Kharazmi University

Mathematical Researches

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Jordan Centralizers at Commutative Zero Products on Nest Algebras

B. Fadaee[1] ✉, **H. Ghahramani**[2], **K. Fallahi**[3]

1. Corresponding Author, Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran.
✉ E-mail: behroozfadaee@yahoo.com; b.fadaee@uok.ac.ir ir
2. Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran.
E-mail: h.ghahramani@uok.ac.ir; hoger.ghahramani@yahoo.com
3. Javanroud Faculty of Management and Accounting, Razi University, Kermanshah, Iran.
E-mail: k.fallahi@razi.ac.ir; fallahi1361@gmail.com

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 22 February 2021
Received in revised form:
1 May 2022
Accepted: 1 November 2022
Published online:
28 February 2025

Keywords:
Centralizer,
Jordan centralizer,
Nest algebras,
Hilbert space.

ABSTRACT

Introduction

Throughout this paper all rings are associative. Let $\mathcal{R}$ be a ring with center $Z(\mathcal{R})$. Recall that an additive map $\varphi: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ is said to be a *centralizer* if

$$\varphi(xy) = x\varphi(y) = \varphi(x)y$$

for a $x, y \in \mathcal{R}$. In case $\mathcal{R}$ has a unity 1, φ is a centralizer if and only if we have $\varphi(x) = \varphi(1)x$ for any $x \in \mathcal{R}$, where $\varphi(1) \in Z(\mathcal{R}$.([see [۲])) We say that φ is a *Jordan centralizer* if

$$\varphi(xy + yx = x\varphi(y) + \varphi(y)x$$

for all elements $x, y \in \mathcal{R}$. Clearly, each centralizer is a Jordan centralizer. The converse is, in general, not true (see [3], Example 2.6).

In general, the question under what conditions that a map becomes a centralizer attracted much attention of mathematicians. Vukman [6] has showed that an additive map $\varphi: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, where $\mathcal{R}$ is a 2-torsion free semiprime ring, with the property that $2\varphi(x^2) = \varphi(x)x + x\varphi(x)$ for all $x \in \mathcal{R}$, is a centralizer. Hence any Jordan centralizer on a 2-torsion free semiprime ring is a centralizer. Benkovic et al. [1] have proved that if there exists an additive mapping $\varphi: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, where $\mathcal{R}$ is a prime ring with suitable characteristic restrictions, satisfying the relation $2\varphi(x^{n+1}) = \varphi(x)x^n + x^n\varphi(x)$ for all $x \in \mathcal{R}$ and some fixed integer n, then φ is a centralizer. Vukman [7] has showed the following result. If $\varphi: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ is an additive mapping, where $\mathcal{R}$ is a 2-torsion free semiprime ring, satisfying the relation $\varphi(xyx) = x\varphi(y)x$ for all pairs $x, y \in \mathcal{R}$, then φ is a centralizer. In [3] the author study continuous linear maps behaving like Jordan centralizers when acting on unit-product elements on Banach algebras, that is, a map $\varphi: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfying if $ab = ba = 1$, then

$$a\varphi(b) + \varphi(b)a = 2\varphi(1),$$

where $\mathcal{A}$ is unital Banach algebra.In [8], centralizers in zero products (ab=0) on the algebra of continuous operators on Hilbert space are studied. Also in [5] centralizers on nest subalgebras of von Neumann algebras by local action in zero products are characterized. For results concerning centralizers on rings and algebras, we refer to [3], and [4] and the references therein.

In this paper, we by idea of the material above, we study the additive map $\varphi: Alg\mathcal{N} \to Alg\mathcal{N}$ satisfies

$$\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in Alg\mathcal{N}, \mathrm{XY} = \mathrm{YX} = 0 \implies X\varphi(Y) + \varphi(Y)X = 0$$

where $Alg\mathcal{N}$ be a nest algebras on a Hilbert.

