathcal{F}_x(A)$ یافت می‌شود به‌طوری‌که $f = rg$. از این‌که $x \in \Phi(y_\eta)$، طبق گام ۶ نتیجه می‌شود $B_y = x_\tau$ و لذا $x \in B_y$. پس طبق گام ۷ داریم $T(g) \in \mathcal{F}_y(B)$. $\mathbb{R}^+$- همگن بودن T ایجاب‌می‌کند $T(rg) = rT(g)$. بنابراین $T(f) = rT(g)$. پس $T(f) \in r\mathcal{F}_y(B)$ و لذا لزوم برقرار است.

اینک فرض می‌کنیم $T(f) \in r\mathcal{F}_y(B)$. بنابراین تابع $k \in \mathcal{F}_y(B)$ یافت می‌شود به‌طوری‌که $T(f) = rk$. قرار می‌دهیم $f_r = \frac{1}{r}f$. در این‌صورت $f_r \in A$ و با توجه به $\mathbb{R}^+$- همگن بودن T داریم

$$\mathrm{T}(f_r) = \mathrm{T}\left(\frac{1}{r}f\right) = \frac{1}{r}T(f) = \frac{1}{r}rk = k,$$

که ایجاب‌می‌کند $\mathrm{T}(f_r) \in \mathcal{F}_y(B)$. به‌علاوه، داریم

$$\|f_r\|_X = \frac{1}{r}\|f\|_X = \frac{1}{r}\|T(f)\|_Y = \frac{1}{r}\ \|rk\|_Y = \|k\|_Y = 1.$$

ادعا می‌کنیم $|f_r(x)| = 1$. فرض کنیم چنین نباشد در این‌صورت $|f_r(x)| < 1$ زیرا $|f_r(x)| \le \|f_r\|_X = 1$. با توجه به $|f_r(x)| = |f_r(\tau(x))|$ و پیوستگی f_r در x و $\tau(x)$ نتیجه می‌گیریم یک مجموعه τ- پایای باز در (X, d) مانند U یافت می‌شود به‌طوری‌که $x \in U$ و به ازای هر $z \in U$؛ $|f_r(z)| < 1$. با توجه به لم ۱,۲، تابع g_x در $\mathrm{Lip}(X, d, \tau)$ یافت می‌شود به‌طوری‌که به ازای هر $z \in X$؛ $0 \le g_x(z) \le 1$، $g_x(x) = g_x(\tau(x)) = 1$ و به ازای هر $z \in X\backslash U$؛ $g_x(z) = 0$. واضح است که $g_x \in \mathcal{F}_x(A)$. چون $x \in \Phi(y_\eta)$، لذا $\Phi(y_\eta) = x_\tau$ و در نتیجه $x \in B_y$، بنابراین گام ۷ ایجاب‌می‌کند $T(g_x) \in \mathcal{F}_y(B)$. اگر $z \in U$، آنگاه

$$|f_r(z)| + |g_x(z)| < 1 + |g_x(z)| \le 1 + 1 = 2.$$

اگر $z \in X\backslash U$، آنگاه

$$|f_r(z)| + |g_x(z)| = |f_r(z)| + 0 \le \|f_r\|_X = 1 < 2.$$

پس به ازای هر $z \in X$؛ $|f_r(z)| + |g_x(z)| < 2$. بنابراین با توجه به پیوستگی تابع حقیقی- مقدار $|f_r| + |g_x|$ بر X و فشردگی X در (X, d) داریم

$$\|\,|f_r| + |g_x|\|_X < 2. \qquad (۲,۸)$$

از این‌که T یک نگاشت نرم- جمعی در قدرمطلق است، نتیجه می‌گیریم

$$\|\,|T(f_r)| + |T(g_x)|\|_Y = \|\,|\,f_r| + |g_x|\|_X. \qquad (۲,۹)$$

از (۲,۸) و (۲,۹) نتیجه می‌شود

$$\|\,|T(f_r)| + |T(g_x)|\|_Y < 2. \qquad (۲,۱۰)$$

چون $y \in Y$ و $T(f_r)\ ,T(g_x) \in \mathcal{F}_y(B)$، لذا داریم

$$\||T(f_r)| + |T(g_x)|\|_Y \ge |T(f_r)(y)| + |T(g_x)(y)| = 1 + 1 = 2,$$

که با (۲,۱۰) تناقض دارد. پس ادعای ما برقرار است. بنابراین $f_r \in \mathcal{F}_x(A)$ و لذا $f \in r\mathcal{F}_x(A)$. پس کفایت برقرار است و اثبات گام ۱۰ کامل می‌شود.

