



Investigating Stochastic Differential Models Based On the Statistical Point Of View and Its Applications

M. Shams¹, G. Hesamian²

1. Corresponding Author, Department of Statistics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Kashan, Kashan, Iran, ✉ E-mail: mehdishams@kashanu.ac.ir
2. Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, 19395-3697, Iran. ✉ E-mail: gh.hesamian@pnu.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received: 30 August 2021

Received in revised form:

1 May 2022

Accepted: 16 September 2024

Published online: 28 February 2025

Keywords:

Wiener process,
Stochastic differentiale quations,
Maximum likelihood estimation,
Akaike information criterion,
Parameter estimation.

ABSTRACT

Introduction

In the last decade, numerous studies have been conducted on stochastic diffusion models, which have led to applications in fitting and predicting phenomena in various fields.

Material and Methods

In this paper, from the perspective of statistical inference, stochastic differential equation models are studied.

Results and discussion

A nonhomogeneous case of a diffusion process with a time-dependent velocity reduction coefficient and stochastic differential equation models with random effects are investigated, and an approximation for a nonlinear stochastic differential equation is presented. Also, with the help of time series analysis and statistical methods, the parameters of stochastic differential equation models are estimated. Finally, the detailed application of Invariant copulas in stochastic differential equation modeling is stated.

Conclusion

In each of these cases, the probability density function of the process and trend functions are calculated, and statistical inferences such as point estimation, interval estimation, selection of the best model, and numerical analyses and simulations in stochastic differential equations are performed.

How to cite: Shams, Mehdi and Hesamian, Gholamreza (2024). Investigating stochastic differential models based on the statistical point of view and its applications. *Mathematical Researches*, **10** (4), 40 – 76.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

بررسی مدل‌های دیفرانسیل تصادفی بر اساس دیدگاه آماری و کاربردهای آن

مهدی شمس^۱ ✉، غلامرضا حسامیان^۲ ✉

۱. نویسنده مسئول، گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران. ✉ mehdishams@kashanu.ac.ir

۲. گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. ✉ gh.hesamian@pnu.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
<p>نوع مقاله: مقاله پژوهشی</p> <p>تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۶/۱۸</p> <p>تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۲/۱۱</p> <p>تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۶/۲۶</p> <p>تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۱۲/۱۰</p> <p>واژه‌های کلیدی: فرایند وینر، معادلات دیفرانسیل تصادفی، برآورد حداکثر درست‌نمایی، معیار اطلاع آکائیکه، برآورد پارامتر.</p>	<p>در این مقاله از دیدگاه استنباط آماری، مدل‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی مورد مطالعه قرار می‌گیرند. یک حالت ناهمگن از یک فرایند انتشار با ضریب کاهش سرعت وابسته به زمان و مدل‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی با اثرات تصادفی بررسی می‌شود و یک تقریب برای معادله دیفرانسیل تصادفی غیرخطی ارائه می‌شود. همچنین به کمک تحلیل‌های سری زمانی و روش‌های آماری، پارامترهای مدل‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی برآورد می‌شوند. در پایان کاربرد مفصل ناوردا در مدل‌بندی معادلات دیفرانسیل تصادفی بیان می‌شود. در هر از این حالت‌ها تابع چگالی احتمال فرایند و توابع روند محاسبه می‌شوند و استنباط‌های آماری نظیر برآورد نقطه‌ای، برآورد فاصله‌ای، انتخاب بهترین مدل و تحلیل‌های عددی و شبیه‌سازی در معادلات دیفرانسیل تصادفی انجام می‌شوند.</p>

استناد: شمس، مهدی و حسامیان، غلامرضا (۱۴۰۳). بررسی مدل‌های دیفرانسیل تصادفی بر اساس دیدگاه آماری و کاربردهای آن. پژوهش‌های ریاضی،

۱۰ (۴)، ۴۰ - ۷۶.



پیش‌گفتار

مشتمل و انتگرال از نخستین اجزای علم حسابان هستند که برای توصیف نرخ تغییرات، عبور حد در مجموع‌های تقریبی و قضیه‌های اساسی حسابان مورد استفاده قرار می‌گیرند و این مهم نشان‌دهنده کاربردهای معادلات دیفرانسیل در مدل‌بندی پدیده‌های طبیعی است. حسابان تصادفی، معادلات دیفرانسیل معمولی^۱ (ODE) و فرایندهای تصادفی پیوسته را هم‌زمان به کار می‌گیرد و نظر به این که اکثر این فرایندها مانند حرکت براونی مشتق‌پذیر نیستند، حسابان تصادفی از حسابان معمولی متمایز می‌شود. پژوهش‌گران علوم کاربردی به واسطه ماهیت طبیعی و شهودی معادلات دیفرانسیل تصادفی^۲ (SDE) در پژوهش‌های فیزیکی به این شاخه علاقه‌مند هستند.

دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $\{X_t\}_{t \geq 0}$ را یک فرایند تصادفی گویند. یک خانواده از فرایندهای تصادفی $\{W_t\}_{t \geq 0}$ را یک حرکت براونی (فرایند وینر) گویند، هرگاه $W_0 = 0$ (حرکت براونی با نقطه شروع مبدأ)، نمونه‌های $W_{s+t} - W_s$ روی مجموعه‌های متناهی دلخواه از فواصل مجزای $(s, s+t)$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند و برای هر $t, s \geq 0$ $W_{s+t} - W_s$ دارای توزیع نرمال $N(0, t)$ باشد [۲۵]. وجه تسمیه حرکت براونی از حرکت‌های نامنظم و دانه‌های گرده معلق در آب الهام شده و نتیجه انتشار تصادفی گرده در آب است. فرایند وینر در علوم‌ی که اختلاهای تصادفی مشاهده می‌شوند نظیر مطالعه مدل‌های قیمت سهام، مدارهای الکتریکی، سامانه‌های صف و موجودی کالا کاربرد دارد.

برای تابع اندازه‌پذیر $f(t, \omega)$ که $E[\int_S^T f^2(t, \omega) dt] < \infty$ و فرایند وینر یک‌بعدی $W_t(\omega)$ با نقطه شروع مبدأ، انتگرال ایتو به صورت $\int_S^T f(t, \omega) dW_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \varphi_n(t, \omega) dW_t(\omega)$ تعریف می‌شود که حد در L^2 و $\{\varphi_n\}$ دنباله توابع مقدماتی (توابع ساده) است به طوری که $E \int_S^T [f(t, \omega) - \varphi_n(t, \omega)]^2 dt = 0$ [۲۵].

اگر X_t در معادله دیفرانسیل تصادفی $dX_t = udt + v dW_t$ صدق کند و g روی $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ مشتقات مرتبه دوم پیوسته داشته باشد، آن‌گاه فرایند $Y_t = g(t, X_t)$ در معادله دیفرانسیل تصادفی

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \cdot (dX_t)^2$$

صدق می‌کند که در آن $(dX_t)^2 = (dX_t) \cdot (dX_t)$ با توجه به قوانین $dt d t = dt dW_t = dW_t dt = 0$ و $dW_t dW_t = dt$ [۲۵].

در بسیاری از شاخه‌ها با استفاده از یک فرایند انتشار که توسط یک SDE مشخص می‌شود، می‌توان بسیاری از پدیده‌های دینامیکی وابسته به زمان را ارزیابی کرد. در این معادلات تعیین پارامترها برای تشخیص مدل از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در مواقعی که پارامترهای مدل مجهول ولی مشاهدات در دسترس هستند، بهترین برآورد برای پارامترها به کمک

¹ Ordinary differential equations

² Stochastic differential equations

مشاهدات مورد علاقه هست. تحقیقات فراوانی در مورد برآورد پارامترهای یک فرایند انتشار صورت گرفته که به عنوان نمونه می‌توان به [۱،۳] اشاره کرد.

چارچوب یک فرایند انتشار عمومی توسط SDE یک‌بعدی ایتو به صورت

$$dX_t = f(t, X_t, \theta)dt + g(t, X_t, \theta)dW_t, \quad t \geq 0, X_0 = x_0 \quad (1)$$

مطرح می‌شود که در آن W_t یک فرایند وینر، $f: \Theta \times [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ضریب رانش و $g: \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ضریب انتشار نامیده می‌شود و توابع f و g معلوم و بردار پارامتر θ مجهول هست و $\Theta, \Omega \subset \mathbb{R}$ و $E(X_0^2) < \infty$ پارامترهای θ در (۱) برای مشخص‌سازی پدیده‌های دینامیکی تعیین‌کننده هستند و محققان به دنبال ارائه بهترین برآورد برای پارامترها بر اساس داده‌های مشاهده شده هستند. اکنون نمونه‌هایی از معادله (۱)، معرفی می‌شوند. مدل واسیچک ([۴]) که در بازارهای مالی کاربرد دارد به صورت

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t, \quad t \geq 0, X_0 = x_0$$

تعریف می‌شود که در آن θ, μ, σ و x_0 پارامترهای مثبت مدل هستند. مثال دیگر که تعمیم مدل واسیچک هست را مدل CIR^۱ ([۴]) نامند و به صورت

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t, \quad t \geq 0, X_0 = x_0$$

معرفی می‌شود که در آن θ, μ, σ و x_0 پارامترهای مثبت مدل هستند. با شرط $2\theta\mu > \sigma^2$ ، فرایند تصادفی اکیداً مثبت و در غیر اینصورت نامنفی است. تحت شرط اخیر، چگالی انتقال فرایند می‌تواند به صورت توزیع کای دو غیرمرکزی، یعنی

$$p_\theta(t, y | x) = ce^{-u-v} \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{q}{2}} I_q(2\sqrt{uv}), \quad x, y \in \mathbb{R}^+$$

نوشته می‌شود که در آن

$$c = \frac{2\theta}{\sigma^3(1-e^{-\theta t})}, \quad q = \frac{2\theta\mu}{\sigma^2} - 1, \quad u = cxe^{-\theta t}, \quad v = cy.$$

یادآوری می‌شود، نماد $I_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+q} \frac{1}{k! \Gamma(k+q+1)}$ نشان‌دهنده تابع بسل تعدیل‌یافته و

مقدار $I_q(x)$ برای محاسبه تابع بسل تعدیل‌یافته، نرم‌افزار آماری R، مقدار $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$ تابع گاما است. برای محاسبه تابع بسل تعدیل‌یافته، نرم‌افزار آماری R، مقدار $I_q(x)$ را از دستور `bessli(x,q)` محاسبه می‌کند.

¹ Cox-Ingersoll-Ross

در دهه اخیر مطالعات فراوانی در مورد مدل‌های تصادفی انتشار انجام شده است که این تحقیقات منجر به کاربردهایی در برآزش و پیش‌بینی پدیده‌ها در شاخه‌های گوناگونی نظیر زیست‌شناسی ([۳۵])، فیزیک، داروسازی ([۹])، پزشکی ([۵،۴۶])، سیستم‌های دینامیکی ([۴۰])، کشاورزی ([۳۱])، بیمه ([۲۲])، اقتصاد و ریاضیات مالی شده است. این مدل‌ها، فرایندهای انتشار تصادفی نظیر لاگ‌نرمال، رایلی، گومپرتز و لوجستیک را شامل می‌شود. در [۴۵] چند کاربرد معادلات انتشار از دیدگاه استنباط آماری در اوراق قرضه استرالیا مطرح گردید. در [۴۷] به کاربردهای معادلات انتشار در خدمات حمل و نقل اتوماتیک خودرو پرداخته شده است. در [۲۶،۴۷] کاربردهای مسئله برآورد پارامترهای معادلات دیفرانسیل تصادفی در شبکه‌های موبایل به موبایل مورد بررسی قرار گرفته است. برآورد پارامترها در مدل‌های رشد تصادفی نیز در [۱۳،۱۹] شده است. ریکارتی [۳۲،۳۳]، از دیدگاه معادلات انتشار تصادفی، فرایند انتشار تصادفی گومپرتز را معرفی کرد که کاربردهای زیادی از آن در زمینه رشد سلول‌های سرطانی و مصرف گاز طبیعی و غیره توسط محققان مطرح شد.

در این مقاله برآوردگرهای شبه حداکثر درست‌نمایی برای پارامترهای SDE یک‌بعدی محاسبه می‌شوند. سپس یک تعمیم ناهمگن از فرایند تصادفی انتشار گومپرتز بر اساس این حقیقت که تنها عامل کاهش سرعت در یک رانش، تابعی وابسته به زمان است مطالعه می‌شود. روش تعمیم بر اساس معادلات کولموگوروف و ایتو است. در ابتدا تابع چگالی احتمال فرایند و توابع روند (شرطی و غیرشرطی) محاسبه می‌شوند و سپس با استفاده از نمونه‌گیری گسسته، استنباط‌های آماری نظیر برآورد پارامترها توسط روش حداکثر درست‌نمایی، یافتن توزیع برآوردگرهای حاصل شده و فاصله اطمینان پارامترها انجام می‌گردند. در پایان برای داده‌های شبیه‌سازی شده، کاربردهای این مدل معرفی می‌شوند. با استفاده از یک روش خطی‌سازی موضعی یک SDE غیرخطی توسط یک SDE خطی تقریب زده می‌شود. با به کارگیری این روش می‌توان پارامترهای SDE غیرخطی را با مشاهدات گسسته و توسط روش حداکثر درست‌نمایی برآورد کرد. یک رده از مدل‌های آماری که اثرهای تصادفی را اعمال می‌کنند با مدل‌های SDE ترکیب می‌شوند و جمله‌ای برای تابع درست‌نمایی حاصل می‌شود. در حالت عمومی، نمی‌توان جمله صریحی برای تابع درست‌نمایی پیدا کرد، ولی در برخی موارد می‌توان حالت صریحی برای تابع درست‌نمایی یافت که در این مقاله به بررسی چنین حالت‌هایی پرداخته می‌شود. مدل‌های SDE شبیه مدل‌های سری زمانی به زمان وابسته هستند، با این تفاوت که در مدل‌های سری زمانی متغیر و تأخیرهایش در نظر گرفته می‌شود، ولی در SDE، متغیر به همراه مشتق‌های آن حساب می‌شود. در این مقاله به منظور برآورد پارامترهای SDE، جواب را به صورت یک سری زمانی نوشته، از طریق روش‌های آماری پارامترهای مدل برآورد می‌شوند. در انتها ناوردایی مفصل نسبت به ساختار مفصل بقا و دوگان‌های وابسته به آن تحت مطالعه قرار می‌گیرد. در پایان کاربرد مفصل ناوردا در مدل‌بندی SDE بیان می‌شود.