Preliminaries

Let $\mathcal{H}$ be a Hilbert space. We denote by $B(\mathcal{H})$the algebra of all bounded linear operators on $\mathcal{H}$. The identity operator on $\mathcal{H}$ is denoted by I, and the projection of $\mathcal{H}$ onto the closed subspace $\mathcal{L}$ is denoted by $P_{\mathcal{L}}$. A subspace lattice $\mathcal{L}$ on a Hilbert space $\mathcal{H}$ is a collection of closed (under norm topology) subspaces of $\mathcal{H}$ which is closed under the formation of arbitrary intersection (denoted by $\wedge$) and closed linear span (denoted by $\vee$), and which includes $\{0\}$ and $\mathcal{H}$. For a subspace lattice $\mathcal{L}$, we define the associated subspace lattice $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ by

$$\mathrm{Alg}\mathcal{L} = \{T \in B(\mathcal{H}): T(N) \subseteq N, \forall N \in \mathcal{L}\}$$

Obviously, $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ is a unital weakly closed subalgebra of $B(\mathcal{H})$. A totally ordered subspace lattice $\mathcal{N}$ on Hilbert space $\mathcal{H}$ is called a nest and the nest algebra associated to the nest $\mathcal{N}$, denoted by $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$ is called a nest algebra. When $\mathcal{N} \neq \{0, \mathcal{H}\}$, we say that $\mathcal{N}$ is non-trivial. It is clear that if $\mathcal{N}$ is trivial, then $\mathrm{Alg}\mathcal{N} = B(\mathcal{H})$. Let $\mathcal{N}$ be a nontrivial nest on a Hilbert space $\mathcal{H}$. If $N \in \mathcal{N} \setminus \{(0), \mathcal{H}\}$ and P_N is the orthogonal projection onto N, where $P_N(\mathcal{H}) = N$ and $I - P_N = P_N^{\perp}$, then we have $(I - P_N)(\mathrm{Alg}\mathcal{N})P_N = \{0\}$ and hence

$$\mathrm{Alg}\mathcal{N} \cong \begin{pmatrix} P_N \mathrm{Alg}\mathcal{N} P_N & P_N \mathrm{Alg}\mathcal{N} P_N^{\perp} \\ 0 & P_N^{\perp} \mathrm{Alg}\mathcal{N} P_N^{\perp} \end{pmatrix}$$

Note that $P_N \mathrm{Alg}\mathcal{N} P_N$ and $P_N^{\perp} \mathrm{Alg}\mathcal{N} P_N^{\perp}$ are unital closed subalgebra of $\mathrm{Alg}\mathcal{N}$. It is obvious that P_N and $P_N^{\perp}$ are unities of $P_N \mathrm{Alg}\mathcal{N} P_N$ and $P_N^{\perp} \mathrm{Alg}\mathcal{N} P_N^{\perp}$, respectively. Also $P_N \mathrm{Alg}\mathcal{N} P_N^{\perp}$ is both unital faithful left Banach $P_N \mathrm{Alg}\mathcal{N} P_N$-module and unital faithful right Banach $P_N^{\perp} \mathrm{Alg}\mathcal{N} P_N^{\perp}$-module, so $P_N \mathrm{Alg}\mathcal{N} P_N^{\perp}$ is unital faithful Banach $(P_N \mathrm{Alg}\mathcal{N} P_N, P_N^{\perp} \mathrm{Alg}\mathcal{N} P_N^{\perp})$-bimodule. For more information about Nest algebras, refer to [2].

Main Results

The followings are the main results of our paper. In fact, we consider the question of characterizing Jordan centralizers by action at zero products on Nest algebra.

Theorem. Let $\mathcal{N}$ be a nest on a Hilbert space $\mathcal{H}$ and $\varphi: Alg\mathcal{N} \to Alg\mathcal{N}$ be an additive map. Suppose φ satisfies

$$XY = YX = 0 \implies X\varphi(Y) + \varphi(Y)X = 0,$$

for any $X, Y \in Alg\mathcal{N}$. Then φ is a centralizer.

Since every Jordan centralizer satisfies the requirements in above Theorem, the following corollary is clear.

Corollary. Let $\mathcal{N}$ be a nest on a Hilbert space $\mathcal{H}$ and $\varphi: Alg\mathcal{N} \to Alg\mathcal{N}$ is a Jordan centralizer. . Then φ is a centralizer.

Also from this result we can obtain the following corollary.

Corollary. Let $\mathcal{N}$ be a nest on a Hilbert space $\mathcal{H}$ and $\varphi: Alg\mathcal{N} \to Alg\mathcal{N}$ be an additive map. Suppose φ satisfies $\varphi(XYX) = X\varphi(Y)X$, for any $X, Y \in Alg\mathcal{N}$. Then φ is a centralizer.

Conclusion

Let $\mathcal{N}$ be a nest on a Hilbert space $\mathcal{H}$ and $\varphi: Alg\mathcal{N} \to Alg\mathcal{N}$ be an additive map. Let φ be Jordan centralizer at commutative zero products. We

characterized the structure of φ according to the centralizer. In fact, we proved to φ be a centralizer and by using this result we obtain some corollaries concerning (Jordan) centralizers on nest algebras.