گام ۱۱. اگر $y \in Y$ و $x \in \Phi(y_\eta)$، آنگاه به ازای هر $f \in A$؛ $|T(f)(y)| = |f(x)|$.

برهان: فرض کنیم $y \in Y$ و $x \in \Phi(y_\eta)$. اگر $f = 0_X$، آنگاه طبق گام ۱ داریم $T(f) = 0_Y$ و لذا

$$|T(f)(y)| = |0_Y(y)| = |0| = |0_X(x)| = |f(x)|.$$

فرض کنیم تابع $f \in A\backslash\{0_X\}$ یافت شود به‌طوری‌که $|T(f)(y)| \neq |f(x)|$ (فرض خلف). در این‌صورت یا $|f(x)| < |T(f)(y)|$ یا $|T(f)(y)| < |f(x)|$.

ابتدا فرض می‌کنیم $|f(x)| < |T(f)(y)|$. با توجه به این‌که $f \in A\backslash\{0_X\}$، طبق لم ۵,۲ داریم

$$|f(x)| + \|f\|_X = \inf\{\||f| + |g|\|_X : g \in \|f\|_X\mathcal{F}_x(A)\}. \qquad (۲,۱۱)$$

چون $\|f\|_X + |f(x)| < |T(f)(y)| + \|f\|_X$، لذا با توجه به (۲,۱۱) تابع $g \in \|f\|_X \mathcal{F}_x(A)$ یافت می‌شود به‌طوری‌که

$$\| \, |f| + |g| \, \|_X < |T(f)(y)| + \|f\|_X. \qquad (۲,۱۲)$$

از این‌که T نرم- جمعی در قدرمطلق است و $f, g \in A$، داریم

$$\||T(f)| + |T(g)|\|_Y = \||f| + |g|\|_X. \qquad (۲,۱۳)$$

از (۲,۱۳) و (۲,۱۲) نتیجه می‌شود

$$\| \, |T(f)| + |T(g)|\|_Y < |T(f)(y)| + \|f\|_X. \qquad (۲,۱۴)$$

با توجه به $g \in \|f\|_X \mathcal{F}_x(A)$ و گام ۱۰ برای $r = \|f\|_X$، نتیجه می‌گیریم $T(g) \in \|f\|_X \mathcal{F}_y(B)$.
این ایجاب‌می‌کند $|T(g)(y)| = \|f\|_X$. پس

$$\| \, |T(f)| + |T(g)|\|_Y \geq |T(f)(y)| + |T(g)(y)| = |T(f)(y)| + \|f\|_X,$$

که با (۲,۱۴) تناقض دارد.

حال فرض می‌کنیم $|T(f)(y)| < |f(x)|$. چون T حافظ نرم یکنواخت است و $f \in A \backslash \{0_X\}$، لذا داریم

$$\|Tf\|_Y = \|f\|_X > 0.$$

این ایجاب‌می‌کند $T(f) \in B \backslash \{0_Y\}$. بنابراین با توجه به لم ۵,۲ داریم

$$|T(f)(y) \,| + \|T(f)\|_Y = \inf\{\||T(f)| + |k|\|_Y : k \in \|T(f)\|_Y \mathcal{F}_y(B)\}. \qquad (۲,۱۵)$$

چون $|T(f)(y) \,| + \|T(f)\|_Y < |f(x)| + \|T(f)\|_Y$، باتوجه به (۲,۱۵) تابع $k \in \|T(f)\|_Y \mathcal{F}_y(B)$ یافت می‌شود به‌طوری‌که