۱. روش‌های برآورد شبه حداکثر درست‌نمایی برای پارامترهای SDE

معادلات دیفرانسیل تصادفی به خصوص فرایندهای انتشار، کاربرد وسیعی در علوم زیستی، مالی، اقتصاد و فیزیک دارد. پارامترها و توابع مجهول در مدل باید توسط مشاهدات فرایند برآورد شوند. در این بخش برآورد به روش شبه حداکثر

درست‌نمایی برای پارامترهای یک مدل SDE محاسبه می‌شوند. حالت خاص (۱) که توابع f و g به t بستگی نداشته باشند را در نظر بگیرید:

$$dX_t = f(X_t, \theta)dt + g(X_t, \theta)dW_t, \quad t \geq 0, X_0 = x_0 \quad (2)$$

که X_t یک فرایند تصادفی زمان-همگن است. در این حالت چگالی انتقال تنها به Δt ، x و y بستگی دارد و از این رو آن را با $p(\Delta t, x, y)$ یا $p(t_{i-1}, x, t_i, y)$ نمایش می‌دهند. اگر Δt ثابت باشد، با برقراری برخی شرایط، $p(t-s, x, y)$ در معادله پسر و فوکر-پلانک یعنی، $\frac{\partial p}{\partial s} = f(x) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(x) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ صدق می‌کند که یک معادله دیفرانسیل جزئی^۱ (PDE) ساده است. از این که چگالی‌های انتقال عموماً مجهول هستند، نمی‌توان برآوردگر حداکثر درست‌نمایی^۲ (MLE) را پیدا کرد. با مقدار اولیه X_0 و پارامتر p بعدی θ ، توسط ویژگی مارکوف فرایندهای انتشار، تابع درست‌نمایی متناظر با (۲) به صورت

$$L_n(\theta) = \prod_{i=1}^n \log p_\theta(\Delta t, X_{i-1}, X_i) p_\theta(X_0)$$

و لگاریتم آن به صورت

$$l_n(\theta) = \log L_n(\theta) = \sum_{i=1}^n \log p_\theta(\Delta t, X_{i-1}, X_i) + \log p_\theta(X_0)$$

خواهد بود. برآورد θ توسط چگالی h که متعلق به خانواده چگالی شرطی واقعی نیست انجام می‌شود که آن را چگالی شبه واقعی گویند. برآوردگر شبه حداکثر درست‌نمایی به عنوان جواب مسئله بهینه‌سازی

$$\theta_n = \arg \max_{\theta \in \Theta} h_n(\theta | X_1, \dots, X_n)$$

داده می‌شود که در آن

$$h_n(\theta | X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n \log h_\theta(\Delta t, X_{i-1}, X_i) + \log h_\theta(X_0).$$

تحت برخی شرایط این روش برای حالتی که $\Delta t \rightarrow 0$ و $n\Delta t \rightarrow \infty$ ، نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. در زیر به روش‌های موجود در این زمینه می‌پردازیم:

در روش اویلر ([۱۶])، به کمک معادله (۲) داریم،

$$X_{t+\Delta t} - X_t = f(X_t, \theta)\Delta t + g(X_t, \theta)(W_{t+\Delta t} - W_t)$$

که نموهای $X_{t+\Delta t} - X_t$ متغیرهای تصادفی نرمال مستقل با میانگین $E_x = f(X_t, \theta)\Delta t$ و واریانس $V_x = g^2(X_t, \theta)\Delta t$ هستند. بنابراین چگالی انتقال فرایند می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

¹Partial differential equation

²Maximum likelihood estimator

$$p_{\theta}(t, y | x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi g^2(x, \theta)}} \exp\left\{-\frac{(y-x-f(x, \theta)t)^2}{2g^2(x, \theta)}\right\} \quad (۳)$$

و در پی آن لگاریتم درست‌نمایی برابر است با:

$$h_n(\theta | X_1, \dots, X_n) = -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{(X_i - X_{i-1} - f(X_{i-1}, \theta)\Delta)^2}{\sigma^2 \Delta t} + n \log(2\pi\sigma^2 \Delta t) \right)$$

که به معادله بالا تقریب موضعاً نرمال نیز گویند. در [۴۳] نشان داده می‌شود که برآورده سازگار σ^2 برابر با

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n\Delta t} \sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1})^2$$

روش اوزاکی [۲۸، ۳۷] برای SDEهای همگن

$$dX_t = f(X_t, \theta)dt + \sigma dW_t, t \geq 0, X_0 = x_0$$

مورد استفاده قرار می‌گیرد که در آن σ ثابت است. در این حالت داریم

$$X_{t+\Delta t} | X_t = x \sim N(E_x, V_x)$$

که در آن

$$E_x = x + \frac{f(x)}{\partial_x f(x)} (e^{\partial_x f(x)\Delta t} - 1), V_x = \sigma^2 \frac{e^{2k_x \Delta t} - 1}{2k_x},$$

$$k_x = \frac{1}{\Delta t} \log\left(1 + \frac{f(x)}{x \partial_x f(x)} (e^{\partial_x f(x)\Delta t} - 1)\right).$$

تعمیم روش اوزاکی در [۳۸] به اسم روش شوچی-اوزاکی برای SDEهای زیر معرفی شد:

$$dX_t = f(t, X_t, \theta)dt + g(X_t, \theta)dW_t, t \geq 0, X_0 = x_0$$

و همچنین $X_{t+\Delta t} | X_t = x \sim N(A_{(t,x)}x, B_{(t,x)}^2)$ که در آن

$$A_{(t,x)} = 1 + \frac{f(t,x)}{xL_t} (e^{L_t \Delta t} - 1) + \frac{M_t}{xL_t^2} (e^{L_t \Delta t} - 1 - L_t \Delta t)$$

$$.M_t = \frac{g^2(x)}{2} \partial_{xx} f(t, x) + \partial_x f(t, x) \text{ و } L_t = \partial_x f(t, x) \text{ که } B_{(t,x)} = g(x) \sqrt{\frac{e^{2L_t \Delta t} - 1}{2L_t}} \text{ و}$$

کسلر [۱۸] با کمک بسط ایتو-تیلور مراتب بالاتر یک تقریب برای میانگین و واریانس یک چگالی شرطی نرمال به دست

آورد. در معادله (۱)، چگالی انتقال توسط روش کسلر به صورت $X_{t+\Delta t} | X_t = x \sim N(E_x, V_x)$ است که

$$E_x = x + f(t, x)\Delta t + [f(t, x)\partial_x f(t, x) + \frac{1}{2}g^2(t, x)\partial_{xx} g(t, x)] \frac{(\Delta t)^2}{2},$$

$$V_x = x^2 + [2f(t, x)x + g^2(t, x)]\Delta t + [2f(t, x)(\partial_x f(t, x)x + f(t, x) + g(t, x)\partial_x g(t, x)) + g^2(t, x)(\partial_{xx} f(t, x)x + 2\partial_x f(t, x) + \partial_x g^2(t, x) + g(t, x)\partial_{xx} g(t, x))] \frac{(\Delta t)^2}{2} - E_x^2.$$

روش درستنمایی شبیه‌سازی شده نیز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد که در [۲۹،۳۶] معرفی شد. برای مقدار N به اندازه کافی بزرگ، کمیت $\delta = \frac{\Delta}{N}$ از Δ کوچکتر خواهد بود. از این‌رو، با استفاده از معادله چپمن-کولموگوروف ([۳۴])، چگالی انتقال $X_{t+\Delta t}$ در نقطه y ، به شرط $X_t = x$ برابر است با

$$\begin{aligned} p_{\theta}(\Delta, y | x) &= \int p_{\theta}(\delta, y | z) p_{\theta}(\Delta - \delta, z | x) dz \\ &= E_z \left(\int p_{\theta}(\delta, y | z) | \Delta - \delta \right). \end{aligned}$$

اکنون از روش شبیه‌سازی مونت کارلو ([۳۴]) بهره گرفته، با قرار دادن $\psi_{\theta}(\delta, y | z)$ به عنوان چگالی انتقال در (۳) و M تکرار z_i ، $i = 1, \dots, M$ ، برآورد $p_{\theta}(\Delta, y | x)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{p}_{\theta}^{(N, M)}(\Delta, X_{t+\Delta} | x) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \psi_{\theta}(\delta, X_{t+\Delta} | z_i).$$

در [۲۹] ثابت می‌شود، وقتی $M, N \rightarrow \infty$ داریم

$$\hat{p}_{\theta}^{(N, M)}(\Delta, X_{t+\Delta} | x) \rightarrow p_{\theta}(\Delta, X_{t+\Delta} | x).$$

برای آشنایی با کاربردهای روش مونت کارلو در معادلات دیفرانسیل تصادفی مطالعه مرجع [۴۶] توصیه می‌شود. در پایان این بخش روش استفاده از معیار اطلاع آکائیکه^۱ (AIC) به منظور انتخاب مدل مناسب شرح داده خواهد شد. معیار اطلاع آکائیکه را می‌توان برای چگالی‌های شبه واقعی به صورت $AIC = -2h_n(\hat{\theta}_n) + 2 \dim(\Theta)$ توسعه داد که در آن $\hat{\theta}_n$ برآوردگر شبه حداکثر درستنمایی و h_n تقریب نرمال موضعی لگاریتم درستنمایی واقعی هست. وقتی مدل‌های متعدد برای یک سری داده مقایسه می‌شوند، مدل‌هایی که AIC آن‌ها کمتر است را ترجیح می‌دهیم.

مثال ۲.۱. مدل‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$dX_t = \theta_1 X_t dt + \theta_2 X_t^{\theta_3} dW_t \quad \text{مدل واقعی}$$

$$dX_t = (\theta_1 + \theta_2 X_t) dt + \theta_3 \sqrt{X_t} dW_t \quad \text{مدل رقابتی (۱)}$$

$$dX_t = (\theta_1 + \theta_2 X_t) dt + \theta_3 X_t^{\theta_4} dW_t \quad \text{مدل رقابتی (۲)}$$

$$dX_t = \theta_1 dt + \theta_2 X_t^{\theta_3} dW_t \quad \text{مدل رقابتی (۳)}$$

با تولید داده‌ها از یک مدل با پارامترهای $\theta = (2, 0.3, 0.5)$ و مقدار اولیه $X_0 = 2$ و $\Delta t = 10^{-3}$ عملکرد AIC برای مدل‌های ذکر شده طبق جدول ۱ آزمون می‌شود. همچنین برآوردهای پارامتر تحت مدل‌های مختلف در جدول ۲ آمده است.

¹Akaike information criterion

جدول ۱: مقدار AIC برای مدل واقعی و مدل‌های رقابتی مثال ۲.۱.

مدل	AIC
مدل واقعی	-۴۸۶۷,۵۹۵
مدل رقابتی ۱	-۴۸۶۵,۵۹۷
مدل رقابتی ۲	-۴۸۶۷,۵۸۷
مدل رقابتی ۳	-۴۸۱۰,۵۹۷

جدول ۲: برآورد پارامترهای مدل واقعی و مدل‌های رقابتی مثال ۲.۱.

مدل	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
مدل واقعی	۱,۸۹۸	۰,۳۰۱	۰,۴۹۳	-
مدل رقابتی ۱	-۰,۱۷۸	۱,۹۲۸	۰,۳۰۱	۰,۴۹۳
مدل رقابتی ۲	۰,۱۷۴	۱,۹۲۸	۰,۲۹۷	-
مدل رقابتی ۳	۸,۲۲۰	۰,۲۹۱	۰,۵۳۰	-

۲. استنباط آماری در مدل‌های SDE

مدل فرایند انتشار تصادفی گومپرتز همگن توسط ریکارتی [۳۲,۳۳] به صورت حل SDE ایتوی $dX_t = [\alpha X_t - \beta X_t \log(X_t)]dt + \sigma X_t dW_t$ معرفی شد که ثابت α ، نرخ رشد ذاتی و ثابت β ، عامل کاهش سرعت (شتاب منفی) و ثابت σ ، ضریب انتشار است. با تبدیل $Y_t = e^{\beta t} \log(X_t)$ ، فرایند انتشار تصادفی گومپرتز همگن به یک فرایند وینر تبدیل می‌شود [۲۵]. بر اساس این حقیقت برای معرفی تعمیم این فرایند، SDE عمومی $dX_t = a(t, X_t)dt + \sigma X_t dW_t$ که $t \in [t_0, T]$ را در نظر بگیرید و $a(t, X_t)$ به گونه‌ای پیدا می‌شود که معادله بالا از یک فرایند وینر حاصل شود. برای این منظور برای تابع $g(t)$ روی $[t_0, T]$ ، فرمول ایتو [۱۰,۱۵] را روی تبدیل $Y_t = g(t) \log(X_t)$ اعمال می‌کنیم:

$$dY_t = g(t) \left[\frac{g'(t)}{g(t)} \log(X_t) + \frac{a(t, X_t)}{X_t} - \frac{\sigma^2}{2} \right] dt + \sigma g(t) dW_t.$$

شرط این که $Y(t)$ یک فرایند وینر باشد، آن است که باید فقط تابعی از زمان باشد به طوری که

$$\frac{g'(t)}{g(t)} \log(X_t) + \frac{a(t, X_t)}{X_t} = k(t).$$

از این رو یک نسخه ناهمگن از فرایند انتشار تصادفی گومپرتز با نرخ رشد ذاتی و عامل کاهش سرعت به صورت

$$dX_t = \left[k(t)X_t - \frac{g'(t)}{g(t)}X_t \log(X_t) \right] dt + \sigma X_t dW_t$$

به دست می‌آید.

در این بخش فرض می‌کنیم پارامتر کاهش سرعت تنها به زمان بستگی دارد و لذا $k(t) = a \in (-\infty, +\infty)$ در این حالت، تعمیم خانواده فرایندهای انتشار $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$ با مقادیر اختیار شده در $(0, \infty)$ و گشتاورهای بی‌نهایت کوچک به صورت زیر داده می‌شوند:

$$A_1(t, x) = aX_t - \frac{g'(t)}{g(t)}X_t \log(X_t), \quad A_2(t, x) = \sigma^2 X_t^2. \quad (۴)$$

یادآوری می‌شود، حالت‌های $g(t)$ ثابت، $g(t) = e^{\beta t}$ و $g(t) = t$ به ترتیب فرایند همگن لاگ‌نرمال، همگن گومپرتز و ناهمگن گومپرتز را نتیجه می‌دهند.

اگر تابع چگالی احتمال مدل (۴) با نماد $f(y, t | x, s)$ نشان داده شود، معادلات کولموگوروف برقرار هستند ([۳۴]) و به عنوان نمونه معادلات پیشروی کولموگوروف برابر است با

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial a(t, y)f}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b(t, y)f}{\partial y^2}.$$

گشتاورهای بی‌نهایت کوچک فرایند (۴) شرط لازم و کافی برای برقراری قضیه ریکارتی [۳۲] روی تبدیل یک فرایند

انتشار به فرایند وینر را تضمین می‌کنند. تبدیل مناسب در این حالت به صورت $\Phi(t) = \int_s^t g^2(\theta) d\theta$ و

$$\Phi(t, x) = \frac{g(t)}{\sigma} \log(x) - \frac{a - \sigma^2/2}{\sigma} \int_s^t g(\theta) d\theta$$

هست. بنابراین تابع چگالی احتمال فرایند حاصل عبارت است از:

$$f(y, t | x, s) = \sqrt{2\pi\sigma^2 v^2(s, t)} e^{-\frac{[\log(y) - \mu(s, t, x)]^2}{2\sigma^2 v^2(s, t)}} \quad (۵)$$

که تابع چگالی توزیع لاگ‌نرمال $LN(\mu(s, t, x), \sigma^2 v^2(s, t))$ با پارامترهای

$$\mu(s, t, x) = \frac{g(s)}{g(t)} \log(x) + \frac{a - \sigma^2}{g(t)} \int_s^t g(\theta) d\theta$$

و

$$v^2(s, t) = \frac{1}{g^2(t)} \int_s^t g^2(\theta) d\theta$$

هست. در حالتی که $X_t | X_s = x_s \sim LN(\mu(s, t, x_s), \sigma^2 v^2(s, t))$ تابع روند شرطی فرایند برابر است با:

$$E(X_t | X_s) = \exp\left(\frac{g(s)}{g(t)} \log(X_s) + \frac{a - \frac{\sigma^2}{2}}{g(t)} \int_s^t g(\theta) d\theta + \frac{\sigma^2}{2g^2(t)} \int_s^t g^2(\theta) d\theta\right). \quad (۶)$$

با فرض برقراری شرط اولیه $P(X_{t_1} = x_1) = 1$ ، تابع روند فرایند برابر است با:

$$E(X_t) = \exp\left(\frac{g(t_1)}{g(t)} \log(X_{t_1}) + \frac{a - \frac{\sigma^2}{2}}{g(t)} \int_{t_1}^t g(\theta) d\theta + \frac{\sigma^2}{2g^2(t)} \int_{t_1}^t g^2(\theta) d\theta\right). \quad (۷)$$

با نمونه‌گیری گسسته $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ از فرایند در لحظه‌های زمانی (t_1, \dots, t_n) و تحت شرط اولیه $P(X_{t_1} = x_1) = 1$ و قبول این فرض که $g(t)$ تنها به زمان بستگی دارد، تابع درستنمایی متناظر با فرایند یعنی

$$L(\mathbf{x}; \alpha, \sigma^2) = \prod_{j=2}^n f(x_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1})$$