How to cite: Fadaee, Behrooz., Ggahramani, Hoger., & Fallahi, Kmall. (2024). Jordan centralizers at commutative zero products on nest algebras. *Mathematical Researches*, **10** (4), 1 – 12.

© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

پژوهش‌های ریاضی

شاپا چاپی: ۲۵۸۸-۲۵٤٦
شاپا الکترونیکی: ۲۵۸۸-۲۵٥٤

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

مرکزسازهای جردن در حاصلضرب‌های صفر تعویض‌پذیر روی جبرهای لانه‌ای

بهروز فدائی[۱] ✉، هوگر قهرمانی[۲]، کمال فلاحی[۳]

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران. رایانامه: behroozfadaee@yahoo.com; b.fadaee@ uok.ac.ir
۲. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران. رایانامه: h.ghahramani@uok.ac.ir; hoger.ghahramani@yahoo.com
۳. دانشکده مدیریت و حسابداری جوانرود، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران. رایانامه: k.fallahi@razi.ac.ir; fallahi1361@gmail.com

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۴
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۲/۱۱
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۸/۱۰
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۱۲/۱۰

واژه‌های کلیدی:
مرکزساز،
مرکزساز جردن،
جبر لانه‌ای،
فضای هیلبرت.

چکیده

فرض کنید $Alg\mathcal{N}$ یک جبر لانه‌ای غیربدیهی روی فضایی هیلبرت و $\varphi: Alg\mathcal{N} \to Alg\mathcal{N}$ یک نگاشت جمعی باشد. ثابت می‌کنیم برای هر X و Y متعلق به $Alg\mathcal{N}$ به طوری که $XY = YX = 0$، اگر $X\varphi(Y) + \varphi(Y)X = 0$، آنگاه φ یک مرکز ساز است. به عنوان کاربردی از این گزاره نتایجی را در مورد مرکزسازها (جردن) روی جبرهای لانه‌ای بدست می‌آوریم.

استناد: فدائی، بهروز؛ قهرمانی، هوگر؛ و فلاحی، کمال (۱۴۰۳). مرکزسازهای جردن در حاصلضرب‌های صفر تعویض‌پذیر روی جبرهای لانه‌ای. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۰** (۴)، ۱ – ۱۲.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

© نویسندگان.

مقدمه

در روند این مقاله همه حلقه‌ها و جبرها شرکت پذیر می‌باشند. فرض کنید $\mathcal{R}$ حلقه‌ای با مرکز $\mathrm{Z}(\mathcal{R})$ باشد. نگاشت جمعی $\varphi: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ را مرکز ساز[1] گویند هرگاه برای هر x و y متعلق به $\mathcal{R}$،

$$\varphi(xy) = x\varphi(y) = \varphi(x)y.$$

در حالتی که $\mathcal{R}$ حلقه یکدار با همانی 1 باشد φ یک مرکز ساز است اگر و تنها اگر برای هر x متعلق به $\mathcal{R}$، داشته باشیم $\varphi(x) = \varphi(1)x$ که در آن $\varphi(1)$ عضو $\mathrm{Z}(\mathcal{R})$ می‌باشد [۳]. φ را یک مرکز ساز جردن[2] گوییم اگر برای هر x و y متعلق به R،

$$\varphi(xy + yx) = x\varphi(y) + \varphi(y)x$$

به وضوح هر مرکز ساز یک مرکز ساز جردن است اما عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست (مرجع [۳] مثال ۲. ۶ را ببینید).

