Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Modules Whose Lattice of Radical Submodules Is Noetherian

H. Fazaeli Moghimi[1], M. Hakimi Ghalesafa[2]

1. Corresponding Author, Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences and Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran. ✉ E-mail: hfazaeli@birjand.ac.ir
2. Department of Mathematics, Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences and Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran. E-mail: milad.hakimi@birjand.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 17 February 2022
Received in revised form: 23 June 2022
Accepted: 15 May 2024
Published online: 10 July 2024

Keywords:
Radical submodule,
Radical Noetherian module,
Radical Noetherian ring,
Multiplication module.

ABSTRACT

Introduction

Throughout, this paper all rings are commutative with identity and all modules are unitary. Let R be a ring and M be an R-module. For any submodule N of M by $(N:M)$, we mean that the ideal $\{r \in R: rM \subseteq N\}$ of R. A proper submodule P of M is called a prime submodule if for each $r \in R$ and $m \in M$, $rm \in P$ implies that $r \in (P:M)$ or $m \in P$ (for more study about prime submodules see [10], [12], [18]). The intersection of all prime submodules of M containing N is called the radical of N, and denoted $radN$. In the case that there are no prime submodules containing N, we write $radN = M$. If I is an ideal of R, then the radical of R is denoted by $\sqrt{I}$. The submodule N of M is called a radical submodule, if $radN = N$. Also, an ideal I of R is called a radical ideal if it is a radical submodule of R. The set of all radical submodules of M, denoted by $RAD(M)$, together with inclusion is a complete lattice. Indeed, for any subset $\mathcal{A} = \{N_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ of $RAD(M)$ we have;

$$\mathrm{Inf}\mathcal{A} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{N}_\lambda \quad \text{, and} \quad \mathrm{Sup}\mathcal{A} = \mathrm{rad}\left(\textstyle\sum_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{N}_\lambda\right).$$

This lattice has been studied from different point of views (see for example [8], [16], and [17]). We know that a lattice R is Noetherian if every increasing chain $a_1 \leq a_2 \leq \cdots$ of elements of R is stationary. Here, we say that any R-module M is radical Noetherian if $RAD(M)$ is a Noetherian lattice. Also, a ring R is called radical Noetherian if it is a radical Noetherian R-module. It is evident that every Noetherian module is radical Noetherian, but the module of rational numbers $\mathbb{Q}$ over the ring of integers $\mathbb{Z}$ is an example of a radical Noetherian module which is not Noetherian. Moreover, in [9], there are several examples (for instance Example 5.16) of non-Noetherian local domains with finite Krull dimension which are radical Noetherian. Therefore, the collection of radical Noetherian rings (modules) strictly contains the collection of Noetherian rings (modules). It is interesting to know that every Artinian module is also radical Noetherian [16, Proposition 18], but the converse is not true. Indeed, $\mathbb{Z}$ is a well-known example of an Artinian $\mathbb{Z}$-module which is radical Noetherian. Thus the collection of radical Noetherian modules strictly contains the collection of Artinian modules.

There is a well-known result in the context of Noetherian modules which says that "an R-module M is Noetherian if and only if every submodule of M is finitely generated". The analog of this theorem in radical Noetherian modules, given in [14, Theorem16] and [15, Theorem 6.1], states that "An R-module M is radical Noetherian if and only if every its radical submodule is the radical

of a finitely generated submodule." This was our motivation to study radical Noetherian modules and explore the analogs of some well-known results in the context of Noetherian modules. Moreover, we investigate the stability of radical Noetherian modules with respect to various module-theoretic constructions such as factor modules, direct sum and idealization.

Main Results

Among other things, the following results are shown in this paper.

1) The set of minimal prime submodules of a radical Noetherian module M is finite. As shown in [19, p.231], the converse of this resul is not true in general.
2) A ring R is radical Noetherian if and only if every ascending chain of its prime ideals is stationary.
3) Every quotient of a radical Noetherian module is radical Noetherian.
4) A finitely generated multiplication R-module M is radical Noetherian if and only if $R/Ann(M)$ is a radical Noetherian ring.
5) If M is a radical Noetherian faithful multiplication R-module, then the module of fractions M_S (with respect to a multiplicatively closed subset S of R) is a radical Noetherian R_S-module. In particular, R_S is a radical Noetherian ring.
6) If the direct sum $M = M_1 \oplus M_2$ of R-modules M_1 and M_2 is radical Noetherian, then so are M_1 and M_2. The converse is true if M_1 and M_2 are radical Noetherian multiplication R-modules such that $Ann(M_1) \oplus Ann(M_2) = R$.
7) If M_1 and M_2 are radical Noetherian faithful multiplication R-modules, then so is their tensor product $M_1 \otimes M_2$.
8) (Cohen's Theorem) R is a radical Noetherian ring if and only if every its prime ideal is the radical of a finitely generated ideal.
9) (A generalization of Cohen's Theorem for modules) A finitely generated faithful multiplication module M is radical Noetherian if and only if every its prime submodule is the radical of a finitely generated submodule of M.
10) (Hilbert basis Theorem) If R is a radical Noetherian ring, then the polynomial ring $R[X]$ is radical Noetherian.
11) Let M be any R module. Then R is a radical Noetherian ring if and only if the idealization $R(+)M$ is a radical Noetherian ring if and only if $(R(+)M)[X]$ is a radical Noetherian ring.
12) Let M be a radical Noetherian R-module and $M[X]$ be the usual $R[X]$-module. If $M[X]$ is a multiplication R-module (obtained by the restriction of scalars), then $M[X]$ is a radical Noetherian $R[X]$-module.

How to cite: Fazaeli Moghimi, H. & Hakimi Ghalesafa, M. (2024). Modules whose lattice of radical submodules is noetherian. *Mathematical Researches,* **10** (2), 66 – 81.

