Kharazmi University

Mathematical Researches

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Non-Abelian Categories of Cofinite Modules

Gholamreza Pirmohammadi

Payame Noor University 19395-3697 Tehran, Iran.. E-mail: gh_ pirmohammadi@pnu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 17 February 2024
Received in revised form:
29 July 2024
Accepted: 20 August 2024
Published online:
28 February 2025

Keywords:
Coffinite module,
Local cohomology,
Noetherian Local ring,
System of parameters.

ABSTRACT

Introduction

Throughout this paper, let R denote a commutative Noetherian ring (with identity) and I be an ideal of R. For an R-module M, the ith local cohomology module of M with support in V (I) is defined as:

$$H_I^i(M) = \lim_{n\in\mathbb{N}} Ext_R^i\left(\frac{R}{I^n}, M\right)$$

Recall that for an R-module W its cohomological dimension with respect to a, denoted by $cd(I,W)$, is defined as:

$$cd(I,W) = \sup\left\{i \in \mathbb{N}_0 \,\middle|\, H_I^i(W) \neq 0\right\}$$

Also

$$q(I,W) = \sup\left\{i \in \mathbb{N}_0 \,\middle|\, H_I^i(W) \text{ is not Artinian}\right\}$$

These two notions have been studied by several authors; see e.g. [1, 3, 12, 16, 17]. Hartshorne in [15] defined an R-module M to be I-cofinite, if Supp M $\subseteq$ V (I) and $Ext_R^i\left(\frac{R}{I^n}, M\right)$ is a finitely generated R-module for each integer i $\geq$ 0. Then he posed the following question:

Question 1: Whether the category $\phi(R,I)_{cof}$ of I-cofinite modules is an Abelian subcategory of the category of all R-modules? That is, if $f: M \to N$ is an R-homomorphism of I-cofinite modules, are ker f and cokerf I-cofinite? In the sequel, the notation $\phi(R,I)_{cof}$ denotes the category of all a-cofinite R-modules and the notation Φ(R) denote the set of all ideals a of R such that $\phi(R,I)_{cof}$ is Abelian subcategory of Φ(R). Hartshorne with an example showed that the question 1 is not true in general. However, it is known that this question has an affirmative answer in many situations. For example it is well known that if a is an ideal of a Noetherian ring R with $q(I,R) \leq 1$ or dim $dimR/I \leq 1$, then the answer to this question is yes (see [1, 4, 5, 3, 7, 10, 9, 15, 18, 19, 21, 23]).

Material and Methods

Suppose that (R, m) is a Noetherian complete local ring of dimension d $\geq$ 4. Let 2 $\leq$ k $\leq$ d−2 be an integer and assume that $a_1, \ldots, a_k$ is a part of a system of parameters for R. In this paper, we prove that $(a_1, \ldots, a_k) \notin \Phi(R)$.

Results and discussion

We consider the following results:

1) Let (R, m) be a Noetherian local catenary ring of dimension d ≥ 4. Let 2 ≤ k ≤ d−2 be an integer and assume that $a_1, \dots, a_k$ is a part of a system of parameters for R. Then there is an element p ∈ Spec R such that dim R/ p = 4, $a_1, \dots, a_{k-2} \in p$, $a_k + p, a_{k-1} + p$ is a part of a system of parameters for R/ p and cd((I + p)/ p, R/ p) = height (I + p)/ p = dim R/(I + p) = 2, where I = $(a_1, \dots, a_k)$R.
2) Suppose that (R, m) is a Noetherian complete local ring of dimension d ≥ 4. Let 2 ≤ k ≤ d − 2 be an integer and assume that $a_1, \dots, a_k$ is a part of a system of parameters for R. Then $(a_1, \dots, a_k) \notin \Phi(R)$.

Conclusion

In this paper, it is shown that the category of all $(a_1, \dots, a_k)$R-cofinite modules is not an Abelian category.

How to cite: Pirmohammadi, Gholamreza. (2024). Non-Abelian categories of cofinite modules. *Mathematical Researches*, **10** (4), 33 – 39.

© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

پژوهش‌های ریاضی
شاپا چاپی: ۲۵۸۸-۲۵٤٦
شاپا الکترونیکی: ۲۵۸۸-۲۵٥٤
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

رسته‌های غیرآبلی از مدول‌های هم‌متناهی

غلامرضا پیرمحمدی

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. رایانامه: gh_ pirmohammadi@pnu.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۱/۲۸
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۵/۸
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۵/۳۰
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۱۲/۱۰

واژه‌های کلیدی:
مدول هم متناهی،
کوهمولوژی موضعی،
حلقه موضعی نوتری،
دستگاه پارامتری،

چکیده

فرض کنید (R,m) یک حلقه موضعی نوتری کامل از بعد $d \geq 4$ باشد. فرض کنید $2 \leq k \leq d-2$ یک عدد صحیح و $a_1, \dots, a_k$ قسمتی از دستگاه پارامتری برای R باشد. در این مقاله نشان داده شده است که رسته‌ی تمام R- مدول های $(a_1, \dots, a_k)$- هم متناهی رسته آبلی نیست.