در حالت کلی، این سوال که تحت چه شرایطی یک نگاشت مرکز ساز می‌باشد توجه بسیاری از ریاضیدانان را به خود جلب کرده است. ووکمن[3] [۶] نشان داد که یک نگاشت جمعی $\varphi: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ ، که در آن $\mathcal{R}$ یک حلقه نیم اول ۲- بی تاب[4] باشد با این ویژگی که برای هر x متعلق به $\mathcal{R}$، $2\varphi(x^2) = \varphi(x)x + x\varphi(x)$، یک مرکز ساز است. در نتیجه هر مرکز ساز جردن روی یک حلقه نیم اول ۲-بی تاب یک مرکز ساز است. بینکویچ[5] و همکاران[۱]، ثابت کردند که اگر یک نگاشت جمعی $\varphi: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$، که در آن $\mathcal{R}$ یک حلقه اول با محدودیت مشخصه‌ای مناسب است و برای هر x متعلق به $\mathcal{R}$ و عدد صحیح ثابتی مانند n، نگاشت جمعی φ دارای خاصیت $\varphi(x^{n+1}) = \varphi(x)x^n + x^n\varphi(x)$ باشد، آنگاه φ یک مرکز ساز است. ووکمون در [۷] نشان داد که اگر $\varphi: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ یک نگاشت جمعی باشد که در آن $\mathcal{R}$ یک حلقه نیم اول ۲- بی تاب و برای هر زوج x و y عضو $\mathcal{R}$ رابطه $\varphi(xyx) = x\varphi(y)x$ برقرار باشد، آنگاه φ نگاشتی مرکز ساز می‌باشد. در [۳] نویسندگان به مطالعه نگاشت‌های خطی پیوسته‌ای پرداخته اند که همانند مرکز سازهای جردن وقتی که روی ضرب یکه‌ای اعضای یک جبر باناخ عمل می‌نمایند، رفتار می‌کنند؛ در واقع، نشان دادند که اگر $\varphi: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ نگاشتی با این خاصیت باشد که برای هر a و b متعلق به $\mathcal{A}$ اگر $a\,b = b\,a = 1$ آنگاه $a\varphi(b) + \varphi(b)a = 2\varphi(1)$ که در آن $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یکدار است، در این صورت نگاشت φ مرکزساز جردن خواهد بود. در [۸] مرکزسازها در حاصلضرب‌های صفر $(ab = 0)$ روی جبر عملگرهای پیوسته روی فضای هیلبرت مطالعه شده است. همچنین در [۵] مرکزسازها در حاصلضرب‌های صفر روی زیرجبرهای لانه‌ای جبرهای وان-نیومن مشخصه‌سازی شده است. برای نتایج بیشتر در مورد مرکز سازها روی حلقه‌ها و جبرها،

[1] Centralizer
[2] Jordan
[3] Vukman
[4] 2-torsion free
[5] Benkovic

خواننده را به [۳]،[۴] و منابع داخل آن‌ها ارجاع می‌دهیم.

در این مقاله، با انگیزه از مطالب ذکر شده، ما به مطالعه و بررسی شرایط زیر روی یک نگاشت جمعی

$$\varphi: Alg\mathcal{N} \to Alg\mathcal{N}$$

می‌پردازیم که

$$X, Y \in Alg\mathcal{N}, \quad XY = YX = 0 \implies X\varphi(Y) + \varphi(Y)X = 0,$$

و $Alg\mathcal{N}$ یک جبر لانه‌ای است. سپس با استفاده از آن، نتایجی در مورد مرکز سازها روی جبرهای لانه‌ای $Alg\mathcal{N}$ به دست می‌آوریم.

۱. پیش‌نیازها

فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد، در این صورت جبر همه عملگرهای کراندار روی $\mathcal{H}$ را با $B(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهند. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک خانواده از زیر فضاهای بسته $\mathcal{H}$ (تحت نرم توپولوژی) باشد. در این صورت $\mathcal{L}$ را یک زیرفضای مشبکه‌ای کامل روی $\mathcal{H}$ می‌نامیم، هرگاه تحت اشتراک‌های دلخواه (با نماد $\wedge$ نمایش می‌دهیم) و تحت بستار تولید خطی (با نماد $\vee$ نمایش می‌دهیم) بسته باشد، همچنین شامل $\{0\}$ و خود $\mathcal{H}$ باشد. برای هر زیرفضای مشبکه‌ای کامل $\mathcal{L}$، جبر مشبکه‌ای متناظر با آن یعنی $Alg\mathcal{L}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Alg\mathcal{L} = \{T \in B(\mathcal{H}): T(N) \subseteq N, \forall N \in \mathcal{L}\}$$

یک زیرفضای مشبکه‌ای کامل $\mathcal{N}$ روی $\mathcal{H}$ را که مجموعه‌ای مرتب کلی تحت رابطه شمول باشد، را یک لانه و $Alg\mathcal{N}$ را یک جبر لانه‌ای می‌نامند. در صورتی که $\mathcal{N} = \{0, \mathcal{H}\}$، آنگاه $Alg\mathcal{N} = B(\mathcal{H})$. اگر $\mathcal{N}$ یک لانه غیر بدیهی روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. آنگاه

$$Alg\mathcal{N} \cong \begin{pmatrix} P_N Alg\mathcal{N} P_N & P_N Alg\mathcal{N} P_N^{\perp} \\ 0 & P_N^{\perp} Alg\mathcal{N} P_N^{\perp} \end{pmatrix}$$