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

مدول‌هایی که مشبکه زیرمدول‌های رادیکال آن‌ها نوتری است

حسین فضائلی مقیمی[۱] ✉، **میلاد حکیمی قلعه صفا**[۲]

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران. رایانامه: hfazaeli@birjand.ac.ir
۲. گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران. رایانامه: milad.hakimi@birjand.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۲۸
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۴/۰۲
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۲/۲۶
تاریخ انتشار: ۱۴۰۳۰/۴/۲۰

چکیده

در این مقاله، به بررسی گردایه‌ای از مدول‌ها می‌پردازیم که مشبکه زیرمدول‌های رادیکال آن‌ها نوتری است. این گردایه از مدول‌ها که هر عضو آن رادیکال نوتری نامیده می‌شود به طور اکید شامل گردایه مدول‌های نوتری و مدول‌های آرتینی است. نشان خواهیم داد که همانند مدول‌های نوتری، مجموعه زیرمدول‌های اول کمین یک مدول رادیکال نوتری، متناهی است. همچنین حلقه R را رادیکال نوتری گوییم، اگر R به عنوان R-مدول رادیکال نوتری باشد. اثبات خواهیم کرد که R-مدول ضربی M رادیکال نوتری است اگر و تنها اگر $R/Ann(M)$ یک حلقه رادیکال نوتری باشد. به‌علاوه قضیه‌های کوهن و پایه هیلبرت را برای حلقه‌های رادیکال نوتری بیان و اثبات می‌نماییم.

واژه‌های کلیدی:
زیرمدول رادیکال،
مدول رادیکال نوتری،
حلقه رادیکال نوتری،
مدول ضربی.

استناد: فضائلی مقیمی، حسین و حکیمی قلعه صفا، میلاد (۱۴۰۳). مدولهایی که مشبکه زیرمدولهای رادیکال آن‌ها نوتری است. *پژوهش‌های ریاضی*، **۱۰** (۲)، ۶۶ – ۸۱.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

در سرتاسر این مقاله همه حلقه‌ها جابجایی و یکدار و همه مدول‌ها یکانی هستند. فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. برای زیرمدول N از M، منظور از $(N:M)$ ایده‌آل $\{r \in R : rM \subseteq N\}$ از R می‌باشد. زیرمدول سره P از M را اول گوییم هرگاه برای هر $r \in R$ و $m \in M$، عبارت $rm \in P$ ایجاب کند که $m \in P$ یا $r \in (P:M)$ (برای مطالعه بیشتر درباره زیرمدول‌های اول می‌توان به [۱۰] ، [۱۲] و [۱۸] رجوع کرد). اشتراک همه زیرمدول‌های اول از M شامل زیرمدول N را رادیکال N می‌نامیم و با $radN$ نشان می‌دهیم. درصورتی‌که هیچ زیرمدول اولی شامل N موجود نباشد، قرارداد می‌کنیم که $radN = M$. در حالتی که I ایده‌آلی از حلقه R باشد، رادیکال I را با $\sqrt{I}$ نشان می‌دهیم. زیرمدول N از M را زیرمدول رادیکال می‌نامیم هرگاه $radN = N$. همچنین ایده‌آل I از R را ایده‌آل رادیکال گوییم هرگاه R-زیرمدول رادیکال از R باشد. مجموعه همه زیرمدول‌های رادیکال M را با $RAD(M)$ نشان می‌دهیم. می‌دانیم که یک مجموعه به طور جزئی مرتب $(L, \le)$، مشبکه (مشبکه کامل) است هرگاه هر زیرمجموعه دو عضوی (زیرمجموعه دلخواه) از آن نسبت به رابطه ترتیب جزئی $\le$، دارای سوپریموم و اینفیموم باشد. به‌راحتی دیده می‌شود که مجموعه $RAD(M)$ همراه با رابطه شمول $\subseteq$ تشکیل یک مشبکه کامل می‌دهد، که در آن برای هر خانواده $\mathcal{A} = \{N_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ از عضوهای $RAD(M)$،

$$\mathrm{Inf}\mathcal{A} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{N}_\lambda \quad \text{و} \quad \mathrm{Sup}\mathcal{A} = \mathrm{rad}\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{N}_\lambda\right).$$

این مشبکه از دیدگاه‌های مختلف در [۸]، [۱۶] و [۱۷] مطالعه شده است.

یک مشبکه $(\mathrm{L}, \le)$ را نوتری گوییم هرگاه برای هر زنجیر افزایشی $a_1 \le a_2 \le \cdots$ از عضوهای L یک عدد صحیح مثبت n موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $i \ge n$ داشته باشیم $a_i = a_n$.

در این مقاله بنا داریم که نوتری بودن مشبکه $RAD(M)$ از زیرمدول‌های رادیکال مدول M را بررسی کنیم. برای این منظور ابتدا به یادآوری قضیه زیر می‌پردازیم که در [۱۴، قضیه ۱۶] آمده است و در [۱۵، قضیه ۶.۱] نیز بازگو شده است.

قضیه ۱. R-مدول M در شرط زنجیر افزایشی روی زیرمدول‌های رادیکال صدق می‌کند اگر و تنها اگر برای هر زیرمدول N از M، زیر مدول متناهی مولد L از N موجود باشد به‌طوری‌که $radL = radN$.

به عبارت دیگر $RAD(M)$ نوتری است اگر و تنها اگر هر زیرمدول رادیکال M رادیکال یک زیرمدول متناهی مولد از آن باشد. شباهت قضیه ۱ به قضیه مشهوری در مبحث مدول‌های نوتری که بیان می‌دارد "R-مدول M نوتری است اگر و تنها اگر هر زیرمدول از آن متناهی مولد باشد"، ما را بر آن داشت تا در جستجوی جایگزین‌های برخی نتایج رایج دیگر در مبحث مدول‌های نوتری باشیم. از این به بعد برای راحتی، R-مدول M را رادیکال نوتری می‌گوییم هرگاه مشبکه $RAD(M)$ نوتری باشد. همچنین حلقه R را رادیکال نوتری گوییم هرگاه به عنوان R-مدول رادیکال نوتری باشد. آشکار است که هر مدول

نوتری، رادیکال نوتری است ولی عکس آن صحیح نیست. در زیر مثالی از مدول‌های رادیکال نوتری غیر نوتری ارائه شده است. از این رو گردایه مدول‌های رادیکال نوتری به‌طور اکید شامل گردایه مدول‌های نوتری است.