استناد: نام خانوادگی، غلامرضا؛ پیرمحمدی، (۱۴۰۳). رسته‌های غیرآبلی از مدول‌های هم‌متناهی، *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۰** (۴)، ۳۳ – ۳۹.

ناشر: دانشگاه خوارزمی
© نویسندگان.

مقدمه

در سراسر این مقاله، R یک حلقه جابه‌جایی و نوتری با عضو همانی غیرصفر و I ایده آلی از آن می‌باشد. برای R- مدول M، i-امین مدول کوهمولوژی موضعی از M نسبت به ایده آل I را با نماد $H_I^i(M)$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می شود:

$$H_I^i(M) = \lim_{n\in \mathbb{N}} Ext_R^i\left(\frac{R}{I^n}, M\right)$$

برای مطالعه بیشتر خواص مدول های کوهمولوژی موضعی، خواننده را به منابع [۸] یا [۱۴] ارجاع می‌دهیم. در ابتدا یادآوری می‌کنیم که برای R -مدول W، بعد کوهمولوژیکی آن را نسبت به ایده آل I با نماد$cd(I,W)$ نشان داده و عبارتست از

$$cd(I,W) = \sup\left\{i \in \mathbb{N}_0 \,\middle|\, H_I^i(W) \neq 0\right\}$$

حال فرض کنید

$$q(I,W) = \sup\left\{i \in \mathbb{N}_0 \,\middle|\, H_I^i(W) \text{ آرتینی نیست}\right\}$$

این دو نمادی که در بالا معرفی شدند توسط ریاضی دانان زیادی مورد مطالعه قرار گرفته شده است که از جمله می توان به منابع [1,3,12,16,17] اشاره نمود. هارتشورن در منبع [۱۵]، R- مدول M را I-هم متناهی تعریف نمود هرگاه $SuppM \subseteq V(M)$ و $Ext_R^i\left(\frac{R}{I^n}, M\right)$ به‌ازای هر i با تولید متناهی باشد. سپس سوال زیر را مطرح نمود:

سوال: چه موقع رسته $\phi(R,I)_{cof}$ از مدول های I-هم متناهی یک زیررسته آبلی از رسته تمام R- مدول است؟ یعنی اگر $f: M \to N$ یک R- هومومورفیسم از مدول های I-هم متناهی باشد، آیا $kerf$ و $cokerf$ مدول های I-هم متناهی هستند.

در ادامه نماد $\phi(R,I)_{cof}$ رسته تمام R- مدول های I-هم متناهی و نماد $\Phi(R)$ مجموعه تمام ایده ال های I از حلقه R است که $\phi(R,I)_{cof}$ یک زیررسته آبلی از $\Phi(R)$ است.

هارتشورن با مثالی نشان داد که سوال مطرح شده در بالا در حالت کلی درست نیست اما جواب های مثبتی در بسیاری از حالات دارد. به عنوان مثال نشان داده شده است که اگر I ایده الی از حلقه نوتری R باشد بطوریکه $q(I,R) \leq 1$ یا $dimR/I \leq 1$ آنگاه سوال مطرح شده درست است که در این مورد می‌توان به منابع [1,3,4,5,7,9,10,15,18,19,21,23] مراجعه نمود.

فرض کنید (R,m) حلقه موضعی نوتری کامل از بعد $d \geq 4$ باشد. فرض کنید $2 \leq k \leq d-2$ یک عدد صحیح و $a_1, \dots, a_k$ قسمتی از دستگاه پارامتری برای R باشد. در این صورت ثابت خواهیم کرد $(a_1, \dots, a_k) \notin \Phi(R)$. در مورد سایر مطالب در ارتباط با این موضوع و همچنین نمادهای دیگر خواننده را به منابع [8] و [20] ارجاع می دهیم.

مفاهیم اولیه و نتایج

لم۱. فرض کنید (R,m) یک حلقه موضعی نوتری و کامل از بعد $d \geq 4$ باشد. فرض کنید $2 \leq k \leq d-2$ یک عدد صحیح و $a_1, \dots, a_k$ قسمتی از دستگاه پارامتری برای R باشد. در این صورت ایده‌آل اول p از حلقه R وجود دارد بطوریکه $dim\ R/p = 4$، $a_1, \dots, a_{k-2} \in p$، $a_k + p, a_{k-1} + p$، قسمتی از دستگاه پارامتری برای R/p و همچنین رابطه زیر برقرار است

$$cd((I+p)/p, R/p) = ht((I+p)/p) = dimR/(p+I) = 2$$

که در آن $I=(a_1, \dots, a_k)$.