با استفاده از (۵)، به صورت

$$L(\mathbf{x}; \alpha, \gamma) = \prod_{j=2}^n \sqrt{2\pi\sigma^2 v^2(t_{j-1}, t_j)} \frac{1}{x_j} \exp\left(-\frac{[\log(x_j) - \mu(t_{j-1}, t_j, x_{j-1})]^2}{2\sigma^2 v^2(t_{j-1}, t_j)}\right)$$

نوشته می‌شود. به منظور کار کردن با یک تابع درستنمایی معلوم و برای محاسبه ساده برآوردگرها، نمونه گسسته را برای

$j = 2, \dots, n$ به صورت $u_j = \frac{v_j^{-1}}{g(t_j)} \int_{t_{j-1}}^{t_j} g(\theta) d\theta$ و $v_j = v_j^{-1} \left(\log(x_j) - \frac{g(t_{j-1})}{g(t_j)} \log(x_{j-1}) \right)$ تبدیل می‌کنیم و

بنابراین تابع درستنمایی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$L_{v_1, \dots, v_n}(\mathbf{a}, \sigma^2) = [2\pi\sigma^2]^{-\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{v} - \mathbf{aU})' (\mathbf{v} - \mathbf{aU})\right)$$

که در آن $\mathbf{a} = a - \frac{\sigma^2}{2}$ ، $\mathbf{V} = (v_1, \dots, v_n)'$ ، $v_j = v(t_{j-1}, t_j)$ و $\mathbf{U} = (u_2, \dots, u_n)$. با مشتق‌گیری از لگاریتم تابع درستنمایی نسبت به \mathbf{a} و σ^2 ، MLEهای این پارامترها به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{UU}')^{-1} \mathbf{UV} \sim N(\mathbf{a}, \sigma^2 (\mathbf{UU}')^{-1}), \quad (۸)$$

$$(n-1)\hat{\sigma}^2 = \mathbf{V}'(\mathbf{I}_{n-1} - \mathbf{U}'(\mathbf{UU}')^{-1}\mathbf{U})\mathbf{V} \sim \sigma^2 \chi_{n-2}^2. \quad (۹)$$

می‌توان نشان داد $(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\sigma}^2)$ آماره بسنده توأم برای (\mathbf{a}, σ^2) است و بنابراین برآوردگرهای $\hat{\mathbf{a}}$ و $\hat{\sigma}^2$ به ترتیب برآوردگرهای ناریب با کمترین واریانس به طور یکنواخت^۱ (UMVUE) برای \mathbf{a} و σ^2 هستند. فواصل اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای \mathbf{a} و σ^2 به ترتیب به صورت زیر خواهند بود:

$$\left[\hat{\mathbf{a}} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}, \hat{\mathbf{a}} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}} t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \right], \quad (۱۰)$$

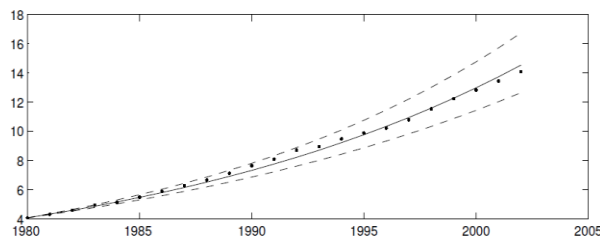
^۱ Uniformly minimum variance unbiased estimator

$$\left[\frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}, \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \right]. \quad (11)$$

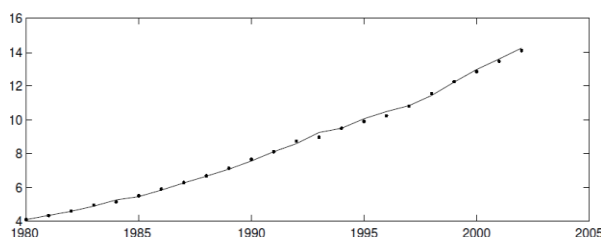
اکنون کاربرد مدل بررسی شده برای داده‌های شبیه‌سازی شده مصرف برق (برحسب 10^9 کیلو وات) مطرح می‌شود. ابتدا ۲۰ مشاهده اول برای برآورد پارامترهای مدل توسط روابط (۸) و (۹) انجام می‌پذیرد و سپس فواصل اطمینان پارامترها توسط معادلات (۱۰) و (۱۱) محاسبه می‌شوند. برای پیش‌بینی مقادیر مصرف برق سال‌های بعد از تابع روند برآورد شده و تابع روند شرطی برآورد شده که با جابه‌جا کردن پارامترها با برآورد متناظر آن‌ها در عبارتهای (۷) و (۶) حاصل می‌گردند، استفاده می‌شود. به عنوان نمونه با استفاده از تابع $g(t) = t^{-4}$ ، مقادیر برآوردگرهای نقطه‌ای و فاصله‌ای پارامتر \mathbf{a} برابر با $\hat{\mathbf{a}} = 0.061$ و $(0.055, 0.068)$ و مقادیر برآوردگرهای نقطه‌ای و فاصله‌ای پارامتر σ^2 برابر با $\hat{\sigma}^2 = 1.793$ و $(1.037, 3.82) \times 10^{-4}$ خواهد بود. جدول ۳ نتایج پیش‌بینی را نشان می‌دهد و مقادیر پیش‌بینی شده توسط تابع روند برآورد شده و تابع روند شرطی برآورد شده و برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای نمایش داده شده است. شکل ۱ (۲) برازش‌ها و پیش‌بینی‌های ساخته شده توسط تابع روند (شرطی) برآورد شده را نشان می‌دهد. (خطوط نقطه‌چین نشان‌دهنده کران پایین و بالا هستند).

جدول ۳: پیش‌بینی بر اساس تابع روند برآورد شده و تابع روند شرطی برآورد شده.

سال	داده	روند برآورد شده		روند شرطی برآورد شده	
		برآورد نقطه‌ای	برآورد فاصله‌ای	برآورد نقطه‌ای	برآورد فاصله‌ای
۲۰۰۰	۱۲,۸۳	۱۲,۹۸	(۱۱,۴۴, ۱۴,۷۶)	۱۲,۹۵	(۱۲,۸۷, ۱۳,۰۴)
۲۰۰۱	۱۳,۴۵	۱۳,۷۴	(۱۲,۰۳, ۱۵,۷۱)	۱۳,۵۸	(۱۳,۴۹, ۱۳,۶۷)
۲۰۰۲	۱۴,۰۸	۱۴,۵۴	(۱۲,۶۵, ۱۶,۷۳)	۱۴,۲۳	(۱۴,۱۴, ۱۴,۳۲)



شکل ۱: برازش و پیش‌بینی بر اساس تابع روند برآورد شده.



شکل ۲: برازش و پیش‌بینی بر اساس تابع روند شرطی برآورد شده.

۳. برآورد نقطه‌ای به روش خطی‌سازی موضعی برای SDE غیر خطی

در اکثر تحقیقات، فرایندهای انتشار خطی [۱۲] مورد بررسی قرار گرفته و از روش‌های تقریبی برای تقریب یک SDE توسط یک معادله تفاضلی تصادفی استفاده کرده‌اند. در این بخش یک تقریب خطی از SDE غیرخطی محاسبه می‌شود. مزیت روش خطی‌سازی موضعی بهتر بودن تقریب خطی نسبت به تقریب ثابت است و همچنین با توجه به این که تابع چگالی احتمال انتقال حاصل شده از یک SDE خطی نرمال است، لگاریتم تابع درست‌نمایی یک فرایند گسسته شده به راحتی قابل حصول است. در روش خطی‌سازی موضعی معادله دیفرانسیل تصادفی $dX = f(X)dt + \sigma dW$ توسط معادله دیفرانسیل خطی $dX = L_x X dt + \sigma dW$ تقریب زده می‌شود. بنابراین برای معقول بودن این تقریب باید $f(0) = 0$ باشد. به عبارت دیگر $f(0) \neq 0$ ، منطقی نیست. با استفاده از معادله $dX = (L_x X + f(0))dt + \sigma dW$ ، در حالت $f(0) = 0$ نیز مسئله قابل حل است که برای خوش‌تعریف بودن معادله باید شرط $f(0) < \infty$ برقرار باشد. در این بخش پس از معرفی روش خطی‌سازی موضعی به برآورد پارامترها پرداخته می‌شود و سپس مقایسه‌ای بین معادله اصلی و معادله تقریبی انجام می‌شود.

فرایند تصادفی یک‌بعدی X_t که در معادله دیفرانسیل تصادفی

$$dX_t = f(X_t, t)dt + g(X_t)dW_t$$

صدق می‌کند را در نظر بگیرید که در آن $f(X_t, t)$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر مرتبه دوم نسبت به X_t و به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر نسبت به t است و $g(X_t)$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر و W_t حرکت براونی باشد. با به کارگیری فرمول ایتو با SDE $Y_t = \varphi(X_t)$ بالا به معادله

$$dY_t = \left(f \frac{d\varphi}{dx} + \frac{g^2}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right) dt + \sigma dW_t$$

تبدیل می‌شود که دارای ضریب ثابت برای جمله انتشار است و $\varphi(t)$ در ODE به صورت $g \frac{d\varphi}{dx} = \sigma$ که σ ثابت است صدق می‌کند. بنابراین می‌توان SDE

$$dX_t = f(X_t, t)dt + \sigma dW_t \quad (۱۲)$$

را در نظر گرفت که $f(X_t, t)$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر مرتبه دوم نسبت به X_t و به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر نسبت به t است و σ یک ثابت هست. روش خطی‌سازی موضعی یک روش تقریبی است که تابع رانش $f(X_t, t)$ در (۱۲) به‌طور موضعی توسط یک تابع خطی از X_t تقریب زده می‌شود. این رفتار می‌تواند توسط یک معادله از $f(x_t, t)$ و استفاده از فرمول ایتو به‌صورت

$$df = \left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

تعیین شود. برای خطی کردن f نسبت به X_t و t ، فرض می‌شود $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, s)$ ، $\frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s)$ و $\frac{\partial f}{\partial t}(X_t, s)$ ثابت هستند. این فرض زمانی که $t \in [s, s + \Delta s]$ معقول است. بنابراین معادله دیفرانسیل اخیر به‌صورت

$$f(X_t, t) - f(X_s, s) = \left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) (t - s) + \frac{\partial f}{\partial x} (X_t - X_s)$$

تبدیل می‌شود و از این رو $f(X_t, t) = L_s X_t + M_s t + N_s$ که در آن:

$$L_s = \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s),$$

$$M_s = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, s) + \frac{\partial f}{\partial t}(X_s, s),$$

$$N_s = f(X_s, s) - \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s)X_s - \left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, s) + \frac{\partial f}{\partial t}(X_s, s) \right) s.$$

بنابراین به جای (۱۲) می‌توان روی معادله دیفرانسیل خطی

$$dX_t = (L_s X_t + M_s t + N_s) dt + \sigma dW_t$$

که $t \in [s, s + \Delta s]$ تمرکز کرد. توسط قضیه کامرون-مارتین-گیرسانوف ([۲]) می‌توان معادله اخیر را به معادله $dX_t = L_s X_t dt + \sigma d\tilde{W}_t$ تبدیل کرد که در آن $\tilde{W}_t = W_t - \int_s^t \gamma(u) du$ و $\gamma(u) = -\frac{1}{\sigma} (M_s u + N_s)$ با تغییر متغیر $Y_t = e^{-L_s t} X_t$ داریم:

$$X_t = Y_s + \sigma \int_s^t e^{-L_s u} d\tilde{W}_u = Y_s + \int_s^t (M_s u + N_s) e^{-L_s u} du + \sigma \int_s^t e^{-L_s u} dW_u$$

و در پی آن:

$$X_t = X_s + \frac{f(X_s, s)}{L_s} (e^{L_s(t-s)} - 1) + \frac{M_s}{L_s^2} (e^{L_s(t-s)} - 1) - L_s(t-s) + \sigma \int_s^t e^{L_s(t-u)} dW_u.$$

از این که جمله انتگرال تصادفی در سمت راست معادله بالا دارای توزیع $N(0, \text{Var}_s(X_t))$ است که در آن $\text{Var}_s(X_t) = \frac{\sigma^2(e^{2L_s(t-s)})}{2L_s}$ ، این روش هم برای مسئله برآورد و هم برای شبیه‌سازی قابل انعطاف خواهد بود. برای مقایسه این روش با روش اویلر، یادآوری می‌شود که در روش اخیر

$$X_t = X_s + f(X_s, s)(t-s) + \sigma \int_s^t dW_u$$

و $\text{Var}_s(X_t) = \sigma^2(t-s)$ و از این رو، در روش اویلر $\text{Var}_s(X_t)$ مستقل از حالت X_s است در صورتی که در روش خطی‌سازی موضعی واریانس به X_s بستگی دارد.

مثال ۱.۳. معادله دیفرانسیل تصادفی $dX_t = f(X_t)dt + \sigma dW_t$ با $f(X_t) = -X_t^3$ و با σ ثابت را در نظر بگیرید. جواب به روش خطی‌سازی موضعی به صورت

$$X_t = X_s + \frac{X_s}{3} \left(e^{-3X_s^2(t-s)} - 1 \right) - \frac{\sigma^2}{3X_s^2} \left(e^{-3X_s^2(t-s)} + 3X_s^2 - 1 \right) + \sigma \int_s^t e^{-3X_s^2(t-u)} dW_u \quad (13)$$

است و $\text{Var}_s(X_t) = \sigma^2 \left(\frac{e^{-6X_s^2(t-s)} - 1}{-6X_s^2} \right)$ در صورتی جواب معادله براساس روش اویلر به صورت

$$X_t = X_s - X_s^3(t-s) + \sigma \int_s^t dW_u$$

خواهد بود و $\text{Var}_s(X_t) = \sigma^2(t-s)$.

اکنون به مسئله برآورد در این معادله پرداخته می‌شود. اگر $p(x_1, \dots, x_N)$ تابع چگالی توأم باشد که x_n یک مشاهده n تایی با فواصل زمانی هم اندازه Δt و N تعداد مشاهدات باشد با استفاده از ویژگی مارکوف، لگاریتم درست‌نمایی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \log p(x_1, \dots, x_N) &= \sum_{n=1}^{N-1} \log p(x_{n+1} | x_n) + \log p(x_1) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \log \left\{ \frac{(x_{n+1} - E_n)^2}{V_n} + \log(2\pi V_n) \right\} + \log p(x_1) \end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned} E_n &= x_n + \frac{f(x_n, t_n)}{L_n} \left(e^{L_n \Delta t} - 1 \right) + \frac{M_n}{L_n^2} \left\{ e^{L_n \Delta t} - L_n \Delta t - 1 \right\}, \\ V_n &= \sigma^2 \frac{e^{2L_n \Delta t} - 1}{2L_n}, \\ L_n &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, t_n), \\ M_n &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_n, t_n) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, t_n). \end{aligned}$$

همان‌طور که قبلاً اشاره شد با وجود اینکه ضریب جمله انتشار ثابت نیست و تابعی از فرایند تصادفی هست، ولی می‌توان تابع معادله دیفرانسیل اصلی را به یک SDE با ضریب ثابت جمله انتشار تبدیل کرد. در برآورد حدکثر درست‌نمایی، این تبدیل

ملزم تغییر در لگاریتم تابع درست‌نمایی است. اگر $p(x_1, \dots, x_N)$ و $p(y_1, \dots, y_N)$ به ترتیب توابع چگالی توأم x_n و $y_n = \varphi(x_n)$ باشند، با استفاده از روش تبدیلات، $p(x_1, \dots, x_N) = p(y_1, \dots, y_N)J$ که

$$J = \left| \frac{\partial(y_1, \dots, y_N)}{\partial(x_1, \dots, x_N)} \right| = \prod_{n=1}^N \left| \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=x_n}$$

قدرمطلق ژاکوبی است. از این که تابع لگاریتم درست‌نمایی $p(y_1, \dots, y_N)$ معادل با رابطه (۱۳) است با این تفاوت که x_n با y_n جابه‌جا می‌شود، داریم:

$$\begin{aligned} \log p(x_1, \dots, x_N) &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \frac{(y_{n+1} - E_n)^2}{V_n} + \log(2\pi V_n) \right\} \\ &+ \log p(x_n) + \sum_{n=1}^N \log \left(\left| \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right|_{x=x_n} \right) \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} E_n &= y_n + \frac{\tilde{f}(y_n, t_n)}{L_n} (e^{L_n \Delta t} - 1) + \frac{M_n}{L_n^2} \{ (e^{L_n \Delta t} - 1) - L_n \Delta t \}, \\ V_n &= \frac{e^{2L_n \Delta t} - 1}{2L_n} \sigma^2, \\ L_n &= \frac{\partial \tilde{f}(y_n, t_n)}{\partial y}, \\ M_n &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{f}(y_n, t_n)}{\partial y^2} + \frac{\partial \tilde{f}(y_n, t_n)}{\partial t}, \\ \tilde{f} &= f \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{g^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

در پایان بخش با تحلیل عددی مقایسه‌ای بین روش جدید و روش اویلر از دیدگاه AIC انجام می‌شود و مشاهده می‌شود که روش درست‌نمایی ماکزیمم و AIC نتایج یکسانی را می‌دهند.

