



Kharazmi University

## State $n$ -Fold Obstinate Ideals in State MV-Algebras

F. Forouzesh<sup>1</sup> , M. Salarbadeh<sup>2</sup> , A. Darijani<sup>3</sup> 

1. Corresponding Author, Department of Mathematics, Higher Education Complex of Bam, Kerman, Iran. E-mail: [frouzesh@bam.ac.ir](mailto:frouzesh@bam.ac.ir)

2. Department of Mathematics, Shahid Bahonar university, Kerman, Iran. E-mail: [fmohamadf5395@gmail.com](mailto:fmohamadf5395@gmail.com)

3. Department of Mathematics, Higher Education Complex of Bam, Kerman, Iran. E-mail: [a.darijan@bam.ac.ir](mailto:a.darijan@bam.ac.ir)

---

### Article Info

#### Article type:

Research Article

#### Article history:

Received: 28 July 2023

Received in revised form:

3 July 2024

Accepted: 7 July 2024

Published online:

10 November 2024

#### Keywords:

State ideals

(state  $n$ -fold obstinate,  
state  $n$ -fold Boolean)

State locally finite,

Semi-simple.

---

### ABSTRACT

#### Introduction

States on MV -algebras were introduced by Mundici with the intent of measuring the average truth-value of propositions in the Lukasiewicz logic, which are generalizations of probability measures on Boolean algebras, states on MV -algebras have been deeply investigated by Flaminio and Montagna. The last decade, some concepts of state ideals in a state MV –algebra are introduced such as: state Boolean ideals, state primary ideals and state obstinate ideals in a state MV –algebra and give some of their properties.

In this paper, some types of state ideals are introduced such as: state  $n$ -fold obstinate and state  $n$ -fold Boolean ideals in state MV-algebras. Then we investigate the relationship between state  $n$ -fold obstinate ideals with the other state ideals in state MV-algebras.

Finally, we study quotient algebras induced by state  $n$ -fold obstinate ideals in state MV-algebras.

#### Conclusion

The following conclusions are obtained from this research.

- We introduced state  $n$ -fold obstinate ideals and state  $n$ -fold Boolean ideals in state MV-algebras.
- We studied the relationship between state  $n$ -fold obstinate ideals with the other state ideals in state MV-algebras.
- We investigate quotient algebras induced by state  $n$ -fold obstinate ideals in state MV-algebras.

---

**How to cite:** Forouzesh, F., Salarbadeh, M., & Darijani, A. (2024). State  $n$ -Fold Obstinate Ideals in State MV-Algebras. *Mathematical Researches*, **10** (3), 100 – 122.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---

## ایده‌آل‌های سرسخت $n$ -لایه حالت در $MV$ -جبرهای حالت

فرشته فروزش<sup>۱</sup>، محمد سالارباده<sup>۲</sup>، علی دریجانی<sup>۳</sup>

۱. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده ریاضیات و محاسبات نرم، مجتمع آموزش عالی بم، کرمان، ایران. رایانامه: [frouzesh@bam.ac.ir](mailto:frouzesh@bam.ac.ir)
۲. فارغ التحصیل ارشد، دانشکده ریاضی، شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران. رایانامه: [fmohamadf5395@gmail.com](mailto:fmohamadf5395@gmail.com)
۳. گروه ریاضی، دانشکده ریاضیات و محاسبات نرم، مجتمع آموزش عالی بم، کرمان، ایران. رایانامه: [a.darjani@bam.ac.ir](mailto:a.darjani@bam.ac.ir)

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	در این مقاله، برخی از انواع ایده‌آل‌های حالت مانند: ایده‌آل‌های حالت سرسخت $n$ -لایه و ایده‌آل‌های حالت بولی $n$ -لایه را در $MV$ -جبرهای حالت معرفی می‌کنیم و سپس به بررسی رابطه میان ایده‌آل‌های حالت سرسخت $n$ -لایه با سایر ایده‌آل‌های حالت در یک $MV$ -جبر حالت می‌پردازیم. در پایان، جبرهای خارج قسمتی القایی توسط ایده‌آل‌های حالت سرسخت $n$ -لایه را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۵/۰۶	
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۴/۱۳	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۴/۱۷	
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۸/۲۰	
واژه‌های کلیدی:	
ایده‌آل‌های حالت ( $n$ -لایه)	
سرسخت، $n$ -لایه بولی،	
حالت موضعا متناهی،	
نیمه ساده،	

استناد: فروزش، فرشته؛ سالارباده، محمد؛ و دریجانی، علی (۱۴۰۳). ایده‌آل‌های سرسخت  $n$ -لایه حالت در  $MV$ -جبرهای حالت. پژوهش‌های ریاضی، ۱۰ (۳)، ۱۰۰ - ۱۲۲.



## مقدمه

اولین بار  $MV$ -جبرها، بوسیله چانگ<sup>۱</sup> در سال ۱۹۵۸ معرفی شدند [4]. در واقع آنها یک ساختار جبری از منطق بینهایت ارزشی لوکاسویچ<sup>۲</sup> هستند و نظریه آنها بعد از سال ۱۹۸۶ توسعه داده شد [4]. همچنین ماندیسی<sup>۳</sup> نشان داد یک هم ارزی رسته ای بین رسته  $MV$ -جبرها و رسته  $l$ -گروههای آبلی با یک قوی وجود دارد، این رسته از جبرها توسط بسیاری از محققان مورد مطالعه قرار گرفت [21].

نظریه ایده آنها یک نقش اصلی در  $MV$ -جبرها بازی می‌کند و برای مشخص کردن  $MV$ -جبرها مفید است. پس از آن، معتمد<sup>۴</sup> و برومند<sup>۵</sup> فیلترهای سرسخت  $n$ -لایه در  $BL$ -جبرها را معرفی کردند [19]. فروزش<sup>۶</sup> و دیگران نیز ایده‌آلهای سرسخت در  $MV$ -جبرها را معرفی کردند و رابطه میان آنها با سایر ایده‌آلهای بررسی کردند [12].

40 سال بعد از بوجود آمدن  $MV$ -جبرها، حالتها روی  $MV$ -جبرها بوسیله ماندیسی مطرح شدند و در جهت اندازه میانگین ارزش درستی گزاره‌ها در منطق لوکاسویچ، که تعمیم اندازه احتمال روی جبرهای بولی هستند مورد استفاده قرار گرفتند [20].

در دهه آخر، نظریه حالتها روی  $MV$ -جبرها و ساختارهای نسبی آنها توسط بسیاری از محققان مانند: کهر<sup>۷</sup> و ماندیسی [18]، کروپا<sup>۸</sup> [17]، دوارنسکی<sup>۹</sup> و راجانک<sup>۱۰</sup> [9]، جور جسیکیو<sup>۱۱</sup> [15]، و دیگران مورد مطالعه قرار گرفتند. حالتها روی  $MV$ -جبرها، توسط فلامینو<sup>۱۲</sup> و مونتگانا<sup>۱۳</sup> عمیقاً مورد بررسی قرار گرفتند [13] و [14]. همچنین، آن‌ها یک عمل یکتایی  $\sigma$  روی  $MV$ -جبرها تعریف کردند که خواص عادی حالتها را حفظ می‌کند.

سینگیو<sup>۱۴</sup> مفهوم  $BL$ -جبر حالت را به عنوان تعمیمی از مفهوم یک  $MV$ -جبر حالت معرفی کرد [6] به همین ترتیب، مفهوم تعمیم یافته آن توسط دوارنسکی ارائه شد [9] دوارنسکی، به طور غیر مستقیم توصیف کاملی از همریختی  $BL$ -جبرهای ریختار حالت ارائه داد که سرانجام به یک نتیجه مشابه از دی نولا<sup>۱۵</sup> و دوارنسکی تعمیم داده شد [7] و دی نولا آن را ادامه داد [8]. پس از آن باتر<sup>۱۶</sup> و دوارنسکی توصیفی کاملاً غیر مستقیم از  $BL$ -جبرهای حالت ساده نشدنی ثابت مطرح کرده و نظریه‌های جامع از جبرهای ریختار حالت ارائه دادند [3].