که در آن برای $N \in \mathcal{N} \setminus \{(0), \mathcal{H}\}$ دلخواه، نگاشت P_N تصویری متعامد بر N است که $P_N(\mathcal{H}) = N$ و همچنین $I - P_N = P_N^{\perp}$. زیر فضاهای $P_N Alg\mathcal{N} P_N$، $P_N Alg\mathcal{N} P_N^{\perp}$ و $P_N^{\perp} Alg\mathcal{N} P_N^{\perp}$ زیر فضاهایی بسته از $Alg\mathcal{N}$ هستند. در حقیقت $P_N Alg\mathcal{N} P_N$ و $P_N^{\perp} Alg\mathcal{N} P_N^{\perp}$ زیر جبرهایی بسته از $Alg\mathcal{N}$ با همانی‌های P_N و $P_N^{\perp}$ به ترتیب هستند و $P_N Alg\mathcal{N} P_N^{\perp}$ یک باناخ $(P_N Alg\mathcal{N} P_N, P_N^{\perp} Alg\mathcal{N} P_N^{\perp})$-دومدول است. همچنین $P_N Alg\mathcal{N} P_N^{\perp}$ یک باناخ $P_N Alg\mathcal{N} P_N$-مدول چپ با وفا و یک باناخ $P_N^{\perp} Alg\mathcal{N} P_N^{\perp}$-مدول راست با وفاست. برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد جبرهای لانه‌ای به [۲] مراجعه شود.

۲. مشخصه سازی مرکزسازهای جردن حافظ ضرب‌های صفر تعویض‌پذیر

در این بخش، ما به بررسی مشخصه‌سازی مرکزسازهای جردن با عمل در ضرب‌های صفر روی جبرهای لانه‌ای می‌پردازیم. در سراسر این بخش فرض می‌کنیم $Alg\mathcal{N}$ جبر لانه‌ای غیربدیهی روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد همچنین فرض می‌کنیم $N \in \mathcal{N}$ زیرفضای N عضو غیربدیهی و P_N تصویر متعامد بر N باشد.

قضیه ۲. ۱. فرض کنید $\varphi: Alg\mathcal{N} \to Alg\mathcal{N}$ یک نگاشت جمعی با این ویژگی باشد که

$$X, Y \in Alg\mathcal{N}, \quad XY = YX = 0 \implies X\varphi(Y) + \varphi(Y)X = 0,$$

آنگاه φ یک مرکز ساز است.

اثبات. با توجه به مطالب بخش دوم $Alg\mathcal{N}$ را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$Alg\mathcal{N} \cong \begin{pmatrix} P_N Alg\mathcal{N} P_N & P_N Alg\mathcal{N} P_N^{\perp} \\ 0 & P_N^{\perp} Alg\mathcal{N} P_N^{\perp} \end{pmatrix}$$

قرار می‌دهیم $\mathcal{R} = P_N Alg\mathcal{N} P_N$، $\mathcal{M} = P_N Alg\mathcal{N} P_N^{\perp}$ و $\mathcal{S} = P_N^{\perp} Alg\mathcal{N} P_N^{\perp}$. همانی $\mathcal{R}$ را با $1_{\mathcal{R}}$ و همانی $\mathcal{S}$ را با $1_{\mathcal{S}}$ نشان می‌دهیم. در این صورت

$$P_N = \begin{pmatrix} 1_R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } P_N^{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_S \end{pmatrix}.$$

قرار می‌دهیم $P = P_N$ و $Q = P_N^{\perp}$. در این صورت P و Q خود توان‌های استاندارد (به این معنی: $P^2 = P$ و $Q^2 = Q$) در $Alg\mathcal{N}$ هستند به طوری که $P + Q = 1$ و $PQ = QP = 0$.

فرض کنید X و Y عضوهای دلخواهی از $Alg\mathcal{N}$ باشند. از آنجایی که $P(QXQ) = (QXQ)P = 0$، داریم

$$P\varphi(QXQ) + \varphi(QXQ)P = 0. \qquad (۱)$$

با ضرب این تساوی از هر دو طرف چپ و راست در P خواهیم داشت $2P\varphi(QXQ)P = 0$، بنابراین