مثال ۱. ۱) مطابق معمول $\mathbb{Z}$ را حلقه اعداد صحیح و $\mathbb{Q}$ را گروه آبلی اعداد گویا در نظر می‌گیریم. می‌دانیم $\mathbb{Z}$- مدول $\mathbb{Q}$ غیرنوتری است. بنا به [۴، مثال۱.۳]، (0) تنها زیرمدول اول از $\mathbb{Z}$- مدول $\mathbb{Q}$ است و از این رو $RAD(\mathbb{Q}) = \{(0), \mathbb{Q}\}$ که نشان می‌دهد $\mathbb{Z}$-مدول $\mathbb{Q}$ رادیکال نوتری است. لازم به ذکر است که $(0) = rad(0)$ و $\mathbb{Q} = rad\mathbb{Z}$.

۲) فرض کنید $\mathbb{Z}_p$ گروه آبلی دوری از مرتبه عدد اول p باشد. در این صورت بنا به [۱۳، مثال ۶.۲]، تنها زیرمدول‌های اول $\mathbb{Z}$- مدول غیرنوتری $M = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p$ عبارتند از $\mathbb{Q} \oplus (0)$ و $(0) \oplus \mathbb{Z}_p$. از این رو M یک مدول رادیکال نوتری است، زیرا $RAD(\mathrm{M}) = \{(0) \oplus (0), \mathbb{Q} \oplus (0), (0) \oplus \mathbb{Z}_p, \mathrm{M}\}$.

۳) هر مدول M بدون زیرمدول اول رادیکال نوتری است، زیرا $RAD(M) = \{M\}$. بنا به [۱۳، لم ۳.۱]، $\mathbb{Z}(p^\infty)$ یک $\mathbb{Z}$-مدول بدون زیر مدول اول می‌باشد و در نتیجه رادیکال نوتری است. این مدول مثال شناخته شده‌ای از مدول‌های آرتینی غیرنوتری است (برای مثال [۵، صفحه ۷۴] را ببینید).

چنان‌که در تبصره (۱) اشاره خواهد شد، گردایه حلقه‌های رادیکال نوتری نیز به طور اکید شامل گردایه حلقه‌های نوتری می باشد. جالب است که بدانیم بنا به [۱۴، گزاره ۱۸]، هر مدول آرتینی نیز رادیکال نوتری است ولی حلقه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ مثال شناخته شده‌ای از حلقه نوتری (و بنابراین رادیکال نوتری) است که آرتینی نیست. (برای مثال [۵، صفحه ۷۴]، را ببینید). از این رو گردایه مدول‌های رادیکال نوتری به‌طور اکید شامل گردایه مدول‌های آرتینی نیز هست.

یکی از نتایج شناخته شده در مبحث حلقه‌های نوتری قضیه کوهن است. ما ضمن ارائه نسخه جایگزین این قضیه برای حلقه های رادیکال نوتری، تعمیمی از آن را برای مدول‌های رادیکال نوتری ارائه می کنیم. در واقع نشان می‌دهیم حلقه R رادیکال نوتری است اگر و تنها اگر هر ایده‌آل اول از آن رادیکال یک ایده‌آل متناهی‌مولد باشد (نتیجه ۱۶،۱). سپس نتیجه می‌گیریم که R-مدول ضربی متناهی‌مولد M رادیکال نوتری است اگر و تنها اگر هر زیرمدول اول از M رادیکال یک زیرمدول متناهی مولد از آن باشد (نتیجه ۱۷،۱). به‌علاوه نسخه جایگزین قضیه پایه هیلبرت برای حلقه‌های رادیکال نوتری را ارائه می‌کنیم که بیان می‌دارد " اگر R یک حلقه رادیکال نوتری باشد، آنگاه حلقه چندجمله‌ای $R[X]$ رادیکال نوتری است" (قضیه ۱۹،۱). علاوه بر این موارد، پایایی رادیکال نوتری بودن یک مدول نسبت به برخی ساختارهای مدولی مانند خارج قسمت، جمع مستقیم و ایده‌آل‌سازی را بررسی خواهیم کرد.

۱. مدول‌های رادیکال نوتری

به غیر از شرط معادل داده شده برای رادیکال نوتری بودن یک مدول در قضیه ۱، شرایط معادل دیگری نیز وجود دارند که بلافاصله از نوتری بودن یک مشبکه به‌دست می‌آیند. ما این بخش را با ارائه آن‌ها آغاز می‌کنیم.

لم ۱٫۱. برای یک R-مدول M شرایط زیر معادل هستند:

۱) M رادیکال نوتری است؛

۲) هر زیرمجموعه ناتهی از $RAD(M)$ دارای عضو بیشین است؛

۳) برای هر زیرمجموعه ناتهی $\mathcal{A}$ از $RAD(M)$ یک زیرمجموعه متناهی $\mathfrak{P}$ از $\mathcal{A}$ وجود دارد به‌طوری‌که $rad(\sum_{N\in\mathcal{A}} N) = rad(\sum_{N\in\mathfrak{P}} N)$.

برهان. (۱) $\Leftrightarrow$ (۲). از [۵، گزاره ۱.۶] به‌دست می‌آید.

(۳) $\Leftrightarrow$ (۲). از [۶، گزاره.۳.۱] به دست می‌آید. □

قضیه‌ای در مبحث مدول‌های نوتری بیان می‌دارد که برای مدول نوتری M مجموعه $Min(M)$ متشکل از زیرمدول‌های اول کمین M یک مجموعه متناهی است ([۱۸، لم ۱۰.۳ را ببینید)]. اکنون نشان می‌دهیم این مطلب برای مدول‌های رادیکال نوتری نیز برقرار است.

قضیه ۲٫۱. فرض کنید M یک R-مدول رادیکال نوتری باشد. در این صورت $Min(M)$ متناهی است.