در این مقاله، مفاهیم ایده‌آلهای حالت مانند: ایده‌آل‌های حالت بولی  $n$ -لایه و ایده‌آلهای حالت سرسخت  $n$ -لایه را در یک  $MV$ -جبر حالت  $(A, \sigma)$  تعریف کرده و قضایای مربوطه را ارائه داده ایم. همچنین، توصیفی از ایده‌آلهای حالت سرسخت  $n$ -لایه و ایده‌آلهای حالت بولی  $n$ -لایه ارائه داده و روابط میان ایده‌آلهای حالت سرسخت  $n$ -لایه با سایر ایده‌آلهای

<sup>1</sup> C. C. Chang

<sup>2</sup> Lukasiewicz

<sup>3</sup> D. Mundici

<sup>4</sup> S. Motamed

<sup>5</sup> A. Borumand

<sup>6</sup> F. Forouzes

<sup>7</sup> J. Kuher

<sup>8</sup> A. Kroupa

<sup>9</sup> A. Dvurečenskij

<sup>10</sup> J. Rachunek

<sup>11</sup> G. Georgescu

<sup>12</sup> T. Flaminio

<sup>13</sup> F. Montagna

<sup>14</sup> L. C. Ciungu

<sup>15</sup> A. Di Nola

<sup>16</sup> M. Botur

در یک  $MV$ -جبر حالت  $(A, \sigma)$  را بررسی کرده ایم. در ادامه، نشان می‌دهیم اگر  $I$  یک ایده‌آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  باشد، آنگاه  $(A/I, \bar{\sigma})$  یک  $MV$ -جبر حالت موضعاً متناهی است.

### ۱. پیشنیازها

در این بخش، به مطالعه برخی از تعاریف و قضایای مورد نیاز در این مقاله می‌پردازیم.

**تعریف ۱،۱ [5]** اگر  $L = (L, \wedge, \vee, \cdot, 1)$  یک مشبکه کراندار باشد، یک عضو  $a \in L$  را متممدار گوییم، اگر

$$a \wedge b = 0 \text{ و } a \vee b = 1 \text{ دو شرط}$$

مجموعه همه عضوهای متممدار  $L$  را با  $B(L)$  نشان می‌دهند.

**تعریف ۲،۱ [2]** جبر  $(L, \wedge, \vee, *, \cdot, 1)$  از نوع  $(2, 2, 1, 0, 0)$  یک جبر بولی است، اگر  $(L, \wedge, \vee)$  یک مشبکه

باشد. به قسمی که برای هر  $x, y, z \in L$  دارای خواص زیر باشد:

$$; x \vee 1 = 1, x \wedge 0 = 0 \quad (1)$$

$$; x \wedge x^* = 0, x \vee x^* = 1 \quad (2)$$

$$. x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad (3)$$

**تعریف ۳،۱ [4]** جبر  $(A, \oplus, *, \cdot, 0)$  از نوع  $(2, 1, 0)$  یک  $MV$ -جبر است، اگر در شرایط زیر صدق کند:

$$(MV1) \quad (A, \oplus, 0) \text{ یک تکواره آبلی است.}$$

$$. (a^*)^* = a \quad (MV2)$$

$$; 0^* \oplus a = 0^* \quad (MV3)$$

$$. (a^* \oplus b)^* \oplus b = (b^* \oplus a)^* \oplus a \quad (MV4)$$

ثابت ۱ و عملهای کمکی  $\odot, \ominus, \odot$  و  $\wedge, \vee$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$; a \odot b = (a^* \oplus b^*)^* \quad (1)$$

$$; a \ominus b = a \odot b^* \quad (2)$$

$$; 1 = 0^* \quad (3)$$

$$. a \vee b = a \oplus (b \odot a^*) \text{ و } a \wedge b = a \odot (b \oplus a^*) \quad (4)$$

که از اینرو  $(A, \wedge, \vee)$  یک مشبکه توزیع پذیر با ۰ و ۱ می شود که  $B(L(A))$  عناصر متمم دار  $L(A)$  می باشند که با  $B(A)$  نیز نمایش می دهند.

در ادامه، در سرتاسر مقاله، منظور از  $A$ ، یک  $MV$ -جبر است.

تعریف ۴،۱ [5] یک عضو  $x \in A$  دارای مرتبه  $n$  است، اگر  $n$  کوچکترین عدد طبیعی

(در صورت وجود) باشد به قسمی که  $nx = 1$  (جاییکه  $nx = x \oplus x \oplus \dots \oplus x$ ) و آن را به صورت  $ord(x) = n$  نشان می دهیم. در این حالت گوئیم  $x$  دارای مرتبه متناهی است و می نویسیم  $ord(x) < \infty$ .

یک  $MV$ -جبر  $A$  را موضعاً متناهی گوئیم، هرگاه هر عضو نافرش دارای مرتبه متناهی باشد.

لم ۵،۱ [5] برای هر  $x, y \in A$  شرایط زیر معادلند:

$$(1) \quad x^* \oplus y = 1$$

$$(2) \quad x \odot y^* = 0$$

$$(3) \quad \text{یک عضو } z \in A \text{ وجود دارد بطوریکه } z \oplus x = y$$

$$(4) \quad y = x \oplus (y \ominus x)$$

تعریف ۶،۱ [5] برای هر  $x, y \in A$ ،  $x \leq y$  اگر و تنها اگر  $y$  و  $x$  در یکی از شرایط معادل (۴) - (۱) در

لم بالا صدق کنند.

تعریف ۷،۱ [5] برای هر  $x, y \in A$  تابع فاصله چانگ، در یک  $MV$ -جبر به صورت زیر است:

$$d: A \times A \rightarrow A, \quad d(x, y) = (x \odot y^*) \oplus (y \odot x^*).$$

لم ۸،۱ [5] برای  $x, y, z \in A$  خواص زیر برقرار است:

$$(1) \quad x \leq y \text{ اگر و تنها اگر } x^* \leq y^*$$

$$(2) \quad \text{اگر } x \leq y \text{ آنگاه } x \odot z \leq y \odot z \text{ و } x \oplus z \leq y \oplus z$$

$$(3) \quad x \odot y \leq x, y \text{ و } x \oplus y \leq x, y \text{ و } x \odot y \leq x \text{ و } x \leq nx \text{ و } x^n = x \odot x \odot \dots \odot x$$

$$(4) \quad x \odot x^* = 0 \text{ و } x \oplus x^* = 1$$

$$(5) \quad \text{اگر } x \in B(A) \text{، آنگاه برای هر } y \in A \text{، } x \wedge y = x \odot y \text{ و } x \vee y = x \oplus y$$

$$(6) \quad x \odot y \leq z \text{ اگر و تنها اگر } x \leq y^* \oplus z$$

(۷) اگر  $x \leq y$  و  $z \leq t$ ، آنگاه  $x \oplus z \leq y \oplus t$

تعریف ۹،۱ [5] یک زیرمجموعه ناتهی  $I$  یک ایده‌آل از  $A$  گوییم هرگاه

(۱) اگر  $x \in I$  و  $y \in A$  و  $y \leq x$ ، آنگاه  $y \in I$ .