$$\| \, |T(f)(y) \,| + |k| \, \|_Y < |f(x)| + \|T(f)\|_Y. \qquad (۲,۱۶)$$

پوشا بودن $T: A \to B$ و $k \in \mathrm{B}$ ایجاب‌می‌کنند تابع $g \in A$ یافت می‌شود به‌طوری‌که $k = T(g)$. با توجه به این‌که $g \in A$، $y \in Y$، $x \in \Phi(y_\eta)$ و $T(g) \in \|T(f)\|_Y \mathcal{F}_y(B)$، گام ۱۰ ایجاب‌می‌کند $g \in \|T(f)\|_Y \mathcal{F}_x(A)$. پس با توجه به $\|T(f)\|_Y = \|f\|_X$ داریم $g \in \|f\|_X \mathcal{F}_x(A)$. این ایجاب‌می‌کند تابع $g_x \in \mathcal{F}_x(A)$ یافت می‌شود به طوری‌که $g = \|f\|_X g_x$. پس داریم $\|g\|_X = \|f\|_X$ و $|g(x)| = \|f\|_X$. بنابراین با توجه به نرم- جمعی بودن T، $k = T(g)$ و (۲,۱۶) داریم

$$\begin{aligned}\| \, |f| + |g| \, \|_X = \||T(f)| + |k|\|_Y = \||T(f)| + |T(g)|\|_Y < |f(x)| + \|T(f)\|_Y \\ = |f(x)| + \|f\|_X = |f(x)| + |g(x)| \leq \| \, |f| + |g| \, \|_X,\end{aligned}$$

که غیر ممکن است. بنابراین به ازای هر $f \in A$ داریم $|T(f)(y)| = |f(x)|$ و اثبات گام ۱۱ کامل می‌شود.

گام ۱۲. $|T(1_X)| = 1_Y$.

برهان: فرض کنیم $y \in Y$. در این‌صورت $y_\eta \in Y_\eta$ قرار می‌دهیم $x_\tau = \Phi(y_\eta)$ که $x \in \mathrm{X}$. پس $x \in \Phi(y_\eta)$ و لذا طبق گام ۱۱ داریم

$$|T(1_X)(y)| = |1_X(x)| = |1| = 1.$$

بنابراین $|T(1_X)(y)| = 1_Y(y)$. چون تساوی اخیر به ازای هر $y \in Y$ برقرار است، لذا $|T(1_X)| = 1_Y$. بنابراین گام ۱۲ برقرار است.

گام ۱۳. فرض کنیم $\Psi: Y_\eta \to X_\tau$ یک نگاشت دوسویی باشد به‌طوری‌که به ازای هر $f \in A$، $y \in Y$ و $x \in \Psi(y_\eta)$ داشته باشیم $|T(f)(y)| = |f(x)|$. در این‌صورت $\Psi = \Phi$ بر Y_η.

برهان: فرض کنیم $y \in Y$. قرار می‌دهیم $x_\tau = \Psi(y_\eta)$ که $x \in X$. چون $y \in Y$، فرض کنیم $f \in A$ به‌طوری‌که $T(f) \in \mathcal{F}_y(B)$. توجه داریم که طبق گام ۲ تابع f واجد خاصیت مذکور وجود دارد. در این‌صورت

$$\|T(f)\|_Y = |T(f)(y)| = 1. \qquad (۲,۱۷)$$

از این‌که $y \in Y$، $x \in \Psi(y_\eta)$ و $f \in A$، طبق فرض داریم

$$|T(f)(y)| = |f(x)|. \qquad (۲,۱۸)$$

با توجه به گام ۱، T حافظ نرم یکنواخت است. بنابراین

$$\|T(f)\|_Y = \|f\|_X. \qquad (۲,۱۹)$$

با توجه به *(۲,۱۹)*، (۲,۱۷) و (۲,۱۸) نتیجه می‌گیریم $\|f\|_X = |f(x)|$. بنابراین $x \in \mathrm{M}(f)$. پس نشان داده‌ایم x به اشتراک همه $\mathrm{M}(f)$هایی تعلق دارد که $T(f) \in \mathcal{F}_y(B)$. تعریف B_y ایجاب‌می‌کند $x \in B_y$. حال با توجه به گام ۸ داریم $B_y = x_\tau$. بنابراین با توجه به تعریف Φ داریم $\Phi(y_\eta) = x_\tau$. از $x \in \Psi(y_\eta)$ و دوسویی بودن Ψ نتیجه می‌شود $\Psi(y_\eta) = x_\tau$ پس $\Psi(y_\eta) = \Phi(y_\eta)$. با توجه به این‌که تساوی اخیر به ازای هر $y \in Y$ برقرار است، نتیجه می‌شود $\Psi = \Phi$ بر Y_η. بنابراین گام ۱۳ برقرار است و اثبات قضیه کامل می‌شود.