مثال ۲.۳. معادله دیفرانسیل $dX = (\alpha_1 X^1 + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3)dt + \sigma dW$ را در نظر بگیرید که $\alpha_1 = -\alpha_3 = 1$ و $\alpha_2 = 0$ و $\sigma^2 = 1$. برای هر مدل، یک نمونه اخذ می‌شود. با تبدیل $Y_t = \varphi(X_t) = \frac{X_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ ، مدل به معادله‌ای تبدیل می‌شود که ضریب انتشار ثابت دارد. با $N = 2000$ و طبق جدول ۴ مشاهده می‌شود خطی‌سازی موضعی از روش اویلر بهتر پارامترهای مدل را تخمین می‌کند.

جدول ۴ مقایسه روش خطی‌سازی موضعی و روش اویلر با $\Delta t = 0.05$.

پارامتر روش	$\log l$	σ^2	α_3	α_2	α_1
خطی‌سازی موضعی	۲۰۶۴٫۴	۱٫۰۱	-۰٫۹۷	۰٫۰۸	۱٫۰۵
اویلر	۲۰۵۷٫۱۲	۰٫۹۴	-۰٫۸۱	۰٫۰۶	۰٫۸

۴. مدل‌های با فضای حالت خطی و SDE غیر خطی

یک سری زمانی مجموعه مشاهداتی است که بر اساس زمان مرتب شده باشند و روش‌های آماری که این گونه داده‌های آماری را مورد استفاده قرار می‌دهد، روش‌های تحلیل سری‌های زمانی نامیده می‌شود. در حقیقت تحلیل سری‌های زمانی معمولاً به داده‌هایی مرتبط می‌شود که مستقل نبوده و به‌طور متوالی به هم وابسته هستند. این شاخه در علوم دیگر نظیر اقتصاد، مهندسی، ژئوفیزیک، ارتباطات، هواشناسی، قیمت سهام در بازار بورس، شاخص‌های قیمت ماهانه، ارقام فروش سالانه کاربردهای فراوانی دارد. اگر در یک سری زمانی مشاهدات بطور پیوسته در زمان ایجاد شوند، سری زمانی را پیوسته نامند. معادلات دیفرانسیل، مشابه مدل‌های سری زمانی پیوسته‌اند و شامل معادله‌ای بر حسب بردار حالت Y_t (که تابعی از پارامتر با مقادیر حقیقی زمان t است) و مشتق‌های آن هستند. به عنوان مثال مدل رشد ساده $\frac{dY_t}{dt} = \lambda Y_t$ بیانگر این مفهوم است که متغیر زمان Y_t در فاصله $[t, t + dt]$ متناسب با حالتی در این نقطه زمان است که از مثال‌های واقعی این مدل می‌توان به رشد جوامع یا میرایی اشعه‌های رادیو اکتیو اشاره کرد. جواب معادله بالا با شرط اولیه Y_{t_0} ، به صورت $Y_t = \exp[\lambda(t - t_0)]Y_{t_0}$ است. در علوم اجتماعی، SDE نظیر $\frac{dY_t}{dt} = \lambda Y_t + gZ_t$ کاربرد دارند که Z_t یک فرایند نوفه سفید گاوسی با میانگین صفر و تابع اتوکوواریانس $\gamma(t-s) = E(Z_t Z_s) = \delta(t-s)$ است. این حقیقت نشان می‌دهد فرایند Z_t تنها در تمام فواصل کوتاه زمانی خودهمبسته‌اند. جواب SDE اخیر

$$Y_t = e^{\lambda(t-t_0)} Y_{t_0} + \int_{t_0}^t e^{\lambda(t-s)} g Z_s ds$$

است و با توجه به این که فرایند نوفه سفید زمان پیوسته، یک تابع تعمیم‌یافته است، می‌توان جواب را برحسب $Z_s ds = dW_s$ نوشت که در آن فرایند پیوسته مشتق‌ناپذیر وینر است. بنابراین به منظور اجتناب از مشتق‌گیری از یک فرایند مشتق‌ناپذیر می‌نویسند، $dY_t = \lambda Y_t dt + g dW_t$ که جواب آن $Y_t = e^{\lambda(t-t_0)} Y_{t_0} + \int_{t_0}^t e^{\lambda(t-s)} g dW_s$ در حالتی که شرط اولیه گاوسی یا ثابت باشد، یک فرایند گاوسی است. به منظور برآورد پارامترها جواب را به صورت یک سری زمانی می‌نویسند، یعنی با در نظر گرفتن $Y_i = Y_{t_i}$

$$Y_{i+1} = e^{\lambda(t_{i+1}-t_i)} Y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\lambda(t_{i+1}-s)} g dW_s$$

پارامترهای مدل، برآورد می‌شوند که در ادامه این روش‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرند. همچنین مدل با فضای حالت پیوسته/گسسته خطی مورد بررسی قرار می‌گیرند. برای این منظور از گشتاورهای شرطی و فرمول بیز استفاده می‌شود. در نهایت پارامترهای مدل توسط الگوریتم پالایش کالمن برآورد می‌شوند.

در بسیاری از مدل‌های مالی، به مدل‌های تصادفی غیرخطی برخورد می‌کنیم. به منظور محاسبه تابع درست‌نمایی تنها باید احتمال انتقال محاسبه شود. در ادامه SDE غیرخطی و مدل‌های فضای حالت بررسی می‌شوند و رویکرد پالایش منجر به محاسبه بازگشتی تابع درست‌نمایی می‌شود.

مدل با فضای حالت پیوسته/گسسته خطی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} dY_t &= [A(t, \psi)Y_t + b(t, \psi)]dt + G(t, \psi)dW_t, \\ Z_i &= H(t_i, \psi)Y_{t_i} + d(t_i, \psi) + \varepsilon_i \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن W_t فرایند وینر r بعدی و Y_t بردار حالت p بعدی است. برای بهره‌گیری از دیدگاه ایتو فرض می‌کنیم خطاهای اندازه‌گیری $E_i \sim WN(0, R(t_i, \psi))$ نوفه سفید با زمان گسسته باشند. در برخی مواقع معادله (۱۴) برای زمان‌های اندازه‌گیری t_i و تابع درستنمایی، با استفاده از میانگین‌های الگوریتم پالایش کالمن به صورت بازگشتی محاسبه می‌شود. در این حالت از گشتاورهای شرطی $\mu(t | t_i) = E[Y_t | Z^i]$ و $\Sigma(t | t_i) = \text{Var}[Y_t | Z^i]$ استفاده می‌شود که در آن $Z^i = \{Z_i, \dots, Z_0\}$ اندازه‌گیری‌ها تا زمان t_i هستند. به روزرسانی زمان به صورت

$$\frac{d\mu(t|t_i)}{dt} = A(t, \psi)\mu(t | t_i) + b(t, \psi)$$

و

$$d\Sigma(t | t_i)dt = A(t, \psi)\Sigma(t | t_i) + \Sigma(t | t_i)A'(t, \psi) + \Omega(t, \psi)$$

انجام می‌شود، که $\Omega(t, \psi)$ ماتریس انتشار است و $t \in [t_i, t_{i+1}]$. زمان‌های اندازه‌گیری و به روزرسانی (پیش‌بینی بهینه) توسط اندازه‌گیری Z_{i+1} و استفاده از فرمول بیز اصلاح می‌گردد:

$$\begin{aligned} \mu(t_{i+1} | t_{i+1}) &= \mu(t_{i+1} | t_i) + K(t_{i+1} | t_i)v(t_{i+1} | t_i), \\ \Sigma(t_{i+1} | t_{i+1}) &= [I - K(t_{i+1} | t_i)H(t_{i+1}, \psi)]\Sigma(t_{i+1} | t_i), \\ Z(t_{i+1} | t_i)v(t_{i+1} | t_i) &= Z_{i+1} - Z(t_{i+1} | t_i) = H(t_{i+1}, \psi)\mu(t_{i+1} | t_i) + d(t_{i+1}, \psi), \end{aligned}$$

که در آن، $K(t_{i+1} | t_i) = \Sigma(t_{i+1} | t_i)H'(t_{i+1}, \psi)\Gamma(t_{i+1} | t_i)^{-1}$ سود کالمن، $Z(t_{i+1} | t_i)$ پیش‌گویی بهینه برای اندازه‌گیری Z_{i+1} ، $v(t_{i+1} | t_i)$ خطای پیش‌گویی و

$$\Gamma(t_{i+1} | t_i) = H(t_{i+1}, \psi)\Sigma(t_{i+1} | t_i)H'(t_{i+1} | t_i) + R(t_{i+1}, \psi)$$

ماتریس کوواریانس آن است. خوشبختانه حالت به روز شده $Y_{t_{i+1}} | Z^{i+1}$ سود گاوسی شرطی است و لذا می‌تواند توسط دو گشتاور شرطی حاصل شود. بعد از T مرحله، درستنمایی

$$l(\psi; Z) = \log p(Z_T, \dots, Z_0; \psi) = \sum_{i=0}^{T-1} \log p(Z_{i+1} | Z^i; \psi)p(Z_0)$$

خواهد بود که چگالی‌های انتقال برحسب توزیع‌های گاوسی

$$p(Z_{i+1} | Z^i; \psi) = \phi(v(t_{i+1} | t_i); 0, \Gamma(t_{i+1} | t_i))$$

داده می‌شوند. پس پالایش کالمن، درست‌نمایی را به‌طور بازگشتی برحسب پیش‌بینی‌ها، خطاها و واریانس‌های شرطی آن‌ها محاسبه می‌کند. پارامترهای مدل توسط الگوریتم پالایش کالمن برآورد می‌شوند.

در بسیاری از مدل‌های مالی، به مدل‌های تصادفی غیرخطی با سامانه زیر برخورد می‌کنیم:

$$\begin{aligned} dY_t &= f(Y_t, t, \psi)dt + g(Y_t, t, \psi)dW_t, \\ Z_i &= h(Y_{t_i}, t_i, \psi) + \varepsilon_i. \end{aligned} \quad (15)$$

یک وضعیت ساده زمانی است که حالت به‌طور کامل در زمان‌های t_i اندازه‌گیری شود، یعنی $Z_i = Y_i = Y_{t_i}$. در این صورت به منظور محاسبه تابع درست‌نمایی

$$l(\psi; Y) = \log p(Y_T, \dots, Y_0; \psi) = \sum_{i=0}^{T-1} \log p(Y_{i+1} | Y_i; \psi) p(Y_0)$$

تنها باید احتمال انتقال $p(y_{i+1}, t_{i+1} | y_i, t_i)$ محاسبه شود. برای این منظور می‌توان از روش‌های تقریبی نظیر خطی‌سازی که روی معادلات گشتاوری دقیق اعمال می‌شود (پالایش کالمن توسعه‌یافته ([۱۷])، اعمال مستقیم روش ایتو به روی SDE غیرخطی (خطی‌سازی موضعی ([۳۹])، روش‌های خطی‌سازی روی قسمت انتشار، روش‌های مونت کارلو برای محاسبه تقریب چگالی‌های انتقال ([۴۱])، استفاده از دیدگاه ناپارامتری که تابع رانش $f(\cdot)$ تابع انتشار $\Omega(\cdot)$ بدون داشتن فرضیات شکل تابعی برآورده می‌شوند (با روش‌های چگالی هسته، چگالی‌های شرطی برآورده می‌شوند) و بالاخره استفاده از بسط‌های تیلور تابع رانش و برآورد مشتق‌ها می‌توان بهره جست. مدل فضای حالت (۱۵) می‌تواند به‌صورت تقریبی بوسیله معادلات گشتاوری، خطی شود، اگر بتوانیم معادلات زیر را محاسبه کنیم (وابستگی به ψ حذف شده است):

$$\begin{aligned} \frac{d\mu(t|t_i)}{dt} &= E[f(Y, t) | Z^i], \\ \frac{d\Sigma(t|t_i)}{dt} &= E[f(Y, t)(Y(t) - \mu(t|t_i)) | Z^i] + E[\Omega(Y, t)]. \end{aligned} \quad (16)$$

بسط تیلور مرتبه اول f حول میانگین شرطی $\mu(t|t_i) = E[Y_t, Z^i]$ منجر به پالایش کالمن توسعه‌یافته پیوسته/گسسته $\frac{d\mu(t|t_i)}{dt} = f(\mu(t|t_i), t)$ و

$$\frac{d\Sigma(t|t_i)}{dt} = A(\mu(t|t_i), t)\Sigma(t|t_i) + \Sigma(t|t_i)A'(\mu(t|t_i), t) + \Omega(\mu(t|t_i), t)$$

می‌شود که $A(\mu(t|t_i), t) = \frac{\partial f(\mu(t|t_i), t)}{\partial y}$ برای ساختن (۱۶)، پالایش کالمن توسعه‌یافته یک معادلات دیفرانسیل‌اند که به روش‌های عددی حل می‌شوند. به‌روزرسانی زمان توسط معادلات $\frac{\partial p(y, t | Z^i)}{\partial t} = F(y, t)p(y, t | Z^i)$ ، $p(y, t_i | Z^i) = p(y_i | Z^i)$ و $p(y, t_{i+1} | Z^i) = p(y_{i+1} | Z^i)$ که $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ، $i = 0, \dots, T-1$ انجام می‌شود و F عملگر فوکر-پلانک است:

$$F(y, t)p(y, t | x, s) = -\sum_i \frac{\partial [f_i(y, t)p(y, t | x, s)]}{\partial y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 [\Omega_{ij}(y, t)p(y, t | x, s)]}{\partial y_i \partial y_j}.$$

رویکرد پالایش منجر به محاسبه بازگشتی تابع درستنمایی

$$l(\psi; Z) = \sum_{i=0}^{T-1} \log p(z_{i+1} | Z^i; \psi) + \log p(z_0; \psi)$$

می‌شود. شبیه‌سازی براساس روش‌های پالایش در حالت زمان گسسته به روش‌های مونت کارلوی زنجیر مارکوفی^۱ (MCMC)، رد نمونه‌گیری توابع چگالی، نمونه‌گیری مهم و متغیرهای متضاد و دوباره نمونه‌گیری خودگردان (بوت-استرپ) بازگشتی و در حالت زمان پیوسته به کمک معادله چپمن-کولموگروف ([۳۴]) انجام می‌شود [۴۱].