(۲) اگر  $x, y \in I$ ، آنگاه  $x \oplus y \in I$

تعریف ۱۰،۱ [5] فرض کنید  $A$  و  $B$  دو  $MV$ -جبر باشند. تابع  $f: A \rightarrow B$  را  $MV$ -همریختی گوییم اگر

(۱)  $f(0) = 0$

(۲)  $f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y)$

(۳)  $f(x^*) = f(x)^*$

تعریف ۱۱،۱ [5] فرض کنید  $I$  یک ایده‌آل از  $A$  است. رابطه همنهشتی  $\sim_I$  را روی  $A$  به صورت زیر تعریف

می‌کنیم:

$$x \sim_I y \Leftrightarrow d(x, y) \in I.$$

مجموعه رده‌های همنهشتی  $A$  را با  $A/I$  نمایش می‌دهیم که برابر است با

$$A/I = \{x/I : x \in A\},$$

بطوریکه  $x/I = \{y \in A : x \sim_I y\}$  است.

ملاحظه ۱۲،۱ [5] در تعریف قبل، به آسانی می‌توان نتیجه گرفت:

$$x \in I \Leftrightarrow x/I = 0/I$$

و  $(A/I, \oplus, *, \circ)$  با عملهای

$$x/I \oplus y/I = (x \oplus y)/I \quad \text{و} \quad (x/I)^* = x^*/I$$

یک  $MV$ -جبر است.

در این حالت روابط زیر برقرار است:

$$d(x, y) \in I \quad \text{اگر تنها و اگر} \quad x/I = y/I$$

همچنین برای هر  $x, y \in A$  داریم:

$$x \odot y^* \in I \text{ اگر تنها و اگر } x/I \leq y/I$$

تعریف ۱۳،۱ [11] اگر  $I$  یک ایده آل سره از  $A$  باشد، در این صورت اشتراک همه ایده آلهای ماکسیمال  $A$  شامل  $I$  را رادیکال  $I$  تعریف می‌کنند و آن را با  $Rad(I)$  نمایش می‌دهند.

قضیه ۱۴،۱ [11] اگر  $I$  یک ایده آل سره از  $A$  باشد، نتیجه می‌شود:

$$Rad(I) = \{a \in A: na \odot a \in I, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

تعریف ۱۵،۱ [1]  $MV$ -جبر  $A$  را نیمه ساده گویند، اگر و تنها اگر غیر بدیهی باشد و  $Rad(A) = \{0\}$ .

تعریف ۱۶،۱ [5] یک  $MV$ -جبر  $A$  را ساده می‌گویند، اگر  $A$  غیر بدیهی باشد و  $\{0\}$  تنها ایده آل سره آن باشد.

تعریف ۱۷،۱ [12] ایده‌آل سره  $I$  از  $A$  را سرسخت گویند، هرگاه برای هر  $x, y \in A - I$

$$y \odot x^* \in I \quad \text{و} \quad x \odot y^* \in I$$

تعریف ۱۸،۱ [13] یک  $MV$ -جبر حالت یک جفت  $(A, \sigma)$  است بطوریکه  $A$  یک  $MV$ -جبر است و  $\sigma: A \rightarrow A$

یک عمل یکتایی به روی  $A$  است به طوری که برای هر  $x, y \in A$  در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$; \sigma(1) = 1(۱)$$

$$; \sigma(x^*) = \sigma(x)^*(۲)$$

$$; \sigma(x \oplus y) = \sigma(x) \oplus \sigma(y \ominus (x \odot y))(۳)$$

$$. \sigma(\sigma(x) \oplus \sigma(y)) = \sigma(x) \oplus \sigma(y)(۴)$$

لم ۱۹،۱ [13] در یک  $MV$ -جبر حالت  $(A, \sigma)$ ، برای هر  $x, y \in A$  ویژگیهای زیر برقرار است:

$$; \sigma(0) = 0 (a)$$

$$; \sigma(x) \leq \sigma(y) \text{ آنگاه } x \leq y \text{ اگر } (b)$$

$$; \sigma(x \oplus y) = \sigma(x) \oplus \sigma(y) \text{ آنگاه } y \leq x \text{ و } \sigma(x \oplus y) \leq \sigma(x) \oplus \sigma(y) (c)$$

$$; \sigma(x \ominus y) = \sigma(x) \ominus \sigma(y) \text{ آنگاه } y \leq x \text{ و } \sigma(x \ominus y) \geq \sigma(x) \ominus \sigma(y) (d)$$

$$(e) \text{ می‌دانیم } d(x, y) = (x \ominus y) \oplus (y \ominus x) \text{ در نتیجه داریم}$$

$$; d(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \sigma(d(x, y))$$

$$; \sigma(x) \odot \sigma(y) = 0 \text{ آنگاه } x \odot y = 0 \text{ بنابراین اگر } \sigma(x) \odot \sigma(y) \leq \sigma(x \odot y) (f)$$

$$; \sigma(\sigma(x)) = \sigma(x) \quad (g)$$

$$; \sigma(\sigma(x) \odot \sigma(y)) = \sigma(x) \odot \sigma(y) \quad (h)$$

(i) تصویر  $\sigma(A)$  از  $A$  تحت  $\sigma$ ، یک زیر  $MV$ -جبر از  $A$  است.

تعریف ۲۰،۱ [13] یک  $\sigma$ -ایده‌آل (ایده‌آل حالت) از یک  $MV$ -جبر حالت  $(A, \sigma)$ ، یک  $MV$ -ایده‌آل بسته تحت  $\sigma$  است. به عبارت دیگر  $I \subseteq \sigma(I)$  است.

مجموعه‌ی  $\sigma$ -ایده‌آلهای  $(A, \sigma)$  را با  $I_\sigma(A)$  نشان می‌دهند.

تعریف ۲۱،۱ [13] یک ایده‌آل حالت سره از  $(A, \sigma)$  یک ایده‌آل حالت ماکسیمال نامیده می‌شود اگر به طور سره شامل هیچ ایده‌آل حالت سره‌ای از  $(A, \sigma)$  نباشد.

لم ۲۲،۱ [13] یک ایده‌آل حالت  $I$  یک ایده‌آل حالت ماکسیمال است اگر و تنها اگر برای هر  $a \notin I$ ، عدد صحیح  $n > 0$  وجود داشته باشد. بطوریکه:

$$(n\sigma(a))^* = \sigma(a^*)^n \in I.$$

لم ۲۳،۱ [13] فرض کنید  $(A, \sigma)$  یک  $MV$ -جبر حالت باشد و  $I$  یک ایده‌آل حالت از  $A$  باشد و  $a \notin I$ . آنگاه مجموعه

$$(I, a]_\sigma = \{x \in A : x \leq i \oplus n(a \oplus \sigma(a)), i \in I, n \geq 1\}.$$

یک ایده‌آل حالت است که به آن ایده‌آل حالت تولید شده توسط  $I$  و  $a$  می‌گوییم. در حالت خاص،

$$[a]_\sigma = \{x \in A : x \leq n(a \oplus \sigma(a)), n \geq 1\}.$$

گزاره ۲۴،۱ [13] اگر  $I$  یک ایده‌آل حالت از  $(A, \sigma)$  باشد، آنگاه  $\sigma(I)$  یک ایده‌آل روی  $\sigma(A)$  است و

$$\sigma(I) = I \cap \sigma(A)$$

گزاره ۲۵،۱ [13] اگر  $I$  یک ایده‌آل از  $\sigma(A)$  باشد، آنگاه  $\sigma^{-1}(I)$  یک ایده‌آل حالت از  $A$  است.

تعریف ۲۶،۱ [10] یک ایده‌آل حالت  $I$  از  $(A, \sigma)$  یک ایده‌آل حالت بولی از  $(A, \sigma)$  نامیده می‌شود، اگر

$$(x \oplus \sigma(x)) \wedge (x^* \oplus \sigma(x^*)) \in I.$$

تعریف ۲۷،۱ [10] یک  $MV$ -جبر حالت  $(A, \sigma)$  یک جبر حالت بولی نامیده می‌شود اگر برای هر  $x, y \in A$

$$\sigma(x) \wedge \sigma(x^*) = 0 \quad \text{یا} \quad \sigma(x) \vee \sigma(x^*) = 1$$

تعریف ۲۸،۱ [10] فرض کنید  $P$  یک ایده آل حالت سره از  $(A, \sigma)$  باشد.  $P$  را یک ایده آل حالت اول گوئیم اگر برای هر دو عضو  $a, b \in A$ ،  $(a \oplus \sigma(a)) \wedge (b \oplus \sigma(b)) \in P$  یا  $a \in P$  یا  $b \in P$ .