اینک با استفاده از قضیه ۶,۲ ساختار نگاشت‌های پوشای $\mathbb{R}^+$- همگن نرم- جمعی در قدرمطلق بین جبرهای حقیقی لیپشیتس بر فضای متریک فشرده را تعیین می‌کنیم و نشان می‌دهیم این نگاشت‌ها عملگرهای ترکیبی موزون در قدرمطلق هستند.

قضیه ۷,۲. فرض کنیم (X, d) و (Y, ρ) فضاهای متریک فشرده باشند و $T: \mathrm{Lip}_\mathbb{R}(X, d) \to \mathrm{Lip}_\mathbb{R}(Y, \rho)$ یک نگاشت پوشای $\mathbb{R}^+$- همگن نرم- جمعی در قدرمطلق باشد. در این‌صورت $|T(1_X)| = 1_Y$ و یک همسانریختی لیپشیتس φ از (Y, ρ) به (X, d) یافت می‌شود به‌طوری‌که به ازای هر $f \in \mathrm{Lip}_\mathbb{R}(X, d)$ و $y \in Y$؛

$$|T(f)(y)| = |f(\varphi)(y)|.$$

برهان: فرض کنیم $\tau: X \to X$ خودنگاشت همانی بر X و $\eta: Y \to Y$ خودنگاشت همانی بر Y باشند. در این‌صورت τ یک برگشت لیپشیتس بر (X, d) است، $\mathrm{Lip}(X, d, \tau) = \mathrm{Lip}_\mathbb{R}(X, d)$، η یک برگشت لیپشیتس بر (Y, ρ) است و $\mathrm{Lip}(Y, \rho, \eta) = \mathrm{Lip}_\mathbb{R}(Y, \rho)$. پس T یک نگاشت پوشای $\mathbb{R}^+$- همگن نرم- جمعی در قدرمطلق از $\mathrm{Lip}(X, d, \tau)$ به $\mathrm{Lip}(Y,\rho,\eta)$ است. قضیه ۶,۲ ایجاب‌می‌کند $|T(1_X)| = 1_Y$ و دوسویی یکتای $\Phi : Y_\eta \to X_\tau$ یافت می‌شود به‌طوری‌که اگر $y \in Y$ و $x \in \Phi(y_\eta)$، آنگاه به ازای هر $f \in \mathrm{Lip}(X, d, \tau)$؛ $|T(f)(y)| = |f(x)|$.

همانی بودن خودنگاشت τ بر X ایجاب می‌کند اگر $y \in Y$ و $x_\tau = \Phi(y_\eta)$ که $x \in X$، آنگاه داریم

$$\Phi(y_\eta) = \{x, \tau(x)\} = \{x\}.$$

حال نگاشت φ از Y به X را به‌صورت $\varphi(y) = x$ تعریف می‌کنیم که در آن $y \in Y$ و x تنها عضو $\Phi(y_\eta)$ است. بنابراین به ازای هر $y \in Y$ و هر $f \in \mathrm{Lip}_{\mathbb{R}}(X,d)$ داریم

$$|T(f)(y)| = |f(\varphi(y))|.$$

اینک ثابت می‌کنیم که φ یک به یک است. فرض کنیم $y, w \in Y$ به‌طوری‌که $\varphi(y) = \varphi(w)$. در این‌صورت داریم $\{\varphi(y)\} = \{\varphi(w)\}$. بنابراین با توجه به تعریف φ داریم $\Phi(y_\eta) = \Phi(w_\eta)$. این ایجاب‌می‌کند $w_\eta = y_\eta$ زیرا Φ یک به یک است. پس $\{y\} = \{w\}$، زیرا η تابع همانی بر Y است. بنابراین $y = w$ و لذا φ یک به یک است.

برای اثبات پوشا بودن φ، فرض کنیم $x \in X$. در این‌صورت $\{x\} = x_\tau \in X_\tau$. پوشا بودن $\Phi : Y_\eta \to X_\tau$ ایجاب می‌کند $y \in Y$ یافت می‌شود به‌طوری‌که $x_\tau = \Phi(y_\eta)$. حال با توجه به همانی بودن τ بر X داریم $\{x\} = \Phi(y_\eta)$. تعریف φ ایجاب‌می‌کند $x = \varphi(y)$. بنابراین φ پوشا است.