۵. اثرهای آمیخته در مدل‌های SDE

در تحقیقات زیست‌سنجی، مطالعات روی اندازه‌گیری‌های مکرر روی یک سری از افراد یا حیوانات آزمایشی، انجام می‌گیرد. در این مدل‌ها فرض می‌شود تمام پاسخ‌ها از یک حالت تابعی مشابه پیروی می‌کنند، اما در بین افراد مختلف پارامترها تغییر می‌کنند. محبوبیت مدل‌های با اثر آمیخته، قابل انعطاف بودن آن‌ها در ساختارهای همبستگی است که یکی از کاربردهای آن در یافتن اثر دارو بر ساختمان موجود زنده است. فرایندهای زیستی پیوسته اغلب به صورت یک سامانه ODE توصیف می‌شوند. یک تعمیم طبیعی SDEها هستند که اغتشاش سامانه توسط جمله انتشار مدل‌بندی می‌شود. نظریه مدل‌ها با اثرهای آمیخته برای مدل‌های قطعی (بدون سامانه خطا) و در هر دو مورد خطی و غیرخطی در [۷] انجام شده است. برآورد پارامترها در مدل‌های SDE به جز در موارد ساده سر راست نیست. یکی از روش‌ها برای برآورد، روش حداکثر درستنمایی است که نظر به این که چگالی‌های انتقال معمولی نیستند نمی‌توان تابع درستنمایی را به صورت صریح تشکیل داد. از روش‌های متنوع برای استنباط آماری در فرایندهای انتشار با مشاهدات گسسته می‌توان به [۸، ۲۱] اشاره کرد. اورگارد و جانسون [۲۷] با استفاده از پالایش کالمن تابع درستنمایی برای یک مدل SDE با اثرهای تصادفی و جمله رانش غیرخطی و جمله انتشار ثابت، را تقریب زدند.

در این بخش یک رده از مدل‌های آماری در نظر گرفته می‌شود که اثرهای آمیخته با جمله انتشار ترکیب می‌شوند و می‌توان حالت صریحی برای تابع درستنمایی یافت. مدل SDE یک‌بعدی برای یک فرایند پیوسته شامل M جزء مختلف در نظر گرفته می‌شود که به صورت تصادفی از جامعه استخراج شده‌اند، یعنی برای هر $i = 1, \dots, M$

$$dX_t^i = g(X_t^i, \theta, \mathbf{b}^i) dt + \sigma(X_t^i, \theta, \mathbf{b}^i) dW_t^i$$

که در آن $X_0^i = x_0^i$ ، $\mathbf{b}^i \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$ و θ پارامترهای ثابت p بعدی و \mathbf{b}^i پارامتر اثر تصادفی q بعدی است. W_t^i حرکت براونی است که از b^j برای هر $1 \leq i, j \leq M$ به طور متقابل مستقل و از X_0^i مستقل است. توابع ضریب رانش و انتشار $g(\cdot)$ و $\sigma(\cdot)$ معلوم‌اند. فرض کنید $E \subseteq R$ فضای حالت X_t^i باشد و توزیع X_t^i به شرط \mathbf{b}^i و $X_s^i = x$

¹ Markov chain Monte Carlo

که $t > s$ ، دارای یک چگالی اکیداً مثبت نسبت به اندازه لبگ روی E باشد، که آن را به صورت

$$y \in E \mapsto p(y, x, t - s | \mathbf{b}^i, \boldsymbol{\theta}) > 0$$

نمایش می‌دهند.

فرض کنید هر کدام از M جزء در $n_i + 1$ نقطه زمانی گسسته $(t_0^i, t_1^i, \dots, t_{n_i}^i)$ مشاهده شده باشند. اگر y^i بردار پاسخ $n_i + 1$ بعدی برای i امین جزء باشد، $\mathbf{y}^i = (y_0^i, \dots, y_{n_i}^i)$ که $y(t_j^i) = y_{t_j^i}^i = y_j^i$ و بردار پاسخ کلی N بعدی است که $N = \sum_{i=1}^M (n_i + 1)$. فاصله i ام بین مشاهده $j - 1$ و j با $\Delta_j^i = t_j^i - t_{j-1}^i$ نشان داده می‌شود.

در ادامه بخش MLE در مدل‌های SDE با اثرهای آمیخته محاسبه می‌شود.

برای به دست آوردن چگالی حاشیه‌ای، از چگالی شرطی داده‌ها به شرط اثرهای تصادفی \mathbf{b}^i نسبت به چگالی حاشیه‌ای اثرهای تصادفی انتگرال گرفته و از استقلال W_t^i و \mathbf{b}^i نیز استفاده می‌شود. بنابراین تابع درست‌نمایی به صورت زیر خواهد بود:

$$L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma} | \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^M p(\mathbf{y}^i | \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}) = \prod_{i=1}^M p(\mathbf{y}^i | \mathbf{b}^i, \boldsymbol{\theta}) p(\mathbf{b}^i | \boldsymbol{\Sigma}) d\mathbf{b}^i.$$

با توجه به این که X_t^i به شرط \mathbf{b}^i ، مارکوف است،

$$p(\mathbf{y}^i | \mathbf{b}^i, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{j=1}^{n_i} p(y_j^i, y_{j-1}^i, \Delta_j^i | \mathbf{b}^i, \boldsymbol{\theta})$$

و

$$p(\mathbf{b}^i | \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{\exp\{-(\mathbf{b}^i)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{b}^i / 2\}}{\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|} (2\pi)^{q/2}} d\mathbf{b}^i$$

که با جایگذاری احتمال‌های بالا در تابع درست‌نمایی نتیجه می‌شود:

$$L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma} | \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^M \int \prod_{j=1}^{n_i} p(y_j^i, y_{j-1}^i, \Delta_j^i | \mathbf{b}^i, \boldsymbol{\theta}) \frac{\exp\{-(\mathbf{b}^i)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{b}^i / 2\}}{\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|} (2\pi)^{q/2}} d\mathbf{b}^i$$

که در حالت کلی نمی‌توان حالت صریحی برای این تابع پیدا کرد.

مثال ۱.۵. جواب معادله دیفرانسیل $\frac{dC_t}{dt} = -KC_t$ که $C_0 = \frac{D}{V}$ ، به صورت $C_t = C_0 e^{-Kt}$ هست که تمرکز ترکیب پلاسما در زمان t بعد از یک تزریق کم را نشان می‌دهد و $K > 0$ ثابت دفع و D مقدار داروی تزریق شده در زمان $t = 0$ و V حجم ظاهری توزیع ترکیب است. رفتار نامنظم فرایندهای سوخت و ساز برای رفع ترکیب پلاسما توسط تغییرات تصادفی K به صورت $K + \xi(t)$ مدل‌سازی می‌شود که در آن ξ_t یک فرایند نوفه سفید است. در این صورت $\xi_t dt = \sigma dW_t$ که W_t حرکت براونی و σ پارامتر مقیاس است. اگر این مسئله با معادله دیفرانسیل اصلی آمیخته شود با نوشتن $X_t = C_t$ و $\beta = -K$ معادله دیفرانسیل تصادفی $dX_t = \beta X_t + \sigma X_t dW_t$ ساخته می‌شود که معادله حرکت براونی هندسی است. در اینجا $E = \mathbb{R}^+$. با استفاده از فرمول ایتو برای تبدیل $Y_t = \log X_t$ یک حرکت براونی

با انتشار خطی به صورت $dY_t = (\beta - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t$ به دست می‌آید که جواب معادله دیفرانسیل $Y_t = Y_0 + (\beta - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t$ است. فرض کنید غلظت ترکیب در پلاسما در نقاط زمان مجزا بعد از یک تزریق کم اندازه‌گیری شده باشد. هدف برآورد پارامترهای جامعه است، اما با توجه به تفاوت‌های فردی در فرایندهای سوخت و ساز، اثر تصادفی β در نظر گرفته می‌شود که منجر به مدل زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} Y_t^i &= Y_0^i + (\beta + \beta^i - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t^i, \\ \beta^i &\sim N(0, \sigma_\beta^2). \end{aligned} \quad (17)$$

در این جا $\theta = (\beta, \sigma^2)$ و $\Sigma = \sigma_\beta^2$ و باید $\lambda = (\beta, \sigma^2, \sigma_\beta^2)$ را برآورد کرد. از این که

$$Y_t^i | Y_0^i = y_0^i \sim N(y_0^i + (\beta + \beta^i - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$$

چگالی شرطی انتقال به صورت

$$p(y_j^i, y_{j-1}^i, \Delta_j^i; \beta, \sigma^2, \beta^i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta_j^i}} \exp\left\{-\frac{(y_j^i - y_{j-1}^i - (\beta + \beta^i - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta_j^i)^2}{2\sigma^2\Delta_j^i}\right\}$$

خواهد بود، و در پی آن تابع درست‌نمایی برابر است با

$$L(\lambda | \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^M \int p(y^i | \beta^i, \beta, \sigma^2) p(\beta^i | \sigma_\beta^2) d\beta^i.$$

برای راحتی محاسبات از تکنیک‌های رگرسیون خطی با ضریب رگرسیونی تصادفی استفاده می‌شود ([۳۰]) و با روش کمترین مربعات معمولی و روش حداکثر درست‌نمایی پارامترهای مدل برآورد می‌شوند. با تعریف عامل دقت $\eta^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_\beta^2}$ چگالی‌های شرطی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}^i | \beta^i, \beta, \sigma^2) &= \prod_{j=1}^{n_i} p(y_j^i, y_{j-1}^i, \Delta_j^i | \beta^i, \beta, \sigma^2) \\ &= \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta_j^i}} \exp\left\{-\frac{(y_j^i - y_{j-1}^i - (\beta + \beta^i - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta_j^i)^2}{2\sigma^2\Delta_j^i}\right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n_i}{2}}} \left\{ -\sum_j \frac{1}{\Delta_j^i} \frac{(y_j^i - y_{j-1}^i - (\beta + \beta^i - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta_j^i)^2}{2\sigma^2} \right\} \prod_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\sqrt{\Delta_j^i}} \end{aligned}$$

9

$$p(\beta^i | \sigma_\beta^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\beta^2}} \exp\left(-\frac{(\beta^i)^2}{2\sigma_\beta^2}\right) = \frac{(\eta^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\eta\beta^i)^2}{2\sigma^2}\right).$$

برای راحتی می‌توان پارامتر $\alpha = \beta - \frac{1}{2}\sigma^2$ و کمیت‌های $\Delta^i = (\prod_{j=1}^{n_i} \Delta_j^i)^{\frac{1}{n_i}}$ و $T^i = \sum_{j=1}^{n_i} \Delta_j^i$ را تعریف کرد.

بنابراین

$$L(\zeta | \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^M \frac{(\eta^2)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi\sigma^2\Delta_i^{n_i})^{\frac{n_i}{2}}} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{\sum_j \frac{1}{\Delta_j^i} (y_j^i - y_{j-1}^i - (\alpha + \beta^i)\Delta_j^i)^2 + (\eta\beta^i)^2}{2\sigma^2}\right\} d\beta^i.$$

با حل کردن انتگرال بالا درست‌نمایی کناری پارامترها به دست می‌آید که به اثرهای تصادفی β^i بستگی ندارد. بردارهای

$$\tilde{\mathbf{x}}^i = ((\Delta_1^i)^{-\frac{1}{2}}, \dots, (\Delta_{n_i}^i)^{-\frac{1}{2}}, 0)^T, \quad \tilde{\mathbf{y}}^i = ((\Delta_1^i)^{-\frac{1}{2}}(y_1^i - y_0^i), \dots, (\Delta_{n_i}^i)^{-\frac{1}{2}}(y_{n_i}^i - y_{n_i-1}^i), 0)^T$$

و $\tilde{\mathbf{z}}^i = ((\Delta_1^i)^{-\frac{1}{2}}, \dots, (\Delta_{n_i}^i)^{-\frac{1}{2}}, \eta)^T$ را تعریف کنید. در این صورت

$$\|\tilde{\mathbf{y}}^i - \tilde{\mathbf{x}}^i\alpha - \tilde{\mathbf{z}}^i\beta^i\|^2 = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{\Delta_j^i} (y_j^i - y_{j-1}^i - (\alpha + \beta^i)\Delta_j^i)^2 + (\eta\beta^i)^2$$

که $\hat{\beta}^i$ مجموع مربعات بالا را برای α ثابت مینیمم می‌کند و با توجه به مفاهیم نظریه رگرسیون، داریم

$$\hat{\beta}^i = ((\tilde{\mathbf{z}}^i)^T \tilde{\mathbf{z}}^i)^{-1} (\tilde{\mathbf{z}}^i)^T (\tilde{\mathbf{y}}^i - \tilde{\mathbf{x}}^i\alpha) = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (y_j^i - y_{j-1}^i - \alpha\Delta_j^i)}{\sum_{j=1}^{n_i} \Delta_j^i + \eta^2} = \frac{y_{n_i}^i - y_0^i - \alpha T^i}{T^i + \eta^2}$$

که به‌طور مستقیم پیش‌بینی‌های اثرهای تصادفی را برای پارامترهای داده شده را مشخص می‌کند. پس لگاریتم تابع درست‌نمایی برابر است با

$$\begin{aligned} \log L(\zeta | \mathbf{y}) &= \frac{M}{2} \log \eta^2 - \frac{N-M}{2} \log (2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \log ((\Delta^i)^{n_i} (T^i + \eta^2)) \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i,j} \frac{1}{\Delta_j^i} (y_j^i - y_{j-1}^i - \alpha\Delta_j^i)^2 - \sum_i (y_{n_i}^i - y_0^i - \alpha T^i)^2 (T^i + \eta^2)^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

با مشتق‌گیری از تابع بالا نسبت به پارامتر، MLE برای پارامترها حاصل می‌شود که این برآوردها، برای حالتی که برای هر $0 \leq i \leq M$ ، $T^i = T$ ، به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \hat{\alpha} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}, \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{N-2M} ((N-M)SSQ_{\Delta} - MSSQ_T), \\ \hat{\sigma}_{\beta}^2 &= \frac{N-M}{T(N-2M)} (SSQ_T - SSQ_{\Delta}), \end{aligned} \quad (19)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{1}{MT} \sum_{i=1}^M (y_{n_i}^i - y_0^i), \\ SSQ_T &= \frac{1}{MT} \sum_{i=1}^M (y_{n_i}^i - y_0^i - \hat{\alpha}T)^2, \\ SSQ_{\Delta} &= \frac{1}{N-M} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(y_j^i - y_{j-1}^i - \hat{\alpha}\Delta_j^i)^2}{\Delta_j^i}. \end{aligned}$$

واریانس‌های مجانبی برآوردهایی که از وارون اطلاع فیشر محاسبه شده در حالت بهینه برآورده می‌شوند به صورت

$$\begin{aligned} \text{Vâr}(\hat{\beta}) &= \frac{\hat{\sigma}_{\beta}^2 T + \hat{\sigma}^2}{MT} + \frac{\hat{\sigma}^4}{2(N-2M)}, \\ \text{Vâr}(\hat{\sigma}) &= \frac{\hat{\sigma}^2}{2(N-2M)}, \\ \text{Vâr}(\hat{\sigma}_{\beta}) &= \frac{(\hat{\sigma}_{\beta}^2 T + \hat{\sigma}^2)^2}{2MT^2 \hat{\sigma}_{\beta}^2} + \frac{\hat{\sigma}^4}{2(N-2M) T^2 \hat{\sigma}_{\beta}^2} \end{aligned}$$

خواهند بود.

مثال ۲.۵. مدل (۱۷) را که $\sigma_{\beta}^2 = 0$ برای هر i ، $\beta^i = 0$ در نظر بگیرید که مدلی بدون اثرهای تصادفی است. لگاریتم

تابع درستنمایی به صورت زیر است:

$$\log L(\beta, \sigma^2 | \mathbf{y}) = -\frac{N-M}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \sum_i \frac{n_i}{2} \log(\Delta^i) - \sum_{i,j} \frac{(y_j^i - y_{j-1}^i - \alpha \Delta_j^i)^2}{2\sigma^2 \Delta_j^i}$$

که آن را می‌توان به کمک رابطه (۱۸) و $\eta^2 \rightarrow \infty$ به دست آورد. لذا MLEها به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \hat{\alpha} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}, \\ \hat{\sigma}^2 &= SSQ_{\Delta}, \end{aligned} \tag{۲۰}$$

و واریانس‌های مجانبی به صورت $\text{Vâr}(\hat{\beta}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{MT} + \frac{\hat{\sigma}^4}{2(N-M)}$ و $\text{Vâr}(\hat{\sigma}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{2(N-M)}$ خواهند بود. در پایان مطالب ارائه شده با شبیه‌سازی کامپیوتری تایید می‌شوند. برای هر یک از مقادیر جدول ۵، ۱۰۰۰ مشاهده که از مدل (۱۷) شبیه‌سازی شده است را در نظر می‌گیریم. برای یک مدل بدون اثرهای آمیخته (مدل غلط) پارامترها توسط (۱۹) برآورد می‌شوند. نتایج در جداول ۶ و ۷ گزارش شده است که شامل فواصل اطمینان ۹۵٪ است و چندک‌های تجربی ۲.۵٪ و ۹۷.۵٪ برآوردگرها در پراکنش مشخص شده است.