تعریف ۲۹،۱ [10] یک  $MV$ -جبر حالت  $(A, \sigma)$ ، حالت موضعاً متناهی نامیده می‌شود، اگر برای هر عضو غیر صفر  $a \in A$ ،  $\sigma(a)$  دارای مرتبه متناهی باشد.

قضیه ۳۰،۱ [10]  $M$  یک ایده آل حالت ماکسیمال از  $(A, \sigma)$  است اگر و تنها اگر  $(A/M, \bar{\sigma})$  حالت موضعاً متناهی باشد.

تعریف ۳۱،۱ [20] یک  $\sigma$ -ایده آل سره  $I$  از  $(A, \sigma)$  یک ایده آل حالت اولیه نامیده می‌شود، اگر برای هر  $a, b \in A$  که  $a \odot b \in I$ ، یک  $n \geq 1$  وجود داشته باشد بطوریکه:

$$\sigma(a)^n \in I \quad \text{یا} \quad \sigma(b)^n \in I$$

## ۲. ایده آلهای حالت سرسخت $n$ -لایه در $MV$ -جبرهای حالت

تعریف ۲،۱ فرض کنید  $I$  یک ایده آل سره حالت از  $(A, \sigma)$  باشد.  $I$  را یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  نامند، اگر در شرایط زیر صدق کند:

$$\forall x, y \in A: x, y \notin I \Rightarrow \sigma(nx)^* \odot \sigma(y) \in I \quad \text{و} \quad \sigma(x) \odot \sigma(ny)^* \in I.$$

در حالت خاص، ایده آلهای حالت سرسخت ۱-لایه، ایده آلهای حالت سرسخت هستند.

مثال ۲،۲ فرض کنید  $A = \{0, a, b, 1\}$  با  $0 < a, b < 1$  باشد. همچنین عملهای  $\odot$ ،  $\oplus$  و  $*$  را به صورت

زیر تعریف می‌کنیم:

$\odot$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

$\oplus$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

$*$	0	a	b	1
	1	b	a	0

در این صورت  $(A, \oplus, \odot, *, 0, 1)$  یک  $MV$ -جبر است [16].

(i) تعریف می‌کنیم:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x = 1 \\ b & \text{اگر } x = a \\ a & \text{اگر } x = b \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد که  $(A, \sigma)$  یک  $MV$ -جبر حالت است [10].

(ii) تعریف می‌کنیم:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x = 1, a \\ 0 & \text{اگر } x = 0, b \end{cases}$$

به آسانی می‌توان نشان داد که  $(A, \sigma)$  یک  $MV$ -جبر حالت است. در قسمت (ii)، بوضوح  $I = \{0, b\}$  یک ایده‌آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  است. ولی در قسمت (i)،  $I = \{0\}$  یک ایده‌آل حالت سرسخت ۱-لایه از  $(A, \sigma)$  نیست. زیرا به ازای  $a, b \in A - I$  داریم:

$$\sigma(a) \odot \sigma(b)^* = b \odot b = b \notin I \quad \text{و} \quad \sigma(a)^* \odot \sigma(b) = a \odot a = a \notin I$$

قضیه ۳,۲ فرض کنید  $I$  یک ایده آل حالت از سره  $(A, \sigma)$  باشد. در این صورت  $I$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه است اگر و تنها اگر برای هر  $x \in A$

$$x \in I \quad \text{یا} \quad (\exists m \in \mathbb{N}) \quad m\sigma(nx)^* \in I.$$

برهان. فرض کنید که  $I$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه باشد و  $x \notin I$  از اینکه  $I$  سره است،  $1 \notin I$ . در نتیجه داریم:

$$\sigma(nx)^* = \sigma(nx)^* \odot 1 \in I \quad \text{و} \quad \cdot = \sigma(x) \odot \sigma(n1)^* \in I$$

بنابراین برای  $m = 1$  داریم:

$$m\sigma(nx)^* \in I.$$

برعکس، فرض کنید  $x, y \notin I$ . نشان می‌دهیم که:

$$\sigma(ny)^* \odot \sigma(x) \in I \quad \text{و} \quad \sigma(nx)^* \odot \sigma(y) \in I$$

بنا به فرض، چون  $x, y \notin I$  پس اعداد طبیعی  $k, m$  وجود دارند بطوریکه:

$$k\sigma(ny)^* \in I \quad \text{و} \quad m\sigma(nx)^* \in I$$

لذا داریم:

$$\sigma(y) \odot \sigma(nx)^* \leq \sigma(nx)^* \leq m\sigma(nx)^*$$

و

$$\sigma(x) \odot \sigma(ny)^* \leq \sigma(ny)^* \leq k(\sigma(ny)^*)$$

در نتیجه داریم:

$$\sigma(y) \odot \sigma(nx)^* \in I \quad \text{و} \quad \sigma(x) \odot \sigma(ny)^* \in I$$

بنابراین  $I$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  است.

نتیجه ۴,۲ فرض کنید  $I$  یک ایده آل حالت سره از  $(A, \sigma)$  باشد. در این صورت  $I$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه است اگر و تنها اگر برای هر  $x \in A$

$$x \in I \quad \text{یا} \quad \sigma(nx)^* \in I$$

برهان. اثبات به کمک تعریف ایده آل و قضیه ۳,۲ بدست می‌آید.

گزاره ۵,۲ هر ایده‌آل حالت سرسخت  $n$ -لایه یک ایده‌آل حالت سرسخت  $(n+1)$ -لایه است.

برهان. فرض کنید  $I$  یک ایده‌آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  باشد و  $x, y \in A - I$ . پس طبق فرض

داریم:

$$\sigma(nx)^* \odot \sigma(y) \in I \quad \text{و} \quad \sigma(x) \odot \sigma(ny)^* \in I$$

حال باید نشان داد که:

$$\sigma((n+1)x)^* \odot \sigma(y) \in I \quad \text{و} \quad \sigma(x) \odot \sigma((n+1)y)^* \in I$$

بنا به لم ۱۹,۱ (b) داریم:

$$\sigma(ny) \leq \sigma((n+1)y)$$

همچنین، بنا به لم ۱, ۸, (۲), (۱) نتیجه می‌گیریم که:

$$\sigma((n+1)y)^* \odot \sigma(x) \leq \sigma(ny)^* \odot \sigma(x) \in I.$$

بطور مشابه داریم:

$$\sigma((n+1)x)^* \odot \sigma(y) \leq \sigma(nx)^* \odot \sigma(y) \in I.$$

بنا بر ایده‌آل بودن  $I$  داریم:

$$\sigma((n+1)x)^* \odot \sigma(y) \in I \quad \text{و} \quad \sigma((n+1)y)^* \odot \sigma(x) \in I$$

قضیه ۶,۲ اگر  $I$  یک ایده‌آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  باشد. آنگاه  $I$  یک ایده‌آل حالت ماکسیمال از

$(A, \sigma)$  است.

برهان. فرض کنید  $I$  یک ایده‌آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  باشد بطوریکه ماکسیمال نباشد. پس یک ایده‌آل حالت

سره  $J$  وجود دارد بطوریکه  $I \subset J$ . حال فرض کنید  $a \in J - I$ .