برهان. فرض کنید Q ایده آل اولی از حلقه R باشد بطوریکه $dimR/Q = dimR = d$. در این صورت با گذر از حلقه R/Q می‌توان فرض کرد R یک حوزه صحیح کاتنری است. با توجه به اینکه $2 \leq dimR/I \leq d-2$ واضح است که $d - k = dimR/I = 2 + t$ برای برخی t که $0 \leq t \leq d-4$. حال با توجه به روابط زیر

$$0 \leq d-t-4 = k-2 = d-(t+2)-2 < d-(t+2) = dimR - dimR/I = htI = k$$

نتیجه می‌شود که $(a_1, \dots, a_{d-t-4}) \subseteq I$. با فرض $J = (a_1, \dots, a_{d-t-4})$، داریم $imR/J = t+4$. حال یک زیر دستگاه پارامتری برای R-مدول $M = R/J \oplus R/I$ مانند $b_1, \dots, b_t \in m$ انتخاب می‌کنیم. بوضوح $b_1, \dots, b_t$ قسمتی از دستگاه پارامتری برای R-مدول‌های R/I و R/J است. بنابراین $a_1, \dots, a_{d-t-4}, b_1, \dots, b_t$ قسمتی از دستگاه پارامتری برای R است. قرار می‌دهیم $J' = (b_1, \dots, b_t)$ و $I' = J + J'$. در این صورت روابط زیر را خواهیم داشت:

$$dimR/(I+J'\ ) = dimR/I - t = (t+2) - t = 2.$$

حال فرض کنید $q \in Assh_R R/(I+J')$. در این صورت $dimR/q = 2$. با توجه به اینکه $I' \subseteq I + J' \subseteq q$ لذا q شامل یک ایده‌آل اول مینیمال مانند p از I' است. پس نتیجه می شود که $dimR/p \leq dimR/I' = 4$. از طرفی با توجه به اینکه R یک حوزه صحیح کاتنری و موضعی است لذا خواهیم داشت $htp + dimR/p = dimR = d$ در نتیجه $htp = d-4$ و $dimR/p = 4$. حال با توجه به رابطه $I + J' \subseteq I + p \subseteq q$ نتیجه می شود که

$$2 = dimR/q \leq dimR/(I+p) \leq dimR/(I+J'\ ) = 2,$$

و لذا $dimR/(I+p) = 2$. چون R/p یک حوزه صحیح کاتنری موضعی است لذا روابط زیر را خواهیم داشت:

$$ht(I+p)/p = dimR/p - dimR/(I+p) = 4 - 2 = 2.$$

از طرفی با توجه به اینکه $\frac{I+p}{p} = \frac{Ra_{k-1}+Ra_k+p}{p}$ و $dimR/(I+p) = dimR/p - 2$ نتیجه می‌گیریم که $x_1 = a_{k-1} + p, x_2 = a_k + p$ قسمتی از دستگاه پارامتری برای حوزه صحیح کاتنری و موضعی R/p است. بنابراین

$ht(I+p)/p = dimR/(I+p) = 2$. بعلاوه بنابه گزاره ۲,۳ از [6]، $cd(((I+p)/p), R/p) = 2$ و حکم ثابت می شود. ■

قضیه ۲. فرض کنید (R,m) یک حلقه موضعی نوتری و کامل از بعد $d \geq 4$ باشد. فرض کنید $2 \leq k \leq d-2$ یک عدد صحیح و $a_1, \dots, a_k$ قسمتی از دستگاه پارامتری برای R باشد. در این صورت $(a_1, \dots, a_k) \not\subseteq \Phi(R)$.

برهان. طبق لم ۱ ایده‌آل اول p از حلقه R وجود دارد بطوریکه $dim\ R/p = 4$، $a_1, \dots, a_{k-2} \in p$، $a_k + p, a_{k-1} + p$، قسمتی از دستگاه پارامتری برای R/p و همچنین رابطه زیر برقرار است

$$cd((I+p)/p, R/p) = ht((I+p)/p) = dimR/(p+I) = 2,$$

که در آن $I=(a_1, \dots, a_k)$.