جدول ۵: مقادیر شبیه‌سازی.

	β	σ^2	σ_{β}^2	M	n
۱	-۰,۰۲	۰,۰۲	۰,۰۲	۱۰	۵۰
۲	-۰,۰۲	۰,۲	۰,۰۲	۱۰	۵۰
۳	-۰,۰۲	۰,۰۲	۰,۲	۱۰	۵۰
۴	-۰,۰۲	۰,۰۲	۰,۰۲	۵۰	۱۰
۵	-۰,۰۲	۰,۲	۰,۰۲	۵۰	۱۰
۶	-۰,۰۲	۰,۰۲	۰,۲	۵۰	۱۰
۷	-۰,۲	۰,۰۲	۰,۰۲	۱۰	۵۰
۸	-۰,۲	۰,۲	۰,۰۲	۱۰	۵۰
۹	-۰,۲	۰,۲	۰,۲	۱۰	۵۰
۱۰	-۰,۲	۰,۲	۰,۰۲	۵۰	۱۰
۱۱	-۰,۲	۰,۲	۰,۰۲	۵۰	۱۰
۱۲	-۰,۲	۰,۲	۰,۲	۵۰	۱۰

جدول ۶: مقادیر برآورد نقطه‌ای (فاصله‌ای) پارامترها در مدل با اثرهای آمیخته (۲۰).

	$\hat{\beta}$	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\sigma}_{\beta}^2$
۱	-۰,۰۱ (-۰,۰۹, ۰,۰۶)	۰,۰۲ (۰,۰۱, ۰,۰۲)	۰,۰۱ (۰, ۰,۰۳)
۲	-۰,۰۱ (-۰,۰۹, ۰,۰۵)	۰,۲ (۰,۱۷, ۰,۲۲)	۰,۰۱ (۰, ۰,۰۳)
۳	-۰,۰۲ (-۰,۲۶, ۰,۲۱)	۰,۰۲ (۰,۰۱, ۰,۰۲)	۰,۱۷ (۰,۰۶, ۰,۳۱)
۴	-۰,۰۲ (-۰,۰۵, ۰,۰۱)	۰,۰۲ (۰,۰۱, ۰,۰۲)	۰,۰۲ (۰,۰۱, ۰,۰۲)
۵	-۰,۰۲ (-۰,۰۵, ۰,۰۱)	۰,۲ (۰,۱۷, ۰,۲۲)	۰,۰۲ (۰,۰۱, ۰,۰۲)
۶	-۰,۰۲ (-۰,۱۱, ۰,۰۸)	۰,۰۲ (۰,۰۱, ۰,۰۲)	۰,۱۹ (۰,۱۳, ۰,۲۶)
۷	-۰,۱۹ (-۰,۲۷, -۰,۱۲)	۰,۰۲ (۰,۰۱, ۰,۰۲)	۰,۰۱ (۰, ۰,۰۳)
۸	-۰,۱۹ (-۰,۲۸, -۰,۱۲)	۰,۲ (۰,۱۸, ۰,۲۲)	۰,۰۱ (۰, ۰,۰۳)
۹	-۰,۱۹ (-۰,۴۴, ۰,۰۲)	۰,۰۲ (۰,۰۱, ۰,۰۲)	۰,۱۷ (۰,۰۶, ۰,۳۳)
۱۰	-۰,۲ (-۰,۲۳, -۰,۱۶)	۰,۰۲ (۰,۰۱, ۰,۰۲)	۰,۰۲ (۰,۰۱, ۰,۰۲)
۱۱	-۰,۲ (-۰,۲۳, -۰,۱۶)	۰,۲ (۰,۱۷, ۰,۲۲)	۰,۰۲ (۰,۰۱, ۰,۰۲)
۱۲	-۰,۲ (-۰,۳, -۰,۰۹)	۰,۰۲ (۰,۰۱, ۰,۰۲)	۰,۱۹ (۰,۱۳, ۰,۲۶)

جدول ۷: مقادیر برآورد نقطه‌ای (فاصله‌ای) پارامترها در مدل اشتباه بدون اثرهای آمیخته (۱۹).

	$\hat{\beta}$	$\hat{\sigma}^2$
۱	۰ (-۰,۰۷, ۰,۰۷)	۰,۰۵ (۰,۰۳, ۰,۰۹)
۲	۰ (-۰,۰۸, ۰,۰۷)	۰,۲۳ (۰,۲, ۰,۲۷)
۳	۰,۱۵ (-۰,۰۸, ۰,۴)	۰,۳۸ (۰,۱۵, ۰,۶۶)
۴	۰,۰۸ (۰,۰۳, ۰,۱۴)	۰,۲۳ (۰,۱۶, ۰,۳۱)
۵	۰,۰۸ (۰,۰۳, ۰,۱۴)	۰,۴۱ (۰,۳۱, ۰,۵۱)
۶	۱,۰۷ (۰,۷۲, ۱,۴۵)	۲,۲ (۱,۵۴, ۲,۹۸)
۷	-۰,۱۸ (-۰,۲۶, -۰,۰۱)	۰,۰۵ (۰,۰۳, ۰,۰۸)
۸	-۰,۱۸ (-۰,۲۶, -۰,۰۱)	۰,۲۳ (۰,۲, ۰,۲۷)
۹	-۰,۰۲ (-۰,۲۹, ۰,۲۵)	۰,۳۷ (۰,۱۵, ۰,۷)
۱۰	-۰,۰۹ (-۰,۱۳, -۰,۰۴)	۰,۲۳ (۰,۱۷, ۰,۳۱)
۱۱	-۰,۰۹ (-۰,۱۴, -۰,۰۳)	۰,۴۱ (۰,۳۴, ۰,۴۹)
۱۲	۰,۸۸ (۰,۵۴, ۱,۲۷)	۲,۱۹ (۱,۵۱, ۲,۹)

مشاهده می‌شود که اگر یک مدل به اشتباه، اثرهای آمیخته را در نظر نگیرد، هر دوی β و σ^2 به خوبی برآورد نمی‌شوند. بنابراین در صورتی که اثرهای تصادفی در داده‌ها وجود داشته باشد باید این اثرات در مدل لحاظ گردد.

۶. مفصل ناوردای و کاربرد آن در SDE

مفصل یکی از راه‌های فرمول‌بندی ساختارهای وابستگی متغیرهای تصادفی است که در ساختن تصمیم‌های چند موضوعی [۱۰]، فضاهای متریک احتمالاتی [۱۴] و نظریه اندازه‌های تعمیم‌یافته و انتگرال [۱۹] کاربرد دارد. در این بخش به بررسی ناوردایی مفصل تحت تبدیلات یکنوا می‌پردازیم. همچنین از مفصل به عنوان ابزار مفیدی برای مدل‌بندی با فرایندهای انتشار و تعیین وابستگی پیاپی در این مدل‌ها بهره می‌جوییم. این ساختار در شاخه‌هایی نظیر قابلیت اعتماد [۲۳]، آمار [۱۱] و ریاضیات مالی [۳] کاربرد دارد.

تبدیلات فضا-زمان یکنوا برای نگاشتن یک فرایند انتشار به فرایند انتشار کولموگوروف ([۲۰]) مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای هر فرایند مارکوف X ، یک مفصل وجود دارد که متغیرهای تصادفی X_t و X_s را از طریق معادلات چمن-کولموگوروف ([۳۴]) پیوند می‌دهد.

تعریف ۱۰۶ ([۲۴]). یک عمل دوتایی $C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ را مفصل گویند هرگاه 1 عضو خنثی و 0 عضو همانی آن باشد، یعنی برای هر $u, v \in [0,1]$

$$C(u, 0) = 0, C(0, v) = 0, C(u, 1) = u, C(1, v) = v,$$

و برای هر $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$ که $x_1 \leq x_2$ و $y_1 \leq y_2$:

$$P_c([x_1, x_2] \times [y_1, y_2]) = C(x_1, y_1) + C(x_2, y_2) - C(x_1, y_2) - C(x_2, y_1) \geq 0.$$

هر مفصل یک توزیع توأم روی مربع واحد است. به راحتی می‌توان نشان داد برای هر بردار تصادفی (X, Y) مفصل C وجود دارد که برای هر $x, y \in S_X \times S_Y$:

$$F_{X,Y}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)), \quad (21)$$

که اگر (X, Y) پیوسته باشد، C یکتاست. برعکس اگر C یک مفصل باشد، تابع $F_{X,Y}(x, y)$ تعریف شده در (۲۱) یک تابع توزیع توأم با کناری‌های F_X و F_Y خواهد بود. بنابراین مفصل تابعی است که دو کناری را برای یافتن یک توزیع توأم به هم متصل می‌کند. متغیرهای تصادفی $U = F_X(X)$ و $V = F_Y(Y)$ را به ترتیب یکنواخت‌سازی شده متناظر با X و Y نامند. همچنین چگالی یک مفصل C را در صورت وجود مشتق به صورت $c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$ تعریف می‌کنند. چگالی‌های مفصل، یک تابع چگالی احتمال روی مربع یکه هستند. گزاره زیر به راحتی اثبات می‌شود.

گزاره ۱.۶. اگر $c_{X,Y}(u,v)$ چگالی مفصل بین X و Y و $\alpha(\cdot)$ و $\beta(\cdot)$ به ترتیب توابع یکنوا روی S_X و S_Y باشند، آن‌گاه $c_{\alpha(X),\beta(Y)}(u,v) = c_{X,Y}(u,v)$ اگر $\alpha(\cdot)$ و $\beta(\cdot)$ اکیداً صعودی باشند،
 $[۶] C_{\alpha(X),\beta(Y)}(u,v) = C_{X,Y}(u,v)$

به عنوان نتیجه‌ای از گزاره ۱.۶، در حالتی که (X,Y) پیوسته‌اند، F_X و F_Y هر دو اکیداً صعودی‌اند و در پی آن مفصل (X,Y) ، مفصل (U,V) نیز هست که نماینگر توزیع توأم (U,V) نیز هست، زیرا کناری‌ها روی فواصل واحد یکنواخت هستند. اگر $X_i, i=1,2$ دو متغیر تصادفی با کناری‌های F_i باشند [۶] داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = P(X_j \leq x_j | X_i \leq x_i), \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j.$$

در [۲۴] دو نوع دوگان معرفی شده است. برای هر مفصل C ، دوگان $\tilde{C}: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ به صورت

$$\tilde{C}(x, y) = x + y - C(x, y)$$

و هم-مفصل $C': [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ به صورت

$$C'(x, y) = 1 - C(1-x, 1-y)$$

تعریف می‌شود که دوگان \tilde{C} یا هم-مفصل C' لزوماً خود مفصل نیستند. با تعریف عمل دوتایی $\hat{C}: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ به صورت

$$\hat{C}(x, y) = x + y - 1 + C(1-x, 1-y)$$

روابط زیر همواره برقرار است:

$$\hat{C}(x, y) = x + y - C'(x, y),$$

$$\hat{C}(x, y) = 1 - \tilde{C}(1-x, 1-y).$$

به راحتی ثابت می‌شود \tilde{C} یک مفصل است و $\hat{C} = C$. با توجه به کاربردهای آن در قابلیت اعتماد، \hat{C} را مفصل بقا نیز نامند.

برای هر مفصل C و نقطه $(a,b) \in [0,1]^2$ ، مفصل $C_{a,b}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C_{a,b}(x, y) = P_c([a(1-x), x + a(1-x)] \times [b(1-y), y + b(1-y)]).$$

با این دیدگاه، $C_{0,0} = C$ ، $C_{1,1} = \hat{C}$ ، $C_{0,1}(x, y) = x - C(x, 1-y)$ و $C_{1,0}(x, y) = y - C(1-x, y)$ همچنین برای هر $i, j, k, l \in \{0,1\}$ و هر مفصل C داریم،

$$(C_{i,j})_{k,l} = C_{i \oplus k, j \oplus l} \quad (۲۲)$$

که $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$ ، $1 \oplus 1 = 0 \oplus 0 = 0$. برای مفصل‌های دلخواه C و D و هر $\lambda \in [0, 1]$ داریم،

$$(\lambda C + (1 - \lambda)D)_{i,j} = \lambda C_{i,j} + (1 - \lambda)D_{i,j}. \quad (23)$$

بعلاوه برای هر مفصل C و هر $(x, y) \in [0, 1]^2$ داریم، $C_{0,1}(x, y) = C_{1,0}(y, x)$.

مثال ۱.۶. مفصل $C_H : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ که برای هر $(x, y) \neq (0, 0)$ به صورت

$$C_H(x, y) = \frac{xy}{x+y-xy}$$

داده شده است را در نظر بگیرید که آن را ضرب هاماچر نامند. [14]

در این صورت برای $(x, y) \neq (0, 0)$ داریم:

$$(C_H)(x, y) = \frac{x^2(1-y)+y^2(1-x)+xy}{x+y-xy},$$

$$(C_H)'(x, y) = \frac{x+y-2xy}{1-xy},$$

$$(C_H)_{1,1}(x, y) = \frac{xy(2-x-y)}{1-xy},$$

$$(C_H)_{0,1}(x, y) = \frac{x^2y}{1-y+xy},$$

$$(C_H)_{1,0}(x, y) = \frac{xy^2}{1-x+xy}.$$

بسیاری از کاربردهای مفصل در آمار ناپارامتری از این حقیقت ناشی می‌شود که وقتی یک تبدیل اکیداً یکنوا روی متغیر تصادفی اعمال می‌شود، مفصل که توزیع کناری و توزیع توأم را به هم مرتبط می‌سازد، ناورداست.

قضیه ۱.۶. اگر X و Y به ترتیب متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع توزیع متناظر F_X و F_Y و مفصل متناظر C_{XY} و $\varphi, \psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ توابع اکیداً یکنوا باشند، آن‌گاه $C_{\varphi \circ X, \psi \circ Y}$ در حالتی که φ و ψ هر دو صعودی (نزولی) باشند، برابر با $(C_{XY})_{0,0}$ و در حالتی که φ (صعودی) و ψ نزولی (صعودی) باشد برابر با $(C_{XY})_{1,0}$ است و همچنین اگر متغیرهای تصادفی X و Y به ترتیب نسبت به مقادیر a و b متقارن باشند، یعنی $X - a = a - X$ و $Y - b = b - Y$ ، آن‌گاه بردار تصادفی (X, Y) نسبت به (a, b) متقارن است، یعنی

$$(X - a, Y - b) \stackrel{d}{=} (a - X, b - Y)$$

اگر و تنها اگر $C_{XY} = \hat{C}_{XY}$. [۲۴]

می‌خواهیم ناوردایی مفصل نسبت به عملگرهای \hat{C} ، $C_{0,1}$ و $C_{1,0}$ را تحقیق کنیم. به عبارت دیگر به دنبال مفصل C هستیم که $\hat{C} = C$ ، $C_{0,1} = C$ و $C_{1,0} = C$.

اگر \mathcal{C} نشان دهنده کلاس تمام مفصل‌ها و \mathcal{T} کلاس تمام مفصل‌های شرکت‌پذیر و \mathcal{S} کلاس تمام مفصل‌های جابه‌جایی (متقارن) و $\overline{\mathcal{T}}$ پوسته محدب \mathcal{T} باشد، می‌توان ثابت کرد، $\mathcal{T} \subset \overline{\mathcal{T}} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{C}$.

علاوه بر آن برای هر جفت $(i, j) \in \{0, 1\}^2$ ، اگر $\mathcal{C}_{i,j}$ کلاس تمام مفصل‌هایی باشد که تحت تبدیلات ناورداهستند، یعنی، $\mathcal{C}_{i,j} = \{C \in \mathcal{C} : C_{i,j} = C\}$ ، به وضوح، $\mathcal{C}_{0,0} = \mathcal{C}$.