$$P\varphi(QXQ)P = 0. \qquad (۲)$$

حال، با ضرب رابطه (۱) از چپ در P و از راست در Q، بدست خواهیم آورد

$$P\varphi(QXQ)Q = 0. \qquad (۳)$$

از $Q(PXP) = (PXP)Q = 0$، داریم

$$Q\varphi(PXP) + \varphi(PXP)Q = 0.$$

با استفاده از این معادله و روشی مشابه عملیات فوق، خواهیم داشت

$$Q\varphi(PXP)Q = 0 \text{ و } P\varphi(PXP)Q = 0. \quad (۴)$$

از آنجائی که $(P - PXQ)(Q + PXQ) = (Q + PXQ)(P - PXQ) = 0$، این تساوی نشان می‌دهد که

$$(P - PXQ)\varphi(Q + PXQ) + \varphi(Q + PXQ)(P - PXQ) = 0.$$

با ضرب این تساوی از هر دو طرف چپ و راست در P و با استفاده از این حقیقت که $P\varphi(Q)P = 0$، می‌بینیم که

$$P\varphi(PXQ)P = 0. \quad (۵)$$

از $(PXP - PXPYQ)(Q + PYQ) = (Q + PYQ)(PXP - PXPYQ) = 0$، داریم

$$(Q + PYQ)\varphi(PXP - PXPYQ) + \varphi(PXP - PXPYQ)(Q + PYQ) = 0. \quad (۶)$$

فرض کنیم $X = P$ و با ضرب تساوی فوق از هر دو طرف چپ و راست در Q و اینکه $\mathrm{Q\varphi(P)Q} = 0$، نتیجه می‌شود که

$$Q\varphi(PYQ)Q = 0. \quad (۷)$$

از طرفی، گسترش داده شده رابطه (۶) به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned}(Q + PYQ)\big(\varphi(PXP) - \varphi(PXPYQ)\big) + \big(\varphi(PXP) - \varphi(PXPYQ)\big)(Q + PYQ)\\ = \mathrm{Q}\varphi(PXP) - Q\varphi(PXPYQ) + PYQ\varphi(PXP) - PYQ\varphi(PXPYQ)\\ +\varphi(PXP)Q + \varphi(PXP)PYQ - \varphi(PXPYQ)Q - \varphi(PXPYQ)PYQ = 0\end{aligned}$$

با ضرب این معادله گسترش یافته از طرف چپ در P و از راست در Q، چون $Q^2 = Q$، $P^2 = P$ و از آنجایی که $QP = PQ = 0$، همچنین با استفاده از تساوی‌های (۴)، (۵) و (۷) تساوی زیر را بدست خواهیم آورد

$$\underbrace{PQ\varphi(PXP)Q}_{=0\ (PQ=0)} - \underbrace{PQ\varphi(PXPYQ)Q}_{=0\ (PQ=0)} + \underbrace{PYQ\varphi(PXP)Q}_{=0\ (\text{بنابر رابطه}(۴))} - \underbrace{PYQ\varphi(PXPYQ)Q}_{=0\ (\text{بنابر رابطه}(۷))}$$

$$+ \underbrace{P\varphi(PXP)Q}_{=0\ (\text{بنابر رابطه}(۴))} + P\varphi(PXP)PYQ - P\varphi(PXPYQ)Q - \underbrace{P\varphi(PXPYQ)PYQ}_{=0\ (\text{بنابر رابطه}(۵))} = 0$$

به عبارتی

$$P\varphi(PXP)PYQ - P\varphi(PXPYQ)Q = 0$$

لذا

$$P\varphi(PXPYQ)Q = P\varphi(PXP)PYQ. \quad (۸)$$

با جایگذاری P به جای X در معادله فوق خواهیم داشت

$$P\varphi(PYQ)Q = P\varphi(P)PYQ. \quad (۹)$$

بنابراین، از (۸) و (۹) نتیجه می‌شود که

$$P\varphi(PXP)PYQ = P\varphi(PXPYQ)Q = P\varphi(P)PXPYQ,$$

و لذا $P\varphi(PXP)P - P\varphi(P)PXP)PYQ = 0$. از آنجائیکه Y عضو دلخواهی از $Alg\mathcal{N}$ می‌باشد و $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{R}$-مدول چپ باوفاست، لذا داریم

$$P\varphi(PXP)P = P\varphi(P)PXP. \quad (۱۰)$$

از اینکه $(P - PXQ)(PXQYQ + QYQ) = (PXQYQ + QYQ)(P - PXQ) = 0$، خواهیم داشت

$$(P - PXQ)\varphi(PXQYQ + QYQ) + \varphi(PXQYQ + QYQ)(P - PXQ) = 0.$$

گسترش یافته این رابطه به صورت زیر است

$$\begin{aligned}&(P - PXQ)(\varphi(PXQYQ) + \varphi(QYQ)) + (\varphi(PXQYQ) + \varphi(QYQ))(P - PXQ)\\ &= \mathrm{P}\varphi(PXQYQ) + P\varphi(QYQ) - PXQ\varphi(PXQYQ) - PXQ\varphi(QYQ)\\ &+\varphi(PXQYQ)P + \varphi(QYQ)P - \varphi(PXQYQ)PXQ - \varphi(QYQ)PXQ = 0.\end{aligned}$$