برهان. اگر $rad(0) = M$، آن‌گاه $Min(M) = \emptyset$. فرض می‌کنیم $rad(0) \neq M$ و حکم درست نباشد. مجموعه S متشکل از زیرمدول‌های رادیکال سره N از M را در نظر می‌گیریم که $Min(M/N)$ نامتناهی باشد. واضح است که $rad(0) \in S$ و از این رو S ناتهی است. در این صورت بنا به (۱) $\Rightarrow$ (۲) از لم۱، S دارای عضو بیشینی مانند K است. آشکار است که K زیرمدول اولی از M نیست، زیرا در غیر این صورت $Min(M/K) = \{(0)\}$ که در تناقض با عضویت K در S است. بنابراین عضوهای $r \in R \setminus (K:M)$ و $x \in M \setminus K$ وجود دارند به‌طوری‌که $rx \in K$. در این صورت با در نظرگرفتن $I = Rr$ و $L = K + Rx$ درمی‌یابیم که $IL \subseteq K$، $K \subset L$ و $K \subset K + IM$. حال فرض می‌کنیم P زیرمدولی از M شامل K باشد به‌طوری‌که P/K زیرمدول اول کمین M/K باشد. در این صورت $IL \subseteq K \subseteq P$ که ایجاب می‌کند $L \subseteq P$ یا $IM \subseteq P$. در نتیجه

$$P/radL \in Min(M/radL) \quad \text{یا} \quad P/rad(K+IM) \in Min(M/rad(K+IM)).$$

حال با توجه به این‌که $K \subset rad(K+IM)$ و $K \subset radL$، مجموعه‌های $Min(M/rad(K+IM))$ و $Min(M/radL)$ متناهی هستند که نشان می‌دهد تعداد متناهی انتخاب برای P و سپس P/K وجود دارد. این در تناقض با عضویت K در S است و بنابراین M تعداد متناهی زیرمدول اول کمین دارد. □

مثال زیر نشان می‌دهد که در حالت کلی عکس قضیه ۲٫۱ درست نیست.

مثال ۳٫۱. ۱) فضاهای برداری با بعد نامتناهی رادیکال نوتری نیستند، زیرا هر زیرفضای سره از یک فضای برداری زیرمدول اولی از آن است. به‌ویژه زیرمدول (0) تنها زیرمدول اول کمین از هر فضای برداری ناصفر است.

۲) [۱۹، صفحه ۲۳۱] فرض کنید $R = K[X_1, X_2, X_3, \dots]$ حلقه با شمارای نامتناهی متغیر روی میدان K باشد و
$p_2 = (X_2, X_3, \dots)$ و $p_1 = (X_1)$ ،$I = (X_1X_2, X_1X_3, \dots)$.

به آسانی دیده می‌شود که $Min(R/I) = \{p_1/I, p_2/I\}$ و p_2/I رادیکال هیچ ایده‌آل متناهی‌مولد از R/I نیست. از این رو بنا به قضیه ۱، R/I یک حلقه رادیکال نوتری نیست ولی دارای تعداد متناهی ایده‌آل اول کمین است.

R-مدول M ضربی نامیده می‌شود اگر به ازای هر زیرمدول N از M، ایده‌ال I از R موجود باشد به‌طوری‌که $N = IM$. به‌راحتی دیده می‌شود که M ضربی است اگر و تنها اگر به ازای هر زیرمدول N از M، $N = (N:M)M$. همچنین حلقه R را ضربی گویند، هرگاه هر ایده‌آل از آن یک R–مدول ضربی باشد.

نتیجه ۴٫۱. گزاره‌های زیر برقرار هستند:

(۱) هر مدول ضربی رادیکال نوتری، متناهی‌مولد است.

(۲) هرمدول ضربی روی یک حلقه رادیکال نوتری، متناهی‌مولد است.

برهان. (۱) بنابه [۷، قضیه ۷.۳]، هر مدول ضربی با تعداد متناهی زیرمدول اول کمین، یک مدول متناهی‌مولد است. در نتیجه حکم از قضیه ۲٫۱ به‌دست می‌آید.

(۲) بنا به [۷، نتیجه ۹.۳] واضح است. □

نتیجه ۵٫۱. حلقه ضربی R نوتری است اگر و تنها اگر رادیکال نوتری باشد.

برهان. $\Leftarrow$) واضح است.

$\Rightarrow$) بنا به [۷، قضیه ۱۱.۳]، هر حلقه ضربی با تعداد متناهی ایده‌آل اول کمین، نوتری است. در نتیجه حکم از قضیه ۲٫۱، به دست می‌آید. □

قضیه ۶٫۱. حلقه R رادیکال نوتری است اگر و تنها اگر هر زنجیر افزایشی از ایده‌آل‌های اول R ایستا بوده و هر ایده‌ال رادیکال از R اشتراک تعداد متناهی ایده‌ال اول از R باشد.

برهان. $\Leftarrow$) واضح است که هر زنجیر افزایشی از ایده‌آل‌های اول حلقه رادیکال نوتری R ایستا است. برای اثبات قسمت دوم فرض کنید S مجموعه ایده‌ال‌های رادیکال R باشد که اشتراکی متناهی از ایده‌ال‌های اول R نیستند. اگر $S \neq \emptyset$، آن‌گاه بنا به لم ۱٫۱، S دارای عضو بیشینی مانند I است که ایده‌ال اولی از R نیست. بنابراین عضوهای $a, b \in R\setminus I$ وجود دارند به‌طوری‌که $ab \in I$. بنا به بیشین بودن I در S و این‌که $I \subset \sqrt{Ra+I}$ و $I \subset \sqrt{Rb+I}$، ایده‌ال‌های $\sqrt{Ra+I}$ و $\sqrt{Rb+I}$ اشتراکی متناهی از ایده‌ال‌های اول R می‌باشند. از طرفی

$$I \subseteq \sqrt{Ra+I} \cap \sqrt{Rb+I} = \sqrt{(Ra+I)(Rb+I)} = \sqrt{Rab+RaI+RbI+I^2} \subseteq \sqrt{I} = I$$

که نشان می‌دهد $I = \sqrt{Ra+I} \cap \sqrt{Rb+I}$ و در نتیجه I اشتراکی متناهی از ایده‌ال‌های اول R خواهد بود. این در تناقض با عضویت I در S است و بنابراین $S = \emptyset$. در نتیجه هر ایده‌ال رادیکال از R اشتراکی متناهی از ایده‌ال‌های اول R است.