قضیه ۲.۶. اگر $C \in \mathcal{C}$ یک مفصل باشد و $(i, j) \in \{0, 1\}^2$ ، آن‌گاه $C \in \mathcal{C}_{i,j}$ اگر و تنها اگر یک $D \in \mathcal{C}$ وجود داشته باشد به طوری که $D_{(i,j)} = C$ که در آن $D_{(i,j)} = \frac{D+D_{i,j}}{2}$.

اثبات: اگر یک $D \in \mathcal{C}$ وجود داشته باشد، آن‌گاه طبق (۲۲) و (۲۳) داریم:

$$C_{i,j} = \left(\frac{D+D_{i,j}}{2}\right)_{i,j} = \frac{D_{i,j}+D_{i \oplus j \oplus j}}{2} = \frac{D_{i,j}+D_{0,0}}{2} = C.$$

برعکس، اگر $C = C_{(i,j)}$ ، با قرار دادن $D = C$ داریم، $C = \frac{C+C_{i,j}}{2}$.

مثال ۲.۶. در ادامه مثال ۱.۶، مفصل C_H را در نظر بگیرید:

$$(C_H)_{i,j} = \frac{C_H+(C_H)_{i,j}}{2} \in \mathcal{C}_{i,j},$$

که در آن

$$(C_H)_{1,1}(x, y) = \frac{xy[2(1-xy)+(1-x)(1-y)(x+y-1)]}{2(1-xy)(x+y-xy)},$$

$$(C_H)_{0,1}(x, y) = \frac{xy(1-y+2xy+x^2-xy^2)}{2(x+y-xy)(1-y+xy)},$$

$$(C_H)_{1,0}(x, y) = \frac{xy(1-x+2xy+y^2-xy^2)}{2(x+y-xy)(1-y+xy)}.$$

در این حالت برای هر $C \in \mathcal{S}$ ، $\frac{C+C_{1,1}}{2} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{C}_{1,1}$.

اکنون قضیه اصلی این بخش که مشخص کننده ناوردایی نسبت به عملگرهای معرفی شده است را مطرح می‌کنیم.

قضیه ۳.۶. اگر C یک مفصل باشد، آن‌گاه، $C \in \mathcal{C}^* = C_{0,1} \cap C_{1,0} \cap C_{1,1}$ اگر و تنها اگر یک مفصل $D \in \mathcal{C}$ وجود

داشته باشد به طوری که $D^* = C$ که در آن $D^* = \frac{D+D_{0,1}+D_{1,0}+D_{1,1}}{4}$.

اثبات: شرط لازم واضح است. برای اثبات شرط کافی، طبق روابط (۲۲) و (۲۳) داریم:

$$\begin{aligned} (D^*)_{0,1} &= \left(\frac{D+D_{0,1}+D_{1,0}+D_{1,1}}{4}\right)_{0,1} = \frac{D_{0,1}+D_{0\oplus 0,1\oplus 1}+D_{1\oplus 0,0\oplus 1}+D_{1\oplus 0,1\oplus 1}}{4} = \frac{D_{0,1}+D_{0,0}+D_{1,1}+D_{1,0}}{4} = D^*, \\ (D^*)_{1,0} &= \left(\frac{D+D_{0,1}+D_{1,0}+D_{1,1}}{4}\right)_{1,0} = \frac{D_{1,0}+D_{0\oplus 1,1\oplus 0}+D_{1\oplus 1,0\oplus 0}+D_{1\oplus 1,1\oplus 0}}{4} = \frac{D_{1,0}+D_{1,1}+D_{0,0}+D_{0,1}}{4} = D^*, \\ (D^*)_{1,1} &= \left(\frac{D+D_{0,1}+D_{1,0}+D_{1,1}}{4}\right)_{1,1} = \frac{D_{1,1}+D_{0\oplus 1,1\oplus 1}+D_{1\oplus 1,0\oplus 1}+D_{1\oplus 1,1\oplus 1}}{4} = \frac{D_{1,1}+D_{1,0}+D_{0,1}+D_{0,0}}{4} = D^* \end{aligned}$$

و در این صورت اثبات کامل می‌شود.

در ادامه بخش کاربرد مفصل ناوردا در فرایندهای انتشار مطرح می‌شود.

بردار تصادفی با مقادیر حقیقی (X, Y) را در نظر بگیرید که در آن $S_X = [l_Y, u_Y]$ و $S_X = [l_X, u_X]$ به ترتیب تکیه‌گاه‌های متغیرهای تصادفی X و Y هستند. در این بخش تنها فرایندهای مارکوف مورد تحلیل قرار می‌گیرند که در این فرایندها خواص فرایند در هر زمان دلخواه t به شرط این که حالت فرایند در زمان $s < t$ باشد، مستقل از حالت در هر زمان $r < s$ است. اگر $\{X_t\}_{t \in [t_0, T]}$ یک فرایند انتشار یک‌بعدی باشد که مقادیر خود را در بازه (l, u) اختیار می‌کند و $-\infty \leq l < u \leq \infty$ ، در این صورت مسیره‌های نمونه‌ای آن‌ها برای هر $t_0 \leq t < T$ جواب SDE زیر هستند

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t, \quad X_{t_0} = x_0. \quad (24)$$

در اینجا T اولین زمان خروج از I و $W_t = \{W_t\}_{t \geq t_0}$ فرایند وینر استاندارد هستند. فرض کنید شرایط نظم برای ضریب رانش $\mu(x, t)$ و ضریب انتشار $\sigma(x, t)$ برقرار است که این شرایط یکتایی جواب را تضمین می‌کند.

توزیع انتقال X یعنی $F_{t|s}(x|y) = P(X_t < x | X_s = y)$ و چگالی انتقال آن یعنی

$$f_{t|s}(x|y) = \frac{\partial F_{t|s}(x|y)}{\partial x}$$

که $s < t$ را در نظر بگیرید که تابع اخیر جواب یکتای معادله پسروری کولموگوروف یعنی

$$\frac{\partial p}{\partial s} + \mu(y, s) \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\sigma^2(y, s)}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0$$

است که

$$\lim_{s \uparrow t} p(x, t | y, s) = \delta(x - y)$$

و $\delta(\cdot)$ دلتای دیراک است. همچنین تابع f در معادله فوکر-پلانک

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\mu(x, t)p] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2(x, t)p] = 0$$

صدق می‌کند.

برای زمان‌های ثابت $t > s > t_0$ که X_t و X_s متغیرهای تصادفی پیوسته هستند، به جای تحقیق ساختارهای وابستگی از مفصل استفاده می‌کنیم. مفصل فرایندهای مارکوف در [۶] بررسی شده است که در این بخش برای حالتی که

فرایند مارکوف به صورت انتشار است مسئله بررسی می‌گردد. اگر $F_{s,t}(x,y) = P(X_s \leq x, X_t \leq y)$ توزیع توأم X_s و X_t باشد، مفصل بین X_s و X_t در $(u,v) \in [0,1]^2$ به صورت $C_{s,t}(u,v) = F_{s,t}[F_s^{-1}(u), F_t^{-1}(v)]$ است که چگالی مفصل متناظر به صورت

$$\begin{aligned} c_{s,t}(u,v) &= \frac{f_{s,t}(F_s^{-1}(u), F_t^{-1}(v))}{f_s(F_s^{-1}(u))f_t(F_t^{-1}(v))} \\ &= \frac{f_{t|s}(F_t^{-1}(v)|F_s^{-1}(u))}{f_t(F_t^{-1}(v))} \end{aligned}$$

خواهد بود که در آن $C_{s,t}(u,v) = \int_0^v \int_0^u c_{s,t}(w,z) dw dz$ تابع انتقال یکنواخت‌سازی شده یک فرایند انتشار $\{X_t\}_{t>t_0}$ بین زمان‌های s و t ، به صورت

$$C_{t|s}(v|u) = \frac{\partial}{\partial u} C_{s,t}(u,v) = \int_0^v c_{s,t}(u,z) dz,$$

تعریف می‌شود. برای فرایند انتشار $\{X_t\}_{t>t_0}$ و زمان اولیه $t_1 > t_0$ فرایند یکنواخت‌سازی شده متناظر با X یعنی $\{\tilde{X}_t\}_{t>t_1}$ را برای هر $t \geq t_1 > t_0$ به صورت $\tilde{X}_t = F_t(X_t)$ تعریف می‌کنند. بنابراین برای هر $s, t \geq t_1$:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{s,t}(u,v) &= P(\tilde{X}_s \leq u, \tilde{X}_t \leq v) \\ &= P(X_s \leq F_s^{-1}(u), X_t \leq F_t^{-1}(v)) \\ &= F_{s,t}[F_s^{-1}(u), F_t^{-1}(v)] \\ &= C_{s,t}(u,v) \end{aligned}$$

که در این حالت توزیع احتمال توأم $(\tilde{X}_s, \tilde{X}_t)$ بر مفصل (X_s, X_t) منطبق است و همچنین توزیع احتمال انتقال متناظر برای هر $u, v \in [0,1]$ و $t \geq s \geq t_1 > t_0$ برابر است با:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{t|s}(v|u) &= P(\tilde{X}_s \leq u | \tilde{X}_t = v) \\ &= P(X_s \leq F_s^{-1}(u) | X_t = F_t^{-1}(v)) \\ &= C_{t|s}(v|u) \end{aligned}$$

و از این رو X و \tilde{X} توابع مفصل یکسانی دارند. به طور مشابه تابع چگالی انتقال $\tilde{f}_{t|s}(v|u)$ برای فرایند یکنواخت‌سازی شده \tilde{X} با چگالی مفصل توأم $c_{s,t}(u,v)$ منطبق است، یعنی برای هر $(u,v) \in [0,1]^2$ و $t \geq s \geq t_1 > t_0$ داریم:

$$\tilde{f}_{t|s}(v|u) = c_{s,t}(u,v) = \frac{f_{t|s}(F_t^{-1}(v)|F_s^{-1}(u))}{f_t(F_t^{-1}(v))}. \quad (25)$$

قضیه ۴.۶. اگر معادله (۲۳) دارای جواب یکتای $\{X_t\}_{t \geq t_0}$ باشد، فرایند $\{\tilde{X}_t\}_{t \geq t_1}$ متناظر یک فرایند انتشار ایتو با مقدار اولیه $\tilde{X}_{t_1} = F_{t_1}(X_{t_1})$ با توزیع یکنواخت است و

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(u, s) &= \frac{\partial F_s(x)}{\partial s} \Big|_{x=F_s^{-1}(u)} + \mu(F_s^{-1}(u), s) f_s(F_s^{-1}(u)) + \frac{1}{2} \sigma^2(F_s^{-1}(u), s) f_s'(F_s^{-1}(u)), \\ \tilde{\sigma}(u, s) &= \sigma(F_s^{-1}(u), s) f_s(F_s^{-1}(u), s)\end{aligned}$$

$$f_s'(x) = \frac{\partial f_s(x)}{\partial x} = \frac{\partial^2 F_s(x)}{\partial x^2}$$

اثبات: برای هر $t \geq t_1 \geq t_0$ طبق فرمول ایتو:

$$\begin{aligned}dF_t(X_t) &= \left[\frac{\partial F_t(X_t)}{\partial t} + \mu(X_t, t) f_t(X_t) + \frac{1}{2} \sigma^2(X_t, t) f_t'(X_t) \right] dt \\ &\quad + \sigma(X_t, t) f_t(X_t) dW_t\end{aligned}$$

که در آن $f_t'(X_t, t) = \frac{\partial f_t(x)}{\partial x} \Big|_{x=X_t}$ با جایگذاری $X_t = F_t^{-1}(\tilde{X}_t)$ در معادله بالا حکم اثبات می‌شود.

تبدیلات فضا-زمان یکنوای

$$\begin{cases} y = \Psi(t, x), \\ \tau = \Phi(t), \end{cases} \quad (26)$$

را در نظر بگیرید که ژاکوبی برای هر $x \in I$ ، $J(t, x) = \frac{\partial \Psi(t, x)}{\partial x} > 0$ و $\Phi(t)$ غیر نزولی است. اگر تبدیل وارون‌پذیر

متناظر با دو فرایند انتشار X_t و $Y_{\Phi(t)} = \Psi(t, X_t)$ و تابع چگالی انتقال X_t معلوم باشد، $f_{\tau|t_0}^Y(y | y_0) = \frac{f_{t_0}^X(x|x_0)}{J(t, x)}$

قضیه ۵.۶. یک فرایند انتشار X می‌تواند با استفاده از تبدیلات فضا-زمان یکنوای (۲۶) به یک فرایند انتشار Y تبدیل شود اگر و تنها اگر چگالی مفصل یکسانی داشته باشند (با در نظر گرفتن تبدیل زمان)، یعنی برای هر $t_0 < s < t$ و $u, v \in [0, 1]$

$$c_{s,t}^X(u, v) = c_{\Phi(s), \Phi(t)}^Y(u, v). \quad (27)$$

اثبات: برای توابع تبدیل یکنوا از X به Y طبق (۲۶) نتیجه گرفته می‌شود. برعکس اگر (۲۷) برقرار باشد، دو فرایند یکنواخت‌سازی شده $\tilde{X}_t = F_t^X(X_t)$ و $\tilde{Y}(t_1) = F_{\Phi(t)}^Y(Y_t)$ تابع چگالی انتقال یکسانی دارند و با به‌کارگیری

\tilde{X}_t ، فرایندی هم‌توزیع با $Y_{\Phi(t)}$ حاصل می‌شود. از این رو تبدیلات فضا-زمان یکنوای $[F_{\Phi(t)}^Y(\cdot)]^{-1}$

$$\begin{cases} y = [F_{\Phi(t)}^Y]^{-1} F_t^X(x), \\ \tau = \Phi(t), \end{cases}$$

X_t را به Y_τ می‌نگارد.

به عنوان کاربردی از قضیه ۵.۶، می‌توان به کمک مفصل و تبدیلات، مدل‌سازی کرد. در این چارچوب، طراحی یک مدل انتشار به دو مرحله نیاز دارد. اولین مرحله انتخاب مفصل‌های یک فرایند انتشار (صرف‌نظر از چگالی‌های حاشیه‌ای آن) و

دومین مرحله انتخاب چگالی‌های حاشیه‌ای است. انتخاب توزیع‌های حاشیه‌ای جدید نیز مطابق با پدیده‌هایی که باید مدل شود انجام می‌شود. هر توزیع کناری پیوسته $F_t^Z(x)$ توسط تبدیل $F_t^X(X_t)$ $Z_t = [F_t^Z]^{-1}(F_t^X(X_t))$ بدون تغییر در مفصل فرایند تحمیل می‌شود. اوقاتی که تابع چگالی انتقال به صورت صریح معلوم است، می‌توان با تبدیل مسیره‌های نمونه‌ای Z به X ، آنها را شبیه‌سازی کرد. علاوه بر این، پارامترهای Z را می‌توان به روش MLE برآورد کرد. با توجه به این که فرایند وینر یک فرایند انتشار روی \mathbb{R} است، چگالی مفصل مطابق با رابطه (۲۵) برابر است با

$$c_{t|s}(v|u) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t-s}} \frac{\varphi\left(\frac{\sqrt{t}\Phi^{-1}(v) - \sqrt{s}\Phi^{-1}(u)}{\sqrt{t-s}}\right)}{\varphi(\Phi^{-1}(v))}.$$

شرط لازم و کافی برای آن که فرایند جواب SDE ارائه شده در (۲۴) قابل تبدیل به فرایند وینر باشد آن است که ضریب رانش $\mu(.,.)$ و ضریب انتشار $\sigma(.,.)$ در رابطه زیر صدق کند:

$$\frac{\mu(x,t)}{\sigma(x,t)} = \frac{\sigma_x(x,t)}{2} + \int \frac{\sigma_t(x,t)}{\sigma^2(x,t)} dx + c_1(t) \int \frac{dx}{\sigma(x,t)} + c_2(t)$$

که در آن $c_1(t)$ و $c_2(t)$ توابع دلخواه از زمان هستند. با برقراری شرط اخیر، تبدیلات فضا-زمان یکنوای (۲۶) داریم:

$$\Phi(t) = \int_{t_1}^t e^{-2\int_{t_0}^r c_1(s)ds} dr,$$

$$\Psi(t,x) = \sqrt{\Phi'(t)} \int_{x_0}^x \frac{dy}{\sigma(y,t)} + \int_{t_2}^t c_2(s) \sqrt{\Phi'(s)} ds$$

که در آن x_0, t_0, t_1 و t_2 ثابت‌های دلخواه هستند.