پس طبق قضیه ۳,۲،  $m \in \mathbb{N}$  ای وجود دارد بطوریکه:

$$m\sigma(na)^* \in I.$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$\sigma(na)^* \leq m\sigma(na)^*$$

در نتیجه طبق تعریف ایده آل  $\sigma(na)^* \in I$  و به همین ترتیب  $\sigma(na)^* \in J$  چون  $a \in J$ ، پس بنا به ایده آل بودن  $J$   $na \in J$  پس  $\sigma(na) \in J$ . بنابراین داریم:

$$1 = \sigma(na) \oplus \sigma(na)^* \in J.$$

که یک تناقض است.

مثال زیر نشان می‌دهد عکس قضیه ۶،۲ برقرار نیست.

مثال ۷،۲ در مثال ۲،۲ (i)، به آسانی می‌توان بررسی کرد که  $I = \{0\}$  یک ایده آل حالت ماکسیمال است.

مثال زیر نشان می‌دهد که ایده آلهای حالت بولی وجود دارند و یک ایده آل حالت ممکن است یک ایده آل حالت

بولی نباشد.

مثال ۸،۲ فرض کنید  $A = \{0, a, b, c, d, 1\}$  با  $0 < a, b < c < 1$  و

$0 < b < d < 1$  باشد. عملهای  $\oplus$ ،  $\odot$  و  $*$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\odot$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	0	a
b	0	0	0	0	b	b
c	0	a	0	a	b	c
d	0	0	b	b	d	d
1	0	a	b	c	d	1

$\oplus$	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	a	c	c	1	1
b	b	c	d	1	d	1
c	c	c	1	1	1	1
d	d	1	d	1	d	1
1	1	1	1	1	1	1

$*$	0	a	b	c	d	1
	1	d	c	b	a	0

در این صورت  $(A, \oplus, \odot, *, 0, 1)$  یک  $MV$ -جبر است [16].

تعریف می‌کنیم:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } x = 0, b, d \\ 1 & \text{اگر } x = 1, c, a \end{cases}$$

به آسانی می‌توانیم نشان دهیم که  $(A, \sigma)$  یک  $MV$ -جبر حالت است و  $I_1 = \{0\}$  و

$I_2 = \{0, b, d\}$  و  $A$  ایده‌آلهای حالتی از  $(A, \sigma)$  هستند [10]. همچنین، با یک محاسبه ساده می‌توان نشان داد که  $I_2$  یک ایده‌آل حالت بولی از  $(A, \sigma)$  است اما  $I_1 = \{0\}$  یک ایده‌آل حالت بولی از  $(A, \sigma)$  نیست. زیرا:

$$(c \oplus \sigma(c)) \wedge (b \oplus \sigma(c)^*) = 1 \wedge b = b \notin \{0\}.$$

**تعریف ۹،۲** یک ایده‌آل حالت  $I$  از  $(A, \sigma)$  یک ایده‌آل حالت بولی  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  نامیده می‌شود اگر برای هر  $x \in A$

$$(x \oplus \sigma(x)) \wedge ((nx)^* \oplus \sigma(nx)^*) \in I.$$

مثال زیر نشان می‌دهد که ایده‌آلهای حالت بولی  $n$ -لایه وجود دارند و یک ایده‌آل حالت ممکن است یک ایده‌آل حالت بولی  $n$ -لایه نباشد.

**مثال ۱۰،۲** در مثال ۸،۲، با یک محاسبه ساده می‌توان نشان داد که  $I_2 = \{0, b, d\}$  یک ایده‌آل حالت بولی  $2$ -لایه از  $(A, \sigma)$  است. اما  $I_1 = \{0\}$  به عنوان یک ایده‌آل حالت، یک ایده‌آل حالت بولی  $1$ -لایه از  $(A, \sigma)$  نیست، زیرا:

$$(c \oplus \sigma(c)) \wedge (c^* \oplus \sigma(c)^*) = 1 \wedge b = b \notin \{0\}.$$

**قضیه ۱۱،۲** (خاصیت توسیع برای ایده‌آلهای حالت بولی  $n$ -لایه) فرض کنید که  $I$  و  $J$  دو ایده‌آل حالت سره باشند بطوریکه  $I \subseteq J$ . اگر  $I$  یک ایده‌آل حالت بولی  $n$ -لایه باشد، آنگاه  $J$  نیز یک ایده‌آل حالت بولی  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  است.

برهان. فرض کنید  $I$  یک ایده‌آل حالت بولی  $n$ -لایه باشد و  $I \subseteq J$ ، در این صورت برای هر  $x \in A$

$$(x \oplus \sigma(x)) \wedge ((nx)^* \oplus \sigma(nx)^*) \in I \subseteq J.$$

از این رو برای هر  $x \in A$ ،  $(x \oplus \sigma(x)) \wedge ((nx)^* \oplus \sigma(nx)^*) \in J$ . در نتیجه  $J$  یک ایده‌آل حالت بولی  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  است.

**قضیه ۱۲،۲** فرض کنید  $I$  یک ایده‌آل حالت بولی  $n$ -لایه و اول از  $(A, \sigma)$  باشد. در این صورت  $I$  یک ایده‌آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  است.

برهان. فرض کنید  $I$  یک ایده‌آل حالت بولی  $n$ -لایه و اول از  $(A, \sigma)$  باشد. در این صورت برای هر  $x \in A$  داریم:

$$(x \oplus \sigma(x)) \wedge ((nx)^* \oplus \sigma(nx)^*) \in I.$$

حال چون  $I$  ایده آل حالت اول است. نتیجه می‌گیریم که:

$$x \in I \quad \text{یا} \quad (nx)^* \in I.$$

به همین ترتیب چون  $I$  ایده آل حالت است داریم:

$$x \in I \quad \text{یا} \quad \sigma(nx)^* \in I.$$

در نتیجه طبق لم ۴،۲،  $I$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  است.

قضیه ۱۳،۲ اگر  $I$  یک ایده آل حالت بولی  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  باشد. آنگاه  $I$  ایده آل حالت بولی  $(n+1)$ -لایه از

$(A, \sigma)$  است.

برهان. فرض کنید  $I$  یک ایده آل حالت بولی  $n$ -لایه باشد. باید نشان دهیم برای هر  $x \in A$

$$(x \oplus \sigma(x)) \wedge (((n+1)x)^* \oplus \sigma((n+1)x)^*) \in I.$$

چون  $nx \leq (n+1)x$  و بنا به لم ۱۹،۱ (b)،  $\sigma(nx) \leq \sigma((n+1)x)$ . همچنین بنا به لم ۸،۱ (a)،

$$((n+1)x)^* \leq (nx)^*$$

و در نتیجه  $\sigma((n+1)x)^* \leq \sigma(nx)^*$  از این رو داریم:

$$(x \oplus \sigma(x)) \wedge (((n+1)x)^* \oplus \sigma((n+1)x)^*) \leq (x \oplus \sigma(x)) \wedge ((nx)^* \oplus \sigma(nx)^*) \in I.$$

در نتیجه:

$$(x \oplus \sigma(x)) \wedge (((n+1)x)^* \oplus \sigma((n+1)x)^*) \in I.$$

بنابراین  $I$  یک ایده آل حالت بولی  $(n+1)$ -لایه از  $(A, \sigma)$  است.

تعریف ۱۴،۲ فرض کنید  $(A, \tau)$  و  $(B, \sigma)$  دو  $MV$ -جبر حالت باشند آنگاه  $f: A \rightarrow B$  را یک  $MV$ -همریختی

حالت گوییم اگر  $f$  همریختی  $MV$ -جبری باشد و برای هر  $x \in A$

$$f(\tau(x)) = \sigma(f(x)).$$

قضیه ۱۵،۲ فرض کنید  $f: A \rightarrow B$  یک  $MV$ -همریختی حالت باشد و  $I$  یک ایده آل حالت بولی  $n$ -لایه از

$(B, \sigma)$  باشد، تصویر معکوس  $I$  یک ایده آل حالت بولی  $n$ -لایه از  $(A, \tau)$  است.