($\Leftarrow$) فرض کنید $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ یک زنجیر افزایشی از ایده‌آل‌های رادیکال R باشد که ایستا نیست. بنا به فرض، ایده‌آل های اول p_i $(1 \leq i \leq r)$ وجود دارند به‌طوری‌که $I_1 = p_1 \cap \ldots \cap p_r$. برای هر $1 \leq i \leq r$،

$$p_i = \sqrt{I_1 + p_i} \subseteq \sqrt{I_2 + p_i} \subseteq \cdots \qquad (*).$$

فرض کنید این زنجیرها در n_i-امین جمله متوقف شوند و $n = \max\{n_i | \ 1 \leq i \leq r\}$. در این صورت

$$I_{n+1} \subseteq \sqrt{I_n + p_1} \cap \ldots \cap \sqrt{I_n + p_r} = \sqrt{(I_n + p_1) \cdots (I_n + p_r)} \subseteq \sqrt{I_n} = I_n.$$

این در تناقض با ایستا نبودن زنجیر $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ است. بنابراین حداقل یکی از زنجیرهای $(*)$، ایستا نیست. این زنجیر به شکل $p_1' \subset J_2 \subset J_3 \subset \cdots$ می باشد که جملاتش ایده‌آل‌های رادیکال هستند و اولین آن‌ها یعنی p_1' ایده‌آل اولی از R و شامل I_1 است. با ادامه این فرایند و در نظر گرفتن J_2 به‌جای I_1 در مرحله قبل، به زنجیر $p_1' \subset p_2' \subset \cdots$ از ایده‌آل های اول دست می‌یابیم که ایستا نیست. □

فرض کنید M یک R-مدول باشد. منظور از ایده‌آل‌سازی $R(+)M$ حلقه‌ای با مجموعه زمینه $R \times M$ است که عمل جمع آن مولفه‌وار و عمل ضرب به صورت $(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + r_2 m_1)$ می‌باشد. لازم به ذکر است که بنا به قسمت (۲) از [۳، قضیه ۲.۳] هر ایده‌آل اول از حلقه $R(+)M$ به شکل $p(+)M$ است که در آن p یک ایده‌آل اول از R است. همچنین بنا به قسمت (۳) از همین قضیه، ایده‌آل‌های رادیکال از $R(+)M$ به شکل $I(+)M$ هستندکه I یک ایده‌آل رادیکال از R است. به ویژه اگر I یک ایده‌آل از R و N زیرمدولی از M باشد، آن‌گاه $\sqrt{I(+)N} = \sqrt{I}(+)M$.

نتیجه ۷,۱. فرض کنید M یک R-مدول باشد. در این صورت R رادیکال نوتری است اگر و تنها اگر حلقه $R(+)M$ رادیکال نوتری باشد.

برهان. با توجه به مطالب بالا و قضیه ۶,۱ حکم واضح است. □

تبصره ۸,۱. لازم به ذکر است حلقه R در قسمت (۲) مثال ۲ نیز رادیکال نوتری نیست، زیرا به‌راحتی دیده می‌شود که ایده‌آل بیشین $m = (x_1, x_2, \ldots)$ از R رادیکال هیچ ایده‌آل متناهی‌مولد نیست. به‌علاوه چون R را می‌توان در میدان کسرهایش نشاند، نتیجه می‌شود که زیرحلقه یک حلقه رادیکال نوتری لزوما رادیکال نوتری نیست. هم‌چنین برخلاف مدول های نوتری که هر زیرمدول از آنها نوتری است، الزامی نیست که زیرمدول یک مدول رادیکال نوتری، رادیکال نوتری باشد. برای تایید این مطلب، در [۹، مثال ۱۶.۵] یک دامنه صحیح غیر نوتری موضعی چهاربعدی (C, m_C) معرفی شده است که

بنا به قضیه ۳ رادیکال نوتری است. (در ضمن این نشان می‌دهد که گردایه حلقه‌های رادیکال نوتری به طور اکید شامل گردایه حلقه‌های نوتری است.) بنا به قسمت‌های ۴ و ۶ این مثال، ایده‌الهای اول ناصفر غیربیشین p از C نمی‌توانند رادیکال هیچ C-زیرمدول متناهی‌مولد از m_C باشند. بنابراین m_C یک C-زیرمدول از حلقه رادیکال نوتری C می‌باشد که رادیکال نوتری نیست. همچنین بنا به قسمت ۲ از همان مثال، m_C یک ایده‌ال اصلی از C بوده و در نتیجه یک C-مدول ضربی نیز می‌باشد. این بیان می‌کند که در حالت کلی یک مدول ضربی متناهی‌مولد، رادیکال نوتری نیست.

قضیه ۹,۱. هر خارج قسمت از یک مدول رادیکال نوتری، رادیکال نوتری است.

برهان. فرض کنید M یک R-مدول رادیکال نوتری و N زیرمدولی از آن باشد. به‌علاوه فرض کنید L/N یک زیرمدول رادیکال از M/N باشد. در این صورت بنا به [۲۰، لم ۷]، $L/N = rad_{M/N}L/N = radL/N$ (که در آن $rad_{M/N}L/N$ رادیکال زیرمدول L/N از M/N است). از این رو $L = radL$. در نتیجه بنا به قضیه ۱، زیر مدول متناهی‌مولد $T = Rx_1 + Rx_2 + \cdots + Rx_n$ از M وجود دارد به‌طوری‌که $L = radT$. در نتیجه

$$L/N = (radT)/N = rad((T+N)/N) = rad(R(x_1+N) + \cdots + R(x_n+N))$$

که نشان می‌دهد M/N رادیکال نوتری است. □

لم ۱۰,۱. [۱۰، گزاره ۸] فرض کنید M یک R-مدول متناهی‌مولد و I یک ایده‌آل رادیکال از R باشد. در این صورت $Ann(M) \subseteq I$ اگر وتنها اگر $(IM:M) = I$.