با ضرب این معادله از طرف چپ در P و از راست در Q، همچنین استفاده از تساوی‌های (۲)، (۳)، (۵) و (۷) تساوی زیر را بدست خواهیم آورد

$$\mathrm{P}\varphi(PXQYQ)Q + \underbrace{P\varphi(QYQ)Q}_{=0\ (\text{بنابر رابطه}(۳))} - \underbrace{PXQ\varphi(PXQYQ)Q}_{=0\ (\text{بنابر رابطه}(۷))} - PXQ\varphi(QYQ)Q + \underbrace{P\varphi(PXQYQ)PQ}_{=0\ (PQ=0)}$$

$$+ \underbrace{P\varphi(QYQ)PQ}_{=0\ (PQ=0)} - \underbrace{P\varphi(PXQYQ)PXQ}_{=0\ (\text{بنابر رابطه}(۵))} - \underbrace{P\varphi(QYQ)PXQ}_{=0\ (\text{بنابر رابطه}(۲))} = 0$$

به عبارتی

$$\mathrm{P}\varphi(PXQYQ)Q - PXQ\varphi(QYQ)Q = 0$$

لذا

$$P\varphi(PXQYQ)Q = PXQ\varphi(QYQ)Q. \quad (۱۱)$$

با جایگذاری Q به جای Y در معادله فوق خواهیم داشت

$$P\varphi(PXQ)Q = PXQ\varphi(Q)Q. \quad (۱۲)$$

با استفاده از (۱۱) و (۱۲) نتیجه می‌شود

$$PXQ\varphi(QYQ)Q = P\varphi(PXQYQ)Q = PXQYQ\varphi(Q)Q$$

و لذا $PX(Q\varphi(QYQ)Q - QYQ\varphi(Q)Q) = 0$. همچنین از اینکه $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{S}$-مدول راست باوفاست، لذا داریم

$$Q\varphi(QYQ)Q = QYQ\varphi(Q)Q. \quad (۱۳)$$

با استفاده (۹) و (۱۲) نتیجه می‌شود که

$$P\varphi(P)PXQ = PXQ\varphi(Q)Q. \quad (۱۴)$$

بنابراین

$$,P\varphi(P)PXPYQ = PXPYQ\varphi(Q)Q = PXP\varphi(P)PYQ$$

و از آنجائیکه $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{R}$-مدول چپ باوفاست، لذا

$$P\varphi(P)PXP = PXP\varphi(P)P, \quad (۱۵)$$

حال از (۱۴)، داریم

$$PXPYQ\varphi(Q)Q = P\varphi(P)PXQYQ = PXQ\varphi(Q)QYQ$$

پس $PX(QYQ\varphi(Q)Q - Q\varphi(Q)QYQ)) = 0$ و از آنجائیکه $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{S}$-مدول راست باوفاست، لذا

$$Q\varphi(Q)QXQ = QXQ\varphi(Q)Q. \quad (۱۶)$$

حال، با استفاده از (۲)، (۳)، (۴)، (۱۴)، (۱۵) و (۱۶) همچنین

$$\varphi(1) = \varphi(P+Q) = \varphi(P) + \varphi(Q)$$

پس

$$X\varphi(1) = (PXP + PXQ + QXQ)(P\varphi(1)P + P\varphi(1)Q + Q\varphi(1)Q)$$
$$= PXP\varphi(1)P + PXP\varphi(1)Q + PXQ\varphi(1)Q + QXQ\varphi(1)Q$$
$$= PXP\varphi(P+Q)P + PXP\varphi(P+Q)Q + PXQ\varphi(P+Q)Q + QXQ\varphi(P+Q)Q$$
$$= PXP\big(\varphi(P) + \varphi(Q)\big)P + PXP\big(\varphi(P) + \varphi(Q)\big)Q$$
$$+PXQ\big(\varphi(P) + \varphi(Q)\big)Q + QXQ\big(\varphi(P) + \varphi(Q)\big)Q$$
$$= PXP\varphi(P)P + \underbrace{PXP\varphi(Q)P}_{=0\left(\text{بنابر رابطه}(۲)\right)} + \underbrace{PXP\varphi(P)Q}_{=0\left(\text{بنابر رابطه}(۵)\right)} + \underbrace{PXP\varphi(Q)Q}_{=0\left(\text{بنابر رابطه}(۳)\right)}$$
$$+\underbrace{PXQ\varphi(Q)Q}_{=0\left(\text{بنابر رابطه}(۴)\right)} + PXQ\varphi(Q)Q + \underbrace{QXQ\varphi(P)Q}_{=0\left(\text{بنابر رابطه}(۴)\right)} + XQ\varphi(Q)Q$$
$$= PXP\varphi(P)P + PXQ\varphi(Q)Q + QXQ\varphi(Q)Q$$