برهان. فرض کنید  $I$  یک ایده آل حالت بولی  $n$ -لایه از  $(B, \sigma)$  و  $x \in A$  باشد، باید نشان دهیم:

$$(x \oplus \tau(x)) \wedge ((nx)^* \oplus \tau(nx)^*) \in f^{-1}(I).$$

برای  $x \in A$  خواهیم داشت  $f(x) \in B$ . چون  $I$  یک ایده آل حالت بولی  $n$ -لایه است، لذا داریم:

$$(f(x) \oplus \sigma(f(x))) \wedge ((nf(x))^* \oplus \sigma(nf(x))^*) \in I$$

$$\Rightarrow (f(x) \oplus f(\tau(x))) \wedge (f(nx)^* \oplus \sigma(f(nx))^*) \in I,$$

$$\Rightarrow f(x \oplus \tau(x)) \wedge (f(nx)^* \oplus f(\tau(nx))^*) \in I,$$

$$\Rightarrow f(x \oplus \tau(x)) \wedge f((nx)^* \oplus \tau(nx)^*) \in I,$$

$$\Rightarrow f[(x \oplus \tau(x)) \wedge ((nx)^* \oplus \tau(nx)^*)] \in I,$$

$$\Rightarrow [(x \oplus \tau(x)) \wedge ((nx)^* \oplus \tau(nx)^*)] \in f^{-1}(I).$$

بنابراین  $f^{-1}(I)$  یک ایده آل حالت بولی  $n$ -لایه از  $(A, \tau)$  است.

**نکته:** فرض کنید  $I$  و  $J$  ایده آلهای حالتی از  $A$  باشند. در این صورت داریم:

$$I \vee J = (I, J] = \{a \in A : a \leq b \oplus c, \exists b \in I, c \in J\}.$$

که یک ایده آل حالت از  $(A, \sigma)$  است. اگر  $I$  یا  $J$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه و  $I \vee J \neq A$  باشد. آنگاه طبق قضیه ۶،۲،  $I$  یک ایده آل حالت ماکسیمال است و چون  $I \subseteq I \vee J$ ، در نتیجه  $I = I \vee J$  که  $I \vee J$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  است.

**نکته:** فرض کنید  $I$  و  $J$  ایده آلهای حالت بولی  $n$ -لایه باشند. آنگاه بنا به قضیه ۱۱،۲،  $I \vee J$  نیز یک ایده آل حالت بولی  $n$ -لایه است.

**لم 16.2**  $\{0\}$  یک ایده آل حالت بولی  $n$ -لایه است اگر و تنها اگر هر ایده آل  $I$  نیز یک ایده آل حالت بولی  $n$ -لایه باشد.

برهان. بنا به قضیه ۱۱،۲، واضح است.

گزاره ۱۷،۲ اگر  $(A, \sigma)$  یک  $MV$ -جبر حالت باشد. آنگاه  $(A/I, \bar{\sigma})$  یک  $MV$ -جبر حالت است. که در آن

$$\bar{\sigma}(x/I) = \sigma(x)/I.$$

برهان. فرض کنید  $I$  یک ایده آل حالت از  $(A, \sigma)$  باشد و  $x, y \in A$ . ابتدا نشان می‌دهیم که  $\bar{\sigma}$  خوش تعریف است. فرض کنید که  $x/I = y/I$ . پس  $d(x, y) \in I$  چون  $I$  یک ایده آل حالت است، پس  $\sigma(d(x, y)) \in I$ . بنا به لم ۱۹،۱ (e)، داریم:

$$d(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \sigma(d(x, y)) \in I$$

پس  $d(\sigma(x), \sigma(y)) \in I$  در نتیجه  $\sigma(x)/I = \sigma(y)/I$  بنابراین  $\bar{\sigma}(x/I) = \bar{\sigma}(y/I)$

اکنون نشان می‌دهیم که  $(A/I, \bar{\sigma})$  یک  $MV$ -جبر حالت است. چون  $A/I$  یک  $MV$ -جبر حالت است، پس

داریم:

$$\bar{\sigma}(1/I) = \sigma(1)/I = 1/I \quad (MV1)$$

$$\bar{\sigma}((x/I)^*) = \bar{\sigma}(x^*/I) = \sigma(x^*)/I = (\sigma(x))^*/I = (\sigma(x)/I)^* = (\bar{\sigma}(x/I))^* \quad (MV2)$$

$$(MV3)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}\left(\frac{x \oplus y}{I}\right) &= \frac{\sigma(x \oplus y)}{I} = \frac{\sigma(x) \oplus \sigma(y \ominus (x \odot y))}{I} = \sigma(x)/I \oplus \sigma(y \ominus (x \odot y))/I \\ &= \bar{\sigma}(x/I) \oplus \bar{\sigma}(y \ominus (x \odot y))/I; \end{aligned}$$

$$(MV4)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(\bar{\sigma}(x/I) \oplus \bar{\sigma}(y/I)) &= \bar{\sigma}(\sigma(x)/I \oplus \sigma(y)/I) = \bar{\sigma}((\sigma(x) \oplus \sigma(y))/I) = \\ &= (\sigma(\sigma(x) \oplus \sigma(y)))/I = (\sigma(x) \oplus \sigma(y))/I = \sigma(x)/I \oplus \sigma(y)/I = \bar{\sigma}(x/I) \oplus \bar{\sigma}(y/I) \end{aligned}$$

قضیه ۱۸،۲  $I$  یک ایده آل حالت بولی  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  است اگر و تنها اگر هر ایده آل  $A/I$  یک ایده آل حالت بولی  $n$ -لایه از  $(A/I, \bar{\sigma})$  باشد.

برهان. فرض کنید  $I$  یک ایده آل حالت بولی  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  باشد. لذا داریم:

$$(x \oplus \sigma(x)) \wedge ((nx)^* \oplus \sigma(nx)^*) \in I$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x \oplus \sigma(x))}{I} \wedge \frac{((nx)^* \oplus \sigma(nx)^*)}{I} = \frac{0}{I}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{I} \oplus \frac{\sigma(x)}{I}\right) \wedge \left(\frac{(nx)^*}{I} \oplus \frac{\sigma(nx)^*}{I}\right) = \frac{0}{I}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{I} \oplus \bar{\sigma}\left(\frac{x}{I}\right)\right) \wedge \left(\frac{(nx)^*}{I} \oplus \bar{\sigma}\left(\frac{(nx)^*}{I}\right)\right) = \frac{0}{I} \in \{[0]\}.$$

لذا  $\{[0]\}$  یک ایده آل حالت بولی  $n$ -لایه از  $(A/I, \bar{\sigma})$  است. لذا بنا به لم ۱۶،۲، نتیجه می‌گیریم که هر ایده آل  $(A/I, \bar{\sigma})$  یک ایده آل حالت بولی  $n$ -لایه است.

لم ۱۹،۲ اگر  $\{0\}$  یک ایده‌آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  باشد. آنگاه تنها ایده‌آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$ ، ایده‌آل حالت  $\{0\}$  است.

برهان. فرض کنید  $I$  یک ایده‌آل حالت دلخواه از  $(A, \sigma)$  باشد. چون  $\{0\} \subseteq I$  و  $\{0\}$  یک ایده‌آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  است. پس طبق قضیه ۶،۲،  $\{0\}$  یک ایده‌آل حالت ماکسیمال است. بنابراین  $I = \{0\}$  یک ایده‌آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  است.

قضیه ۲۰،۲ اگر  $I$  یک ایده‌آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  باشد. آنگاه  $(A/I, \bar{\sigma})$  یک حالت موضعاً متناهی است.