قضیه ۵. فرض کنید M یک مدول ضربی روی حلقه R باشد. در این صورت M رادیکال نوتری است اگر وتنها اگر $R/Ann(M)$ یک حلقه رادیکال نوتری باشد.

برهان. $\Leftarrow$) فرض کنید $R/Ann(M)$ یک حلقه رادیکال نوتری و M یک R-مدول ضربی باشد. علاوه بر این فرض کنید $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots$ یک زنجیر از زیرمدول‌های رادیکال M باشد. در این صورت چون M یک $R/Ann(M)$-مدول ضربی نیز هست، بنا به نتیجه ۴,۱(۲)، M یک $R/Ann(M)$-مدول متناهی‌مولد بوده و از این رو M یک R-مدول متناهی‌مولد است. بنابراین از [۱۱، نتیجه ۴.۵] نتیجه می‌شود که به ازای هر $i \geq 1$،

$$(N_i:M) = (radN_i:M) = \sqrt{(N_i:M)}$$

در نتیجه $(N_1:M) \subseteq (N_2:M) \subseteq \cdots$ یک زنجیر افزایشی از ایده‌آل‌های رادیکال حلقه R و شامل $Ann(M)$ می‌باشد که بنا به فرض ایستا است؛ یعنی $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $i \geq n$، $(N_i:M) = (N_n:M)$. حال از ضربی بودن M به دست می‌آید که به ازای هر $i \geq n$، $N_i = N_n$. در نتیجه M رادیکال نوتری است.

$\Leftarrow$) فرض کنید M رادیکال نوتری بوده و $I_1/Ann(M) \subseteq I_2/Ann(M) \subseteq \cdots$ یک زنجیر افزایشی از ایده‌آل‌های رادیکال حلقه $R/Ann(M)$ باشد. بنابراین به ازای هر $i \geq 1$، ایده‌آل‌های I_i رادیکال هستند. در این صورت چون بنا به نتیجه ۴,۱(۱)، M متناهی مولد است، از لم ۱۰,۱ به دست می‌آید که

$$rad(I_iM) = \sqrt{(I_iM:M)}M = \sqrt{I_i}M = I_iM.$$

این نشان می‌دهد $I_1M \subseteq I_2M \subseteq \cdots$ یک زنجیر افزایشی از زیرمدول‌های رادیکال M است. حال چون M رادیکال نوتری است، $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $i \geq n$، $I_iM = I_nM$. درنتیجه به ازای هر $i \geq n$،

$$I_i = (I_iM:M) = (I_nM:M) = I_n.$$

بنابراین $R/Ann(M)$ رادیکال نوتری است. □

نتیجه ۱۱,۱. فرض کنید M یک مدول ضربی روی حلقه R باشد به‌طوری‌که هر زنجیر از زیرمدول‌های اول از M ایستا است. اگر M متناهی‌مولد و وفادار بوده و هر زیرمدول رادیکال، اشتراک تعداد متناهی زیرمدول اول باشد، آن‌گاه M رادیکال نوتری است.

برهان. فرض کنید $p_1 \subseteq p_2 \subseteq \cdots$ یک زنجیر افزایشی از ایده‌آل‌های اول حلقه R باشد. چون M متناهی‌مولد است، بنا به [۱۲، قضیه ۳.۳]، زیرمدول‌های اول P_i $(i \geq 1)$ از M وجود دارند به طوری که $p_i = (P_i:M)$. چون M ضربی است زنجیر افزایشی $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \cdots$ از زیرمدول‌های اول را خواهیم داشت که بنا به فرض ایستا است. این ایجاب می‌کند که زنجیر $p_1 \subseteq p_2 \subseteq \cdots$ نیز ایستا باشد. به‌علاوه اگر I یک ایده‌آل رادیکال از R باشد، آنگاه بنا به لم ۱۰,۱ و فرض، زیرمدول‌های اول P_i $(1 \leq i \leq r)$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$I = \sqrt{I} = \sqrt{(IM:M)} = (rad(IM):M) = (\cap_{i=1}^{n} P_i:M) = \cap_{i=1}^{n} (P_i:M).$$

از این رو بنا به قضیه ۳، حلقه R رادیکال نوتری است. در نتیجه بنا به قضیه ۵، M رادیکال نوتری است. □

فرض کنید S یک زیرمجموعه بسته ضربی از حلقه R و M یک R-مدول باشد. در [۱۸، قضیه ۴.۳]، نشان داده شده است که $P \mapsto P_S$ یک تناظر یک به یک بین مجموعه زیرمدول‌های اول P از R-مدول M که $(P:M) \cap S = \emptyset$ و مجموعه R_S-زیرمدول‌های اول مدول کسرهای M_S می‌باشد. این مطلب نتیجه زیر را ایجاب می‌کند:

نتیجه ۱۲,۱. فرض کنید S یک زیرمجموعه بسته ضربی از حلقه R و M یک R-مدول ضربی وفادار باشد. در این صورت اگر M یک R-مدول رادیکال نوتری باشد، آن‌گاه M_S یک R_S-مدول رادیکال نوتری است. به‌ویژه R_S یک حلقه رادیکال نوتری است.

برهان. بنا به آن چه پیش‌تر گفته شد، هر زیرمدول اول از R_S-مدول M_S به شکل P_S می‌باشد که در آن P یک زیرمدول اول از R است و $(P:M) \cap S = \emptyset$. حال اگر $P_{1_S} \subseteq P_{2_S} \subseteq \cdots$ یک زنجیر از زیرمدول‌های اول R_S-مدول M_S باشد،

آن‌گاه $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \cdots$ یک زنجیر از زیرمدول‌های اول M است که ایستا می‌باشد و این ایجاب می‌کند که زنجیر اولیه $P_{1_S} \subseteq P_{2_S} \subseteq \cdots$ نیز ایستا است. از طرفی بنا به نتیجه ۴,۱(۱)، M متناهی‌مولد است و بنابراین R_S-مدول M_S ضربی و متناهی‌مولد و وفادار است. از این رو بنا به نتیجه ۱۱,۱، M_S یک R_S-مدول رادیکال نوتری است. قسمت "به‌ویژه" نیز از این حقیقت بدیهی نتیجه می‌شود که R یک R-مدول ضربی است. □

در [۷، نتیجه ۳.۲]، نشان داده شده است که برای R-مدول‌های متناهی‌مولد M_1 و M_2 ، $M = M_1 \oplus M_2$ یک R -مدول ضربی است اگر وتنها اگر M_1 و M_2 ضربی باشند و $Ann(M_1) \oplus Ann(M_2) = R$. از این مطلب در قسمت (۳) نتیجه زیر استفاده شده است.