حال نشان می‌دهیم φ یک نگاشت پیوسته از (Y,ρ) به (X,d) است. فرض کنیم $y \in Y$، ثابت می‌کنیم φ در y پیوسته است. نگاشت $f_{\varphi(y)} : X \to \mathbb{C}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f_{\varphi(y)}(z) = d(z, \varphi(y)) \qquad (z \in X).$$

به آسانی دیده می‌شود $f_{\varphi(y)} \in \mathrm{Lip}_{\mathbb{R}}(X,d)$ و $f_{\varphi(y)}(\varphi(y)) = 0$. چون $y \in Y$ و $f_{\varphi(y)} \in \mathrm{Lip}_{\mathbb{R}}(X,d)$، لذا داریم

$$|T(f_{\varphi(y)})(y)| = |f_{\varphi(y)}(\varphi(y))| = |0| = 0.$$

پس $T(f_{\varphi(y)})(y) = 0$. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ انتخاب شده باشد. پیوستگی $T(f_{\varphi(y)})$ در y ایجاب‌می‌کند عدد حقیقی مثبتی مانند δ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $w \in Y$ اگر $\rho(w,y) < \delta$ آنگاه

$$|T(f_{\varphi(y)})(w) - T(f_{\varphi(y)})(y)| < \varepsilon.$$

فرض کنیم $w \in Y$ به‌طوری‌که $\rho(w,y) < \delta$. در این‌صورت

$$|T(f_{\varphi(y)})(w) - T(f_{\varphi(y)})(y)| < \varepsilon. \qquad (۲,۲۰)$$

از $T(f_{\varphi(y)})(y) = 0$ و (۲,۲۰) نتیجه می‌شود که

$$|T(f_{\varphi(y)})(w)| < \varepsilon. \qquad (۲,۲۱)$$

از طرف دیگر، داریم

$$|T(f_{\varphi(y)})(w)| = |f_{\varphi(y)}(\varphi(w))|. \qquad (۲,۲۲)$$

از (۲,۲۲) و (۲,۲۱) نتیجه می‌شود $|f_{\varphi(y)}(\varphi(w))| < \varepsilon$ و لذا

$$d(\varphi(w), \varphi(y)) = |d(\varphi(w), \varphi(y))| = |f_{\varphi(y)}(\varphi(w))| < \varepsilon.$$

پس φ در y پیوسته است. چون $y \in Y$ دلخواه فرض شده بود، لذا φ یک نگاشت پیوسته از (Y,ρ) به (X,d) است.

از این‌که (Y, ρ) یک فضای متریک فشرده است و $\varphi: Y \to X$ یک نگاشت دوسویی است که از (Y, ρ) به (X, d) پیوسته است، نتیجه می‌شود که $\varphi^{-1}: X \to Y$ یک نگاشت پیوسته از (X, d) به (Y, ρ) است.

اینک نشان می‌دهیم $\varphi: Y \to X$ یک نگاشت لیپشیتس از (Y, ρ) به (X, d) است. فرض کنیم چنین نباشد. طبق [4, Lemma 2.3]، دنباله‌های $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ در Y، عضوی از Y مانند y و تابع $f \in \mathrm{Lip}_{\mathbb{R}}(Y, \rho)$ یافت می‌شوند به‌طوری‌که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $y_n \neq w_n$، $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = y$ در فضای متریک (Y, ρ) و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $f(\varphi(w_n)) = 0$، $f(\varphi(y_n)) = d(\varphi(y_n), \varphi(w_n))$ و

$$n < \frac{d(\varphi(y_n), \varphi(w_n))}{\rho(y_n, w_n)}.$$

بنابراین به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(Y,\rho)}(T(f)) &\geq \frac{|T(f)(y_n) - T(f)(w_n)|}{\rho(y_n, w_n)} \\
&\geq \frac{|T(f)(y_n)| - |T(f)(w_n)|}{\rho(y_n, w_n)} \\
&= \frac{|f(\varphi(y_n))| - |f(\varphi(w_n))|}{\rho(y_n, w_n)} \\
&= \frac{|d(\varphi(y_n), \varphi(w_n))| - |0|}{\rho(y_n, w_n)} \\
&= \frac{d(\varphi(y_n), \varphi(w_n))}{\rho(y_n, w_n)} \\
&> n.
\end{aligned}$$

این با $T(f) \in \mathrm{Lip}_{\mathbb{R}}(Y, \rho)$ تناقض دارد. پس φ یک نگاشت لیپشیتس از (Y, ρ) به (X, d) است.