برهان. فرض کنیم که  $I$  یک ایده‌آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  باشد. آنگاه طبق قضیه ۶،۲،  $I$  یک ایده‌آل حالت ماکسیمال از  $(A, \sigma)$  است. همچنین طبق قضیه ۳۰،۱، نتیجه می‌گیریم که  $(A/I, \bar{\sigma})$  یک حالت موضعاً متناهی است.

لم ۲۱،۲ اگر  $\{0\}$  یک ایده‌آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  باشد. آنگاه  $(A, \sigma)$  یک  $MV$ -جبر حالت موضعاً متناهی است.

برهان. فرض کنید که  $\{0\}$  یک ایده‌آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  باشد. لذا بنا به قضیه ۶،۲، نتیجه می‌گیریم که  $\{0\}$  یک ایده‌آل حالت ماکسیمال از  $(A, \sigma)$  می‌باشد. بنابراین  $A/\{0\} \simeq A$  یک حالت موضعاً متناهی است.

در مثال زیر، نشان می‌دهیم که عکس لم بالا درست نیست.

مثال ۲۲،۲ فرض کنید  $A = \{0, 1, 2\}$  با  $0 < 1 < 2$  باشد. عملهای  $\oplus$ ،  $\odot$  و  $*$  را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	2
2	2	2	2

$\odot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	2

$*$	0	1	2
0	2	1	0

بوضوح  $(A, \oplus, \odot, *, 0, 2)$  یک  $MV$ -جبر موضعاً متناهی است [16].

$\sigma$  را یک همانی روی  $A$  در نظر می‌گیریم. در این صورت  $(A, \sigma)$  یک  $MV$ -جبر حالت موضعاً متناهی است. اما  $I = \{0\}$  یک ایده‌آل حالت سرسخت ۱-لایه از  $(A, \sigma)$  نیست. زیرا:

$$\forall 1, 2 \in A - I ; \sigma(1)^* \odot \sigma(2) = 1^* \odot 2 = 1 \odot 2 = 1 \notin I.$$

یادآوری می‌کنیم که یک  $MV$ -جبر حالت  $(A, \sigma)$  نیمه ساده است اگر و تنها اگر غیر بدیهی باشد و  $Rad_\sigma(A) = \{0\}$  [5].

نتیجه ۲۳،۲ اگر  $\{0\}$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  باشد، آنگاه  $(A, \sigma)$  یک  $MV$ -جبر حالت نیمه ساده است.

برهان. فرض کنیم  $\{0\}$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  باشد. در نتیجه طبق قضیه ۶،۲،  $\{0\}$  یک ایده‌آل حالت ماکسیمال از  $(A, \sigma)$  است. پس داریم:  $Rad_\sigma(A) = \{0\}$ . بنابراین  $(A, \sigma)$  یک  $MV$ -جبر حالت نیمه ساده است.

مثال زیر نشان می‌دهد که در حالت کلی عکس نتیجه بالا درست نیست.

مثال ۲۴،۲ در مثال ۳،۲ (i). داریم که  $I = \{0\}$  یک ایده آل حالت از  $(A, \sigma)$  است بطوریکه

$Rad_\sigma(A) = \{0\}$  پس  $(A, \sigma)$  یک  $MV$ -جبر حالت نیمه ساده است. اما  $I = \{0\}$  یک ایده آل حالت سرسخت ۱-لایه از  $(A, \sigma)$  نیست. زیرا به ازای هر  $a, b \in A - I$

$$a = a \odot a = \sigma(b) \odot \sigma(a)^* \notin I \quad \text{و} \quad b = b \odot b = \sigma(a) \odot \sigma(b)^* \notin I$$

قضیه ۲۵،۲ فرض کنید  $I$  یک ایده آل حالت از  $(A, \sigma)$  باشد. در این صورت  $I$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه است اگر و تنها اگر  $[0]$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $A/I$  باشد.

برهان. فرض کنید که  $I$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  باشد. همچنین فرض کنید

$x/I \notin \{[0]\}$ ، طبق لم ۱۶،۲، کفایت نشان دهیم که  $(\sigma(nx)/I)^* \in \{[0]\}$ . چون  $x/I \notin \{[0]\}$ ، پس  $x/I \neq 0/I$  در نتیجه  $d(x, 0) \notin I$ ، پس  $x \notin I$  طبق فرض نتیجه می‌گیریم که  $\sigma(nx)^* \in I$ ، پس داریم:

$$\sigma(nx)^* = d(\sigma(nx)^*, 0) \in I.$$

از طرفی دیگر

$$\bar{\sigma}((nx/I)^*) = \sigma(nx)^*/I \in \{[0]\} \quad \text{یا} \quad \sigma(nx)^*/I = 0/I$$

پس در نتیجه  $\{[0]\}$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  است. لذا بنا برلم ۲،۱۹، نتیجه می‌گیریم که هر ایده آل از  $A/I$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه است.

برعکس، فرض کنید که هر ایده آل حالت از جبر خارج قسمتی  $(A/I, \bar{\sigma})$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه باشد و  $x \in A$  بطوریکه  $x \notin I$  حال باید نشان دهیم که  $\sigma(nx)^* \in I$ . طبق فرض نتیجه می‌گیریم که  $x/I \neq 0/I$  پس در نتیجه داریم:  $x/I \notin \{[0]\}$  حال چون  $\{[0]\}$  یک ایده آل حالت از  $(A/I, \bar{\sigma})$  هست. لذا بنا به فرض،  $\{[0]\}$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه است.

بنابراین  $\bar{\sigma}(nx/I)^* = \sigma(nx)^*/I \in \{[0]\}$  در نتیجه  $\sigma(nx)^*/I = 0/I$  پس  $\sigma(nx)^* \in I$ . بنابراین  $I$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  است.

در قضیه زیر، تصویر معکوس یک ایده‌آل حالت سرسخت  $n$ -لایه تحت یک  $MV$ -همریختی را بررسی می‌کنیم.

**قضیه ۲۶،۲** فرض کنید  $f: A \rightarrow B$  یک  $MV$ -همریختی حالت باشد و  $I$  یک ایده آل حالت سرسخت از  $(B, \sigma)$  باشد. تصویر معکوس  $I$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \tau)$  است.

برهان. فرض کنید  $I$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(B, \sigma)$  و  $x \in A$  باشد. بطوریکه

$x \notin f^{-1}(I)$  در این صورت  $f(x) \notin I$  چون  $I$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(B, \sigma)$  است. طبق لم ۴،۲ و چون  $f$ ،  $MV$ -همریخت حالت است، نتیجه می‌گیریم که:

$$f(\tau(nx)^*) = f(\tau(nx))^* = \sigma(f(nx))^* = \sigma(nf(x))^* \in I.$$

پس در نتیجه  $\tau(nx)^* \in f^{-1}(I)$ . بنابراین  $f^{-1}(I)$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \tau)$  است.

**قضیه ۲۷،۲** اگر  $P$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  باشد، آنگاه  $P$  یک ایده آل حالت اولیه از  $(A, \sigma)$  است.

برهان. فرض کنید  $a \odot b \in P$  بطوریکه برای هر  $n \geq 1$   $\sigma(a)^n \notin P$  چون  $P$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه است و از طرفی داریم  $a \notin P$  و  $1 \notin P$  پس در نتیجه:

$$\sigma(n1)^* \odot \sigma(a) \in P \quad \text{و} \quad \sigma(1) \odot \sigma(na)^* \in P$$

لذا نتیجه می‌گیریم که  $\sigma(na)^* \in P$ . همچنین طبق لم ۱۹،۱  $(f)$ ، داریم:

$$\sigma(a) \odot \sigma(b) \leq \sigma(a \odot b) \in P$$

پس  $\sigma(a) \odot \sigma(b) \in P$  و به همین ترتیب  $\sigma(na)^* \oplus (\sigma(a) \odot \sigma(b)) \in P$  از طرفی دیگر داریم

$\sigma(b) \leq \sigma(na)^* \vee \sigma(b) \in P$  در نتیجه برای  $n = 1$   $\sigma(b) \in P$ . بنابراین  $P$  یک ایده آل حالت اولیه از  $(A, \sigma)$  است.