نتیجه ۱۳,۱. گزاره های زیر برقرار هستند:

۱) R_1 و R_2 حلقه‌های رادیکال نوتری هستند اگر و تنها اگر جمع مستقیم $R = R_1 \oplus R_2$ یک حلقه رادیکال نوتری باشد.

۲) اگر جمع مستقیم $M = M_1 \oplus M_2$ از R-مدول‌های M_1 و M_2 یک R-مدول رادیکال نوتری باشد، آن‌گاه M_1 و M_2 نیز R-مدول‌های رادیکال نوتری هستند.

۳) اگر M_1 و M_2 ، R-مدول‌های ضربی رادیکال نوتری باشند به طوری که $Ann(M_1) \oplus Ann(M_2) = R$، آن‌گاه $M = M_1 \oplus M_2$ یک R-مدول ضربی متناهی‌مولد رادیکال نوتری است.

برهان. ۱) واضح است که I یک ایده‌آل رادیکال از R است اگر و تنها اگر ایده‌آل‌های رادیکال I_1 از R_1 و I_2 از R_2 موجود باشند به طوری‌که $I = I_1 \oplus I_2$. حال حکم از قضیه ۱ به دست می‌آید.

۲) نتیجه مستقیم قضیه ۹,۱ است.

۳) چون M_1 و M_2 دو R-مدول ضربی رادیکال نوتری هستند، بنا به قضیه ۵ حلقه‌های $R/Ann(M_1)$ و $R/Ann(M_2)$ رادیکال نوتری هستند. از این رو بنابه قضیه باقیمانده چینی،

$$R/Ann(M) \cong R/(Ann(M_1) \cap Ann(M_2)) \cong R/Ann(M_1) \oplus R/Ann(M_2)$$

که بنا به قسمت (۱)، یک حلقه رادیکال نوتری است. از طرف دیگر بنا به نتیجه ۴,۱(۱) و [۷، نتیجه ۳.۲]، R-مدول $M = M_1 \oplus M_2$ ضربی است. حال دوباره از قضیه ۵ نتیجه می‌شود که M یک R-مدول رادیکال نوتری است. □

نتیجه ۱۴,۱. فرض کنید M_1 و M_2 ، R-مدول‌های ضربی وفادار رادیکال نوتری باشند. در این صورت حاصل‌ضرب تانسوری $M_1 \otimes M_2$ یک R-مدول ضربی وفادار رادیکال نوتری است.

برهان. چون M_1 و M_2 ، R-مدول‌های ضربی وفادار رادیکال نوتری هستند، بنا به قضیه ۵، R یک حلقه رادیکال نوتری است. از طرفی بنا به [۱، قضیه ۲]، $M_1 \otimes M_2$ یک R-مدول ضربی وفادار است. از این رو دوباره بنا به قضیه ۵، R-مدول $M_1 \otimes M_2$ رادیکال نوتری است. □

قضیه ۱۵,۱. فرض کنید S مجموعه ناتهی متشکل از تمام ایده‌آل‌های رادیکال یک حلقه R باشد که رادیکال یک ایده‌آل متناهی‌مولد نیستند. در این صورت S دارای عضو بیشین است و هر چنین عضوی یک ایده‌آل اول از R است.

برهان. فرض کنید $C = \{C_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ یک زیرمجموعه به طور کلی مرتب از $(S, \subseteq)$ باشد. به‌راحتی مشاهده می‌شود که $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$ کران بالای C در S می‌باشد و از این رو بنا به لم زورن دارای عضو بیشینی مانند p است. فرض کنید $a \notin p$ و $b \notin p$ ولی $ab \in p$. بنا به بیشین بودن p، عضوهای $x_1, \dots, x_m$ و $y_1, \dots, y_n$ از R وجود دارند به‌طوری‌که

$$\sqrt{p+Rb} = \sqrt{Ry_1 + \cdots + Ry_n} \quad \text{و} \quad \sqrt{p+Ra} = \sqrt{Rx_1 + \cdots + Rx_m}\,.$$

در این صورت

$$p \subseteq \sqrt{p+Ra} \cap \sqrt{p+Rb} = \sqrt{(p+Ra)(p+Rb)} = \sqrt{p^2 + pa + pb + Rab} \subseteq p$$

که نتیجه می‌دهد

$$p = \sqrt{(p+Ra)(p+Rb)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} Rx_i y_j}$$

که به تناقض با عضویت p در S می‌انجامد. بنابراین p ایده‌آل اولی از R است. □

اکنون نسخه جایگزین از قضیه کوهن در رده حلقه‌ها و مدول‌های رادیکال نوتری را ارائه می‌کنیم.

نتیجه۱۶,۱ . حلقه R رادیکال نوتری است اگر و تنها اگر هر ایده‌آل اول از R، رادیکال یک ایده‌آل متناهی‌مولد باشد.

برهان. $\Leftarrow$) واضح است.

$\Rightarrow$) فرض کنید S مجموعه تمام ایده‌آل‌های رادیکال R باشد که رادیکال یک ایده‌آل متناهی‌مولد نیستند. اگر $S \neq \emptyset$، آن گاه بنا به قضیه قبل S دارای ایده‌آل اولی از R خواهد بود که این در تناقض با فرض است. بنابراین $S = \emptyset$ و در نتیجه R رادیکال نوتری است. □

نتیجه ۱۷,۱. فرض کنید M یک R-مدول ضربی متناهی‌مولد وفادار باشد. در این صورت M رادیکال نوتری است اگر و تنها اگر هر زیرمدول اول از M رادیکال یک زیرمدول متناهی‌مولد باشد.