چون R/p حوزه صحیح است لذا $\Gamma_I\left(\frac{R}{p}\right) = 0$. همچنین طبق لم ۱۸,۲ از [4]، R -مدول $H_I^1\left(\frac{R}{p}\right) \cong H^1_{(I+p)/p}\left(\frac{R}{p}\right)$ با تولید متناهی است. لذا برای هر $i \neq 2$ مدول $H_I^i(\frac{R}{p})$یک مدول I-هم متناهی است. حال طبق قضیه ۷,۲ از منبع [24]، ایده آل اول q از حلقه R شامل ایده آل p وجود دارد بطوریکه $dimR/q = 3$ و $H_I^2\ (R/q) \cong H^2_{\frac{I+p}{p}}\left(\frac{R}{q}\right)$ یک R/p -مدول از بعد صفر و غیر آرتینی است و لذا $H_I^2(\frac{R}{q})$. بنابه گزاره ۱,۴ از منبع [22]، I-هم متناهی نیست. بعلاوه بنابه تمرین ۸,۱,۶ ، از منبع [8] روابط زیر را داریم:

$$H_I^2\ (R/q) \cong H^2_{\frac{I+p}{p}}(\frac{R}{q}) \cong H^2_{\frac{I+p}{p}}(\frac{R}{p}) \otimes_{\frac{R}{q}} R/q \cong H_I^2(\frac{R}{p}) \otimes_R R/q.$$

پس $H_I^2(\frac{R}{p}) \otimes_R R/q$ یک مدول I-هم متناهی نیست در صورتیکه $H_I^2(\frac{R}{p})$ یک مدول I-هم متناهی است. بنابراین بنابه لم ۸,۲ ، از منبع [2] ، $I \not\subseteq \Phi(R)$. ■

References

[1] K. Bahmanpour, A note on Abelian categories of cofinite modules, Commun. Algebra, **48** (2020), 254-262.

[2] K. Bahmanpour, Cofiniteness of torsion functors of a pair of cofinite modules (II), Commun. Algebra, **51** (2023), 496-509.

[3] K. Bahmanpour, Cohomological dimension, cofiniteness and Abelian categories of cofinite modules, J. Algebra, **484** (2017), 168-197.

[4] K. Bahmanpour, On a question of Hartshorne, Collect. Math. **72** (2021), 527-568.

[5] K. Bahmanpour, On the category of weakly Laskerian cofinite modules, Math. Scand. **115** (2014), 62-68.

[6] K. Bahmanpour and R. Naghipour, Associated primes of local cohomology modules and Matlis duality, J. Algebra, **320** (2008), 2632-2641.

[7] K. Bahmanpour, R. Naghipour and M. Sedghi, On the category of cofinite modules which is Abelian, Proc. Amer. Math. Soc. **142** (2014), 1101-1107.

[8] M.P. Brodmann and R.Y. Sharp, Local cohomology; an algebraic introduction with geometric applications, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1998.
[9] K. Divaani-Aazar, H. Faridian and M. Tousi, A new outlook on cofiniteness, Kyoto J. Math. **60** (2020), 1033-1045.
[10] D. Delfino and T. Marley, Cofinite modules and local cohomology, J. Pure Appl. Algebra, **121** (1997), 45-52.
[11] K. Divaani-Aazar, R. Naghipour and M. Tousi, Cohomological dimension of certain algebraic varieties, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 3537-3544.
[12] G. Faltings, Uber lokale Kohomologiegruppen hoher Ordnung , J. Reine Angew. Math., **313** (1980), 43-51.
[13] G. Ghasemi, K. Bahmanpour and J. A, zami, Upper bounds for the cohomological dimensions of finitely generated modules over a commutative Noetherian ring, Colloq. Math., **137** (2014), 263-270.
[14] A. Grothendieck, Local cohomology, Notes by R. Hartshorne, Lecture Notes in Math., 862 (Springer, New York, 1966).
[15] R. Hartshorne, Affine duality and cofiniteness, Invent. Math., **9** (1970), 145-164.
[16] R. Hartshorne, Cohomological dimension of algebraic varieties, Annals of Math. **88** (1968), 403-450.
[17] C. Huneke and G. Lyubezink, On the vanishing of local cohomology modules, Invent. Math. **102** (1990), 73-93.
[18] K.-I. Kawasaki, On a category of cofinite modules for principal ideals, Nihonkai Math. J. **22** (2011), 67-71.
[19] K.-I. Kawasaki, On a category of cofinite modules which is Abelian, Math. Z. **269** (2011), 587-608.
[20] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1986.
[21] L. Melkersson, Cofiniteness with respect to ideals of dimension one, J. Algebra, **372** (2012), 459-462.
[22] L. Melkersson, Modules cofinite with respect to an ideal, J. Algebra, **285** (2005), 649-668.
[23] G. Pirmohammadi, K. Ahmadi Amoli and K. Bahmanpour, Some homological properties of ideals with cohomological dimension one, Colloq. Math. **149** (2017), 225-238.
[24] F. Vahdanipour, K. Bahmanpour and G. Ghasemi, Zero-dimensional Non-Artinian local cohomology modules, Arch. Math. **115** (2020), 499-508.