حال نشان می‌دهیم $\varphi^{-1}: X \to Y$ یک نگاشت لیپشیتس از (Y, ρ) به (X, d) است. فرض کنیم چنین نباشد. طبق [4, Lemma 2.3]، دنباله‌های $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ در X، عضوی از X مانند x و تابع $h \in \mathrm{Lip}_{\mathbb{R}}(Y, \rho)$ یافت می‌شوند به‌طوری‌که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n \neq z_n$، $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = \lim\limits_{n\to\infty} d(z_n, x) = 0$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $h(\varphi^{-1}(x_n)) = \rho(\varphi^{-1}(x_n), \varphi^{-1}(z_n))$، $h(\varphi^{-1}(z_n)) = 0$ و

$$\frac{\rho(\varphi^{-1}(x_n), \varphi^{-1}(z_n))}{d(x_n, z_n)} > n.$$

پوشا بودن نگاشت $T: \mathrm{Lip}_{\mathbb{R}}(X, d) \to \mathrm{Lip}_{\mathbb{R}}(Y, \rho)$ ایجاب‌می‌کند تابع $f \in \mathrm{Lip}_{\mathbb{R}}(X, d)$ یافت می‌شود به‌طوری که $T(f) = h$. حال به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\mathcal{L}_{(X,d)}(f) \geq \frac{|f(x_n) - f(z_n)|}{d(x_n, z_n)} \geq \frac{|f(x_n)| - |f(z_n)|}{d(x_n, z_n)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\left|f\left(\varphi\left(\varphi^{-1}(x_n)\right)\right)\right| - \left|f\left(\varphi\left(\varphi^{-1}(z_n)\right)\right)\right|}{d(x_n, z_n)} \\
&= \frac{\left|T(f)\left(\varphi^{-1}(x_n)\right)\right| - \left|T(f)\left(\varphi^{-1}(z_n)\right)\right|}{d(x_n, z_n)} \\
&= \frac{\left|h\left(\varphi^{-1}(x_n)\right)\right| - \left|h\left(\varphi^{-1}(z_n)\right)\right|}{d(x_n, z_n)} \\
&= \frac{|\rho(\varphi^{-1}(x_n), \varphi^{-1}(z_n)| - |0|}{d(x_n, z_n)} \\
&= \frac{\rho(\varphi^{-1}(x_n), \varphi^{-1}(z_n)}{d(x_n, z_n)} \\
&> n \quad .
\end{aligned}
$$

این با $f \in \mathrm{Lip}_{\mathbb{R}}(X, d)$ تناقض دارد. پس φ^{-1} یک نگاشت لیپشیتس از (X, d) به (Y, ρ) است. بنابراین φ یک همسانریختی لیپشیتس از (Y, ρ) به (X, d) است و اثبات کامل می‌شود.

تعریف ۸،۲. فرض کنیم (X, d) و (Y, ρ) فضاهای متریک فشرده باشند، $\tau: X \to X$ یک برگشت لیپشیتس بر (X, d) و $\eta: Y \to Y$ یک برگشت لیپشیتس بر (Y, ρ) باشند. همچنین فرض کنیم A یک زیرجبر حقیقی $C(X, \tau)$ باشد که شامل $\mathrm{Lip}(X, d, \tau)$ است، B یک زیرجبر حقیقی $C(Y, \rho)$ باشد که شامل $\mathrm{Lip}(Y, \rho, \eta)$ است و $T: A \to B$ یک نگاشت پوشای $\mathbb{R}^+$- همگن نرم- جمعی در قدرمطلق باشد. با توجه به قضیه ۶،۲ ، دوسویی یکتای $\Phi: Y_\eta \to X_\tau$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $f \in A$، $y \in Y$ و $x \in \Phi(y_\eta)$؛ $|T(f)(y)| = |f(x)|$. نگاشت Φ واجد خاصیت فوق را نگاشت دوسویی وابسته به T از Y_η به X_τ می‌نامیم.

اینک با استفاده از قضیه ۶،۲ نتیجه زیر را بدست می‌آوریم.