حرکت براونی با رانش $B_t = \mu t + \sigma W_t$ و حرکت براونی هندسی $Z_t = e^{B_t} = e^{\mu t + \sigma W_t}$ هر دو از تبدیلات یکنوای حرکت براونی W_t ناشی می‌شوند، با این تفاوت که در تبدیلی که W_t را به B_t می‌نگارد، دامنه حفظ می‌شود، ولی در تبدیلی که W_t را به Z_t می‌نگارد، دامنه به $(0, \infty)$ تغییر می‌کند. در ضمن هر دو تبدیل اخیر دارای چگالی مفصل گاوسی مشابه با حرکت براونی هستند. نکته مهم این است که چگالی مفصل به پارامترهای رانش و انتشار، یعنی به ترتیب پارامترهای μ و σ وابسته نیست.

مثال ۳.۶. فرایند اورنشتاین-ولنبرگ X_t ، جواب SDE به صورت

$$dX_t = (-\alpha X_t + \beta) dt + \sigma dW_t$$

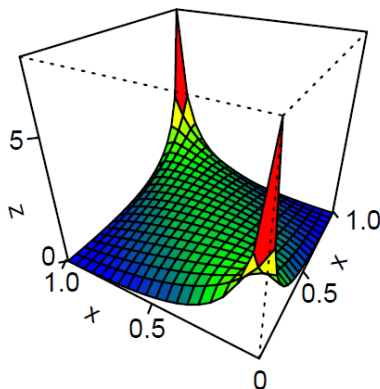
است که W_t حرکت براونی استاندارد و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ است. فرایند برای $\alpha > 0$ دارای تابع چگالی احتمال انتقال گاوسی مانا با میانگین $\frac{\beta}{\alpha}$ و واریانس $\frac{\sigma^2}{2\alpha}$ است. در این مدل برآورد حداکثر درست‌نمایی پارامترها برابر است با:

$$\hat{\alpha} = \frac{-1}{\Lambda} \log \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_{i-1} X_i}{\sum_{i=1}^n X_{i-1}^2} \right), \quad \hat{\beta} = \frac{2\hat{\alpha}}{n(1-e^{-2\Delta\hat{\alpha}})} \sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1} e^{-\Delta\hat{\alpha}})^2$$

که برای زمانی که $\sum_{i=1}^n X_{i-1} X_i > 0$ تعریف شده است. در [۲۹] ثابت می‌شود $\hat{\alpha}$ ، سازگار و مجاناً نرمال است. نظر به این که تبدیلات فضا-زمان یکنوای (۲۶) با $\Phi(t) = \frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha}$ و $\Psi(t, x) = \frac{e^{2\alpha t}}{\sigma} \left(x - \frac{\beta}{\alpha} \right)$ ، فرایند تصادفی X_t را به یک حرکت براونی می‌نگارد، با استفاده از رابطه (۲۶) در قضیه ۵.۶، چگالی مفصل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$c_{t|s}^{OU}(v|u) = \frac{\frac{\sqrt{e^{-2\alpha t} - 1}}{\sqrt{e^{-2\alpha t} - e^{-2\alpha s}}}}{\varphi(\Phi^{-1}(v))} \frac{\varphi\left(\frac{(\sqrt{e^{-2\alpha t} - 1})\Phi^{-1}(v) - (\sqrt{e^{-2\alpha s} - 1})\Phi^{-1}(u)}{\sqrt{e^{-2\alpha t} - e^{-2\alpha s}}}\right)}{\varphi(\Phi^{-1}(v))}.$$

در شکل ۳ چگالی مفصل به ازای پارامترهای $\alpha = 0.1$ ، $t = 30.5$ ، $t = 30$ و $x_0 = 10$ رسم شده است.



شکل ۳: چگالی مفصل در مثال ۳.۶.

مثال ۴.۶. با تبدیل $R_t = |W_t|$ به روی حرکت براونی W_t ، حرکت براونی انعکاس یافته حاصل می‌شود. با استفاده از قضیه ۵.۶، چگالی مفصل برابر است با

$$c_{t|s}^{RB}(v|u) = \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{t-s}} \left[\frac{\varphi\left(\frac{\sqrt{t}\Phi^{-1}(v) - \sqrt{s}\Phi^{-1}(u)}{\sqrt{t-s}}\right)}{\varphi(\Phi^{-1}(v))} + \frac{\varphi\left(\frac{\sqrt{t}\Phi^{-1}(v) + \sqrt{s}\Phi^{-1}(u)}{\sqrt{t-s}}\right)}{\varphi(\Phi^{-1}(v))} \right] \quad (28)$$

که آمیخته‌ای از مفصل‌های گاوسی است. فرایند X_t ، با SDE به صورت

$$dX_t = \left(-\alpha X_t + \frac{\sigma^2}{4}\right)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t \quad (29)$$

را در نظر بگیرید. تبدیلات فضا-زمان غیریکنوای (۲۶) با $\Phi(t) = \frac{\log(\alpha t + 1)}{\alpha}$ و $\Psi(t, x) = \frac{\sigma^2 x^2}{4(\alpha t + 1)}$ حرکت براونی W_t را به جواب X_t از معادله (۲۹) می‌نگارد. تبدیل مشابه روی حرکت براونی انعکاس یافته R_t ، یکنوا خواهد بود. در این حالت چگالی مفصل برای X_t توسط یک تبدیل زمان روی چگالی مفصل R_t به صورت $c_{s,t}^{RB}(u, v) = c_{\Phi(s), \Phi(t)}(u, v)$ محاسبه می‌شود که دوباره آمیخته‌ای از مفصل‌های گاوسی است.

۷. نتیجه‌گیری

در این مقاله برخی روش‌های برآورد آماری برای مدل‌های SDE مورد بررسی قرار گرفت. ابتدا روش‌های شبه درست‌نمایی برای برآورد پارامترهای یک SDE مطرح شده و کاربردی از این روش در انتخاب مدل آماری توسط AIC ارائه شد. سپس یک تعمیم ناهمگن بر اساس معادلات کولموگوروف و ایتو از فرایند تصادفی انتشار گومبرتز و استنباط‌های آماری نظیر برآورد پارامترها توسط روش حداکثر درست‌نمایی و فاصله اطمینان پارامترها انجام شد.

روش خطی‌سازی موضعی، SDEهای غیرخطی را توسط SDEهای خطی تقریب زده و در نهایت پارامترهای SDE غیرخطی توسط روش حداکثر درست‌نمایی برآورد می‌شوند.

در این مقاله تکنیک‌های اثرهای تصادفی برای برآورد پارامترهای مدل‌های SDE به کار گرفته شد. زمانی که مشاهدات کمی از جامعه انسانی یا حیوانی جمع‌آوری شده باشند، استفاده از مدل‌های با اثرهای تصادفی یا مدل‌های با اثرهای آمیخته ضروری است. متأسفانه در بیشتر موارد یک حالت صریح برای تابع درست‌نمایی وجود ندارد، زیرا چگالی‌های انتقال معلوم نیستند. در این گونه موارد تابع درست‌نمایی به صورت عددی تقریب زده می‌شود و در پی آن این تابع بهینه می‌شود.

مدل‌های SDE شبیه مدل‌های سری زمانی به زمان وابسته هستند با این تفاوت که در مدل‌های سری زمانی متغیر و تأخیرهایش در نظر گرفته می‌شود، ولی در SDE، متغیر به همراه مشتق‌های آن حساب می‌شود. در این مقاله به منظور برآورد پارامترهای SDE، جواب به صورت یک سری زمانی نوشته شده و از طریق روش‌های آماری پارامترهای مدل برآورد شدند.

References

- [1] A. R. Bergstrom, Continuous Time Econometric Modelling, Oxford, 1991.
- [2] R. H. Cameron and W.T. Martin, Transformation of Wiener integrals under translations, Annals of Mathematics, **45** (1944), 386-396.
- [3] U. Cherubini, E. Luciano and W. Vecchiato, Copula methods in finance, Wiley Finance Series. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2004.
- [4] J. C. Cox, J. E. Ingersoll, and S. A. Ross, A theory of the term structure of interest rates, Econometrica, **53**(2) (1985), 385-407.

- [5] C. A. Cuenod, B. Favetto, V. Genon-Catalot, Y. Rozenholcc and A. Samson, Parameter estimation and change-point detection from Dynamic Contrast Enhanced MRI data using stochastic differential equations, *Mathematical biosciences*, **233**(1) (2011), 68-76.
- [6] W. F. Darsow, B. Nguyen and E. T. Olsen, Copulas and Markov processes, *Illinois Journal of Mathematics*, **36** (1992), 600-642.
- [7] P. J. Diggle, P. Heagerty, K.Y. Liang and S. L. Zeger, *Analysis of Longitudinal Data*, Oxford University Press, 2nd edition, 2002.
- [8] S. Ditlevsen and M. Sorensen, Inference for observations of integrated diffusion processes, *Scand. J. Statist.*, **31** (2004), 417-429.
- [9] S. Donnet and A. Samson, A review on estimation of stochastic differential equations for pharmacokinetic/pharmacodynamic models, *Advanced drug delivery reviews*, **65** (7) (2013), 929-939.
- [10] J. C. Fodor and M. Roubens, *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [11] M. T. Giraud, L. Sacerdote and R. Sirovich, Nonparametric estimation of mutual information through the entropy of the linkage, *Entropy*, **15** (2013), 5154-5177.
- [12] J. Golecand G. Ladde, Euler-type approximation for systems of stochastic differential equations, *Journal of Applied Mathematics and Simulation*, **2** (1989), 239-249.
- [13] R. Gutiérrez-Sánchez, A. Nafidi, A. Pascual and E. Ramos-Ábalos, Tree parameter gamma-type growth curve, using a stochastic gamma diffusion model: Computational statistical aspects and simulation, *Mathematics and Computers in Simulation* **82** (2011), 234-243.
- [14] O. Hadzic and E. Pap, *Fixed Point Theory in Probabilistic Metric Spaces*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.
- [15] K. Ito, Stochastic integral, *Proc. Imperial Acad, Tokyo*, **20** (1944), 519-554.
- [16] P. Jackel, *Monte Carlo Methods in Finance*, John Wiley and Sons, Trowbridge, 2002.
- [17] A. H. Jazwinski, *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press, New York, 1970.
- [18] M. Kessler, Estimation of an ergodic diffusion Processes from discret observations, *Scand. J. Statist.*, **24** (1997), 211-229.
- [19] E. P. Klement, R. Mesiar and E. Pap, *Triangular Norms*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
- [20] A.N. Kolmogorov, On analytical methods in probability theory, In *Selected Works of A. N. Kolmogorov*. ed. A. N. Shirayev, of *Mathematics and Its Applications (Soviet Series)*. Springer Netherlands, (1992), 62-108.
- [21] P. Lansky, V. Lanska and M. Weiss, A stochastic differential equation model for drug dissolution and its parameters, *J. Controlled Release*, **100** (2004), 267-274.
- [22] L. Mushunje and M. Mashasha, Application of the Extended Gompertz Model in Analyzing Insurance Growth, *Journal of Advanced Studies in Finance*, **21** (2020), 9-17.
- [23] J. Navarro and F. Spizzichino, Comparisons of series and parallel systems with components sharing the same copula, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **26** (2010), 775-791.
- [24] R. B. Nelsen, *An Introduction to Copulas*, volume 139 of *Lecture Notes in Statistics*, Springer, New York, 1999.
- [25] B. Oksendal, *Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications*, Springer-Verlag, New York, 6th edition, 2003.
- [26] M. M. Olama, S. M., Djouadi and C. D. Charalambous, Stochastic differential equations for modeling, estimation and identification of mobile-to-mobile communication channels, *IEEE Transactions on Wireless Communications*, **8**(4) (2009), 1754-1763.

- [27] R.V. Overgaard, N. Jonsson, C. W. Tornøe and H. Madsen, Non-linear mixed-effects models with stochastic differential equations. Implementation of an estimation algorithm, *Journal of Pharmacokinetics and Pharmacodynamics*, **32** (2005), 85-107.
- [28] T. Ozaki, A bridge between nonlinear time series models and nonlinear Stochastic dynamical systems: A local linearization approach, *Statistica Sinica*, **2** (1992), 25-83.
- [29] A. R. Pedersen, A new approach to maximum likelihood estimation for stochastic differential equations based on discrete observations, *Scand. J. Stat.*, **22** (1995), 55-71.
- [30] J. C. Pinheiro and D. M. Bates, *Mixed-Effects Models in S and S-PLUS*", Springer-Verlag, New York, 2000.
- [31] Prajneshu and H. Ghosh, Stochastic Differential Equation Models and their Applications to Agriculture: An Overview, *Statistics and Applications*, **17**(1) (2019), 73-83.
- [32] L. M. Ricciardi, On the transformation of diffusion processes into the Wiener processes, *J. of Math. Anal. and Appl.* **54** (1976), 185-99.
- [33] L. M. Ricciardi, Diffusion processes and related topics in Biology, *Lecture Notes in Biomathematics*, 14, 1977.
- [34] S. M. Ross, *Introduction to Probability Models*, 12th Edition. Academic Press, 2019.
- [35] S. Roy and M. A. S. Adnan, Wrapped generalized Gompertz distribution: An application to Ornithology, *Journal of Biometrics & Biostatistics* **3**(6) (2012), 153-156.
- [36] P. Santa-Clara, Simulated likelihood estimation of diffusion with application to the short term interest rate, Anderson Graduate School of Management, University of California at Los Angeles, 1995.
- [37] L. Shoji, T. Ozaki, Comparative study of estimation methods for continuous time Stochastic Processes, *J. Time Ser. Anal.*, **18** (1997), 485-506.
- [38] L. Shoji and T. Ozaki, Estimation for nonlinear Stochastic differential equations by a local linearization method, *Stochastic Analysis and Applications*, **16** (1998), 733-752.
- [39] I. Shoji and T. Ozaki, A statistical method of estimation and simulation for systems of stochastic differential equations, *Biometrika*, **85**(1) (1998), 240-243.
- [40] H. Singer, Continuous-time dynamical systems with sampled data, errors of measurement and unobserved components, *Journal of Time Series Analysis*, **14** (1993), 527-545.
- [41] H. Singer, Simulated Maximum Likelihood in Nonlinear Continuous-Discrete State Space Models: Importance Sampling by Approximate Smoothing, *Computational Statistics*, **18**(1) (2003), 79-106.
- [42] W. Y. Tan, W. Ke and G. Webb, A stochastic and state space model for tumour growth and applications, *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, **10**(2) (2009), 117-138.
- [43] M. Uchida and N. Yoshida, AIC for ergodic diffusion Processes from discrete observations, Faculty of mathematics Kynshn University, Fucuoka, Japan, 2005.
- [44] O. Vasicek, An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of financial economics*, **5**(2) (1977), 177-188.
- [45] Z. Wang, *Stochastic Differential Equations: Simulation, Parameter Estimation and Applications*, thesis supervised by Prof Andrew Wood and Prof Ross Maller, Australian National University, 2021.
- [46] F. R. Yan, P. Zhang, J.L. Liu, Y. X. Tao, X. Lin, T. Lu and J. G. Lin, Parameter estimation of population pharmacokinetic models with stochastic differential equations: Implementation of an estimation algorithm, *Journal of Probability and Statistics*, Article ID: **836518** (2014), 1-8.
- [47] J. Yu and M. F. Hyland, A generalized diffusion model for preference and response time: Application to ordering mobility-on-demand services, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, **121** (2020), 1-41.