$$= \underbrace{P\varphi(P)PXP}_{\left(\text{بنابر رابطه}(۱۵)\right)} + \underbrace{P\varphi(P)PXQ}_{\left(\text{بنابر رابطه}(۱۴)\right)} + \underbrace{Q\varphi(Q)QXQ}_{\left(\text{بنابر رابطه}(۱۶)\right)}$$

$$= \varphi(1)X$$

به عبارتی

$$X\varphi(1) = PXP\varphi(P)P + PXQ\varphi(Q)Q + QXQ\varphi(Q)Q$$
$$= P\varphi(P)PXP + P\varphi(P)PXQ + Q\varphi(Q)QXQ = \varphi(1)X, \qquad (۱۷)$$

و با استفاده از (۲)، (۳)، (۴)، (۵)، (۷)، (۹)، (۱۰)، (۱۳) و (۱۷) تساوی‌های زیر را بدست خواهیم آورد

$$\varphi(X) = P\varphi(PXP)P + P\varphi(PXQ)Q + Q\varphi(QXQ)Q$$
$$= P\varphi(P)PXP + P\varphi(P)PXQ + QXQ\varphi(Q)Q = \varphi(1)X.$$

این نتایج نشان می‌دهند که φ یک مرکز ساز است. □

از آنجا که هر مرکز ساز جردن تمام خواص قضیه ۲.۱ را برآورده می‌کند، لذا نتایج زیر به وضوح دیده می‌شوند.

نتیجه ۲.۲. فرض کنید که $\varphi: Alg\mathcal{N} \to Alg\mathcal{N}$ یک مرکز ساز جردن باشد. آنگاه φ یک مرکز ساز است.

نتیجه ۲. ۳. فرض کنید که $\varphi: Alg\mathcal{N} \to Alg\mathcal{N}$ یک نگاشت جمعی با این خاصیت باشد که برای هر X و Y متعلق به $Alg\mathcal{N}$ داشته باشیم

$$\varphi(XYX) = X\varphi(Y)X, \qquad (۱۸)$$

آنگاه φ یک مرکز ساز است.

اثبات. فرض کنید X و Y عضوهای دلخواهی از $Alg\mathcal{N}$ باشند. با جایگذاری $X+1$ به جای X در رابطه (۱۸) خواهیم داشت

$$\varphi\big((X+1)Y(X+1)\big) = (X+1)\varphi(Y)(X+1).$$

لذا با استفاده از تساوی و فرض مساله داریم

$$\varphi(XY + YX) = X\varphi(Y) + \varphi(Y)X.$$

بنابراین φ یک مرکز ساز جردن و با استفاده نتیجه ۲. ۲ یک مرکز ساز می‌باشد. □

References

1. D. Benkovic, D. Eremita, J. Vukman, A characterization of the centroid of a prime ring, Studia Sci. Math. Hungar. **45** (2008), 379-394.

2. K. R. Davidson, Nest algebra, Pitman Res. Notes in Math., vol. 191, Longman, London, 1988.

3. H. Ghahramani, On centralizers of Banach algebras, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., **38** (2015), 155-164.

4. J. Guo and J. Li, On centralizers of reflexive algebras, Aequationes Mathematicae, **84** (2012), 1-12.

5. L. Liu, Characterization of centralizers on nest subalgebras of von Neumann algebras by local action, Linear and Multilinear Algebra, **64** (2016), 383-392.

6. J. Vukman, An identity related to centralizers in semiprime rings, Comment. Math. Univ. Carolinae, **40** (1999), 447-456.

7. J. Vukman, Centralizers on semiprime rings. Comment. Math. Univ. Carolinae, **42** (2001), 237-245.

8. W. S. Xu, R. L. An and J. C. Hou, Equivalent characterization of centralizers on B(H), Acta Math. Sin. English Ser. **32** (2016), 1113-1120.