قضیه ۹،۲. فرض کنیم (X, d) و (Y, ρ) فضاهای متریک بوده، $\tau: X \to X$ یک برگشت لیپشیتس بر (X, d) و $\eta: Y \to Y$ یک برگشت لیپشیتس بر (Y, ρ) باشند، A یک زیرجبر $C(X, \tau)$ باشد که شامل $\mathrm{Lip}(X, d, \tau)$ است و B یک زیرجبر $C(Y, \rho)$ باشد که شامل $\mathrm{Lip}(Y, \rho, \eta)$ است. همچنین فرض کنیم $T: A \to B$ یک نگاشت پوشای $\mathbb{R}^+$- همگن نرم- جمعی در قدرمطلق باشد و $\Phi: Y_\eta \to X_\tau$ نگاشت دوسویی وابسته به T باشد. به‌علاوه فرض کنیم به ازای هر $f \in A$ داشته باشیم $T(1_X + f) = 1_Y + T(f)$. اگر $y \in Y$ و $x \in \Phi(y_\eta)$، آنگاه به ازای هر $f \in A$؛ $T(f)(y) = f(x)$ یا $T(f)(y) = f(\tau(x)) = \overline{f(x)}$. بالاخص، اگر $y \in Y$ و $x \in \Phi(y_\eta)$، آنگاه به ازای هر تابع حقیقی- مقدار f در $\mathrm{Lip}(X, d, \tau)$ داریم $T(f)(y) = f(x)$.

برهان: فرض کنیم $y \in Y$ و $x \in \Phi(y_\eta)$ طبق قضیه ۶،۲، به ازای هر $g \in A$ داریم

$$|T(g)(y)| = |g(x)|. \qquad (۲،۲۳)$$

فرض کنیم $f \in A$. در این‌صورت $1_X + f \in A$. بنابراین با توجه به (۲،۲۳) برای $g = 1_X + f$ داریم

$$|T(1_X + f)(y)\ | = |(1_X + f)(x)| = |1 + f(x)|. \qquad (۲،۲۴)$$

از طرف دیگر، با توجه به فرض داریم $T(1_X + f) = 1_Y + T(f)$. بنابراین

$$|1 + T(f)(y)| = \left|\left(1_Y + T(f)\right)(y)\right| = |T(1_X + f)(y)|. \qquad (۲,۲۵)$$

از (۲,۲۴) و (۲,۲۵) نتیجه می‌شود

$$|1 + T(f)(y)| = |1 + f(x)|. \qquad (۲,۲۶)$$

از طرف دیگر با توجه به (۲,۲۳)، برای $g = f$ داریم

$$|T(f)(y)| = |f(x)|. \qquad (۲,۲۷)$$

از این‌که $T(f)(y)\ , f(x) \in \mathbb{C}$، با توجه به (۲,۲۶) و (۲,۲۷) به آسانی نتیجه می‌گیریم که $T(f)(y) = f(x)$ یا $T(f)(y) = \overline{f(x)} = f(\tau(x))$. این اثبات را کامل می‌کند.

References

1. D. Alimohammadi and S. Daneshmand, Generalized peripherally multiplicative maps between real Lipschitz algebras with involution, Khayyam J. Math., **7**(1) (2021), 1-31.
2. D. Alimohammadi and A. Ebadian, Hedberg's theorem in real Lipschitz algebras, Indian J. Pure Appl. Math., **32**(10) (2001), 1479-1493.
3. M. Hosseini and J.J Font, Norm-additive in modulus maps between function algebras, Banach J. Math. Anal., **8**(2) (2014), 79-92.
4. A. Jiménez-Vargas and K. Lee, A. Luttman and M. Villegas-Vallecillos, Generalized weak peripheral multiplicativity in algebras of Lipschitz functions, Cent. Eur. J. Math., **11**(7) (2013), 1197-1211.
5. S. H. Kulkarni and B.V. Limaye, Gleason parts of real function algebras, Canadian J. Math., **33** (1981), 181-200.
6. S. H. Kulkarni and B. V. Limaye, Real Function Algebras, Marcel Dekker, 1992.
7. D. R. Sherbert, Banach algebras of Lipschitz functions, Pacific J. Math., **13** (1963), 1387-1399.

1. 8. T. Tonév and R. Yates, Norm-linear and norm-additive operators between uniform algebras, J. Math. Anal. Appl., **357**(1) (2009), 45-53.