مثال زیر نشان می‌دهد که یک ایده آل حالت اولیه ممکن است یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه نباشد.

مثال ۲۸،۲ فرض کنید  $A = \{0, a, b, c, d, 1\}$  با  $0 < a, b < c < 1$  و

$0 < b < d < 1$  باشد. عملهای  $\oplus$ ،  $\odot$  و  $*$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\odot$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	0	a
b	0	0	0	0	b	b
c	0	a	0	a	b	c
d	0	0	b	b	d	d
1	0	a	b	c	d	1

$\oplus$	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	a	c	c	1	1
b	b	c	d	1	d	1
c	c	c	1	1	1	1
d	d	1	d	1	d	1
1	1	1	1	1	1	1

$*$	0	a	b	c	d	1
	1	d	c	b	a	0

در این صورت  $(A, \oplus, \odot, *, 0, 1)$  یک  $MV$ -جبر است [۱۶].

فرض کنید  $\sigma$  همانی باشد، به این ترتیب  $(A, \sigma)$  یک  $MV$ -جبر حالت است. واضح است که  $I = \{0, c\}$  یک ایده آل حالت اولیه است. از طرفی چون به ازای  $a, b \in A - I$  داریم:

$$\sigma(a) \odot \sigma(b)^* = a \odot c = a \notin I \quad \text{و} \quad \sigma(b) \odot \sigma(a)^* = b \odot d = b \notin I$$

پس  $I$  یک ایده آل حالت سرسخت ۱-لایه از  $A$  نیست.

گزاره ۲۹،۲ فرض کنید  $(A, \sigma)$  یک  $MV$ -جبر حالت باشد.

(i) اگر  $I$  یک ایده آل سرسخت  $n$ -لایه از  $\sigma(A)$  باشد، آنگاه  $\sigma^{-1}(I)$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از

$(A, \sigma)$  است.

(ii) اگر  $I$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  باشد. آنگاه  $\sigma(I)$  یک ایده آل سرسخت  $n$ -لایه از  $\sigma(A)$  است.

(i) برهان. اگر  $I$  یک ایده آل از  $\sigma(A)$  باشد، آنگاه بنا به گزاره ۲۵،۱، ثابت می‌شود که  $\sigma^{-1}(I)$  یک ایده آل حالت از  $(A, \sigma)$  است. اکنون فرض کنیم که  $I$  یک ایده آل سرسخت  $n$ -لایه از  $\sigma(A)$  باشد. همچنین فرض کنیم  $a \notin \sigma^{-1}(I)$  پس  $\sigma(a) = \sigma(\sigma(a)) \notin I$ . در نتیجه بنا به لم ۱۹،۱ (b)، چون  $a \leq na$  در نتیجه  $\sigma(a) \leq \sigma(na)$  پس  $\sigma(a) \notin I$  چون  $I$  یک ایده آل سرسخت  $n$ -لایه از  $\sigma(A)$  است. پس  $\sigma(\sigma(na)^*) = \sigma(na)^* \in I$  پس داریم:  $\sigma(\sigma(na))^* = \sigma(na)^* \in I$  بنابراین  $\sigma^{-1}(I)$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  است.

(ii) فرض کنید  $I$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  باشد. بنا به حکم ۲۴،۱، داریم:

$$\sigma(I) = I \cap \sigma(A)$$

چون  $\sigma(a) \in \sigma(A)$  و  $\sigma(I) = I \cap \sigma(A)$ ، پس در نتیجه  $\sigma(a) \notin I$  و لذا  $a \notin I$

همچنین، چون  $I$  یک ایده آل حالت سرسخت  $n$ -لایه از  $(A, \sigma)$  است، پس  $\sigma(na)^* \in I$  و در نتیجه

$$\sigma(na)^* = \sigma((na)^*) = \sigma(\sigma(na^*)) = \sigma(\sigma(na)^*) \in \sigma(I).$$

بنابراین  $\sigma(I)$  یک ایده آل سرسخت  $n$ -لایه از  $\sigma(A)$  است.

## References

1. L. P. Belluce, Semisimple algebras of infinite valued logic and bold fuzzy set theory, Canad. J. Math., vol. **38** (1986), 1356-1379.
2. L. Birkhoff, American Mathematical Society Raode Island, (1940).
3. A. D. M. Botur, State-morphism algebras general approach, Fuzzy Sets Sys, vol. **218** (2013), 90-102.
4. C. C. Chang, Algebraic analysis of many valued logic, Trans. Amer. Math. Soc, vol. **88** (1958), 467-490.
5. R. Cignoli, I. M. L. D'Ottaviano, D. Mundici, Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning, Kluwer Academic, Dordrecht, (2000).

6. L. C. Ciungu, A. Dvurečenskij, M. Hycko, State *BL*-algebras, *Soft Comput.*, **15** (2011), 619-634.
7. A. Di Nola, A. Dvurečenskij, State-morphism *MV*-algebras. *Ann Pure Appl Logic* **161** (2009), 161-173.
8. A. Di Nola, A. Dvurečenskij, A. Lettieri, On varieties of *MV*-algebras with internal states, *Inter. J. Approx. Reasoning*, (2010), to appear.
9. A. Dvurečenskij, J. Rachůnek, D. Salounova, State operators on generalizations of fuzzy structures, *Fuzzy Sets Syst.*, **187** (2012), 58-76.
10. F. Forouzesh, A. Darijani, Some classes of state ideals in state *MV*-algebras, *Eurasian Mathematical Journal*, Vol. 10, No. 2 (2019), 37-48.
11. F. Forouzesh, E. Eslami, A. Borumand Saeid, Radical of *A*-ideals in *MV*-modules, *Analele, Tiint, Ifice Ale Universitate, II "AL. I. Cuza" Dinias, I (S. N.) Mathematica*, Tomul Lexii, **f.1**(2016), 33-56.
12. F. Forouzesh, E. Eslami, A. Borumand Saeid, On obstinate ideals in *MV*-algebras, *Politehn. Univ. Bucharest. Sci Bull Series A, Appli Math. Phys.* Vol. **76** (2014), 53-62.
13. T. Flaminio, Montagna F, An algebraic approach to states on *MV*-algebras, In: Novák V (ed) *Fuzzy Logic 2*, proceedings of the 5th EUSFLAT conference, September 11–14, Ostrava, vol **II** (2007), 201-206.
14. T. Flaminio, F. Montagna, *MV*-algebras with internal states and probabilistic, fuzzy logic. *Int J Approx Reason* **50** (2009), 138-152.
15. G. Gratzer, *Universal Algebra*, seconded, New York, (1979).
16. A. Iorgulescu, *Algebras of logic as BCK algebras*, Academy of economic, studies Bucharest, Roman(۲۰۰۸).
17. A. Kroupa, Every state on semisimple *MV*-algebra is integral. *Fuzze Setse Syst* **157** (2006), 2771-2782.
18. J. Kuhr, D. Mundici, De Fineti theorem and Borel states in  $[0, 1]$ -valued algebraic, logic. *Int J Approx Reason* **46** (2007), 605-616.
19. S. Motamed and A. Borumand, *n*-fold obstinate filters in *BL*-algebras, *Neural Computing and Applications* **20** (2011), 461-472.
20. D. Mundici, Averaging the truth value in Lukasiewicz sentential logic. *Studia Logica* **55** (1995), 113-127.
21. D. Mundici, Interpretation of *AFC*-algebras in Lukasiewicz sentential calculus, *Journal of Functional Analysis* **65** (1986), 15-63.