برهان. $\Leftarrow$) بنا به تعریف واضح است.

$\Rightarrow$) فرض کنید p یک ایده‌آل اول از حلقه R باشد. در این صورت بنا به [۱۲، قضیه ۳.۳]، یک زیرمدول اول P از M وجود دارد به طوری که $p=(P:M)$. از طرفی بنا به فرض زیرمدول متناهی‌مولد N از M موجود است به طوری که $P=radN$ و بنابراین $p=(radN:M)=\sqrt{(N:M)}$. اما بنا به [۲، گزاره ۲.۲]، $(N:M)$ یک ایده‌آل متناهی‌مولد از R است و از این رو بنا به نتیجه ۱۶،۱، R یک حلقه رادیکال نوتری است. در نتیجه بنا به قضیه ۵، M یک مدول رادیکال نوتری است. □

لم ۱۸،۱. فرض کنید I یک ایده‌آل رادیکال از حلقه R باشد که رادیکال یک ایده‌آل متناهی مولد از R است. در این صورت زیر مجموعه متناهی C از I وجود دارد به طوری‌که $I=\sqrt{RC}$.

برهان. بنا به فرض عضوهای $x_1,\dots,x_n$ از R وجود دارند به طوری که

$$I=\sqrt{Rx_1+Rx_2+\cdots+Rx_n}.$$

در این صورت برای هر $1\le i\le n$، عدد طبیعی k_i موجود است به‌طوری‌که $x_i^{k_i}\in I$. از این رو

$$I=\sqrt{Rx_1+\cdots+Rx_n}=\sqrt{\sqrt{Rx_1}+\cdots+\sqrt{Rx_n}}=\sqrt{Rx_1^{k_1}+\cdots+Rx_n^{k_n}}\subseteq I\,.$$

بنابراین $I=\sqrt{Rx_1^{k_1}+\cdots+Rx_n^{k_n}}$. لذا کافی است قرار دهیم $C=\{x_1^{k_1},\dots,x_n^{k_n}\}$. □

اکنون قضیه پایه هیلبرت برای حلقه‌های رادیکال نوتری را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱۹،۱. اگر R یک حلقه رادیکال نوتری باشد، آن‌گاه حلقه چندجمله‌ای $R[X]$ رادیکال نوتری است.

برهان. فرض کنید R رادیکال نوتری و $R[X]$ رادیکال نوتری نباشد. در این صورت مجموعه $\mathcal{S}$ متشکل از ایده‌آل‌های رادیکال $R[X]$ که رادیکال یک ایده‌آل متناهی‌مولد نیستند، ناتهی است. در نتیجه بنا به لم ۱،۱، $\mathcal{S}$ دارای یک عضو بیشین B است. چون R رادیکال نوتری است، بنا به قضیه ۱ زیرمجموعه متناهی C از ایده‌آل رادیکال $B\cap R$ وجود دارد که $B\cap R=\sqrt{RC}$. در نظر بگیرید که $D=(B\cap R)[X]$. در این صورت $D=\sqrt{RC[X]}$ که رادیکال ایده‌آل متناهی مولد $RC[X]$ از $R[X]$ است. بنابراین $D\neq B$. فرض کنید $f(X)\in B\backslash D$ یک چندجمله‌ای با کمترین درجه باشد که جمله پیشرو آن aX^n است. نشان می‌دهیم که $a\notin B$. اگر چنین نباشد، به دست می‌آوریم $f(X)-aX^n\in B$ که یک چند جمله‌ای با درجه کمتر از n است و بنابراین عضوی از D می‌باشد. از طرف دیگر چون $a\in B\cap R$، $aX^n\in(B\cap R)[X]=D$ و در نتیجه

$$f(X)=(f(X)-aX^n)+aX^n\in D.$$

که تناقض است. بنابراین $a \notin B$، که ایجاب می‌کند $B \subset \sqrt{B + aR[X]}$. از این رو بنا به بیشین بودن B در $\mathcal{S}$، ایده‌آل $\sqrt{B + aR[X]}$ رادیکال یک ایده‌آل متناهی‌مولد از $R[X]$ است. در نتیجه بنا به لم ۱۸،۱، زیرمجموعه متناهی E از B وجود دارد به‌طوری‌که $\sqrt{B + aR[X]} = \sqrt{ER[X] + aR[X]}$. نشان خواهیم داد

$$aB \subseteq \sqrt{f(X)R[X] + D}. \tag{$*$}$$

برای این منظور فرض کنید $g(X) \in B$. درصورتی‌که $g(X) \in D$، $(*)$ درست است. فرض کنید $g(X) \in B \backslash D$ با درجه $m \geq n$ باشد. در این صورت چندجمله‌ای‌های $q(X)$ و $r(X)$ وجود دارند به‌طوری‌که $\deg\big(r(X)\big) < n$ و $a^m g(X) = f(X)q(X) + r(X)$. حال از آنجا که $r(X) = a^m g(X) - f(X)q(X)$، بنا به کمینگی درجه $f(X)$ نتیجه می‌شود که $r(X) \in D$. از طرف دیگر

$$\big(ag(X)\big)^m = f(X)q(X)\big(g(X)\big)^{m-1} + r(X)\big(g(X)\big)^{m-1} \in f(X)R[X] + D$$

که ایجاب می‌کند

$$ag(X) \in \sqrt{f(X)R[X] + D} = \sqrt{\sqrt{f(X)R[X]} + \sqrt{RC[X]}} = \sqrt{f(X)R[X] + RC[X]}.$$

بنابراین $aB \subseteq \sqrt{f(X)R[X] + RC[X]}$، که نشان می‌دهد $(*)$ برقرار است. از این رو

$$\begin{aligned} B^2 &\subseteq B\sqrt{ER[X] + aR[X]} = \sqrt{B(ER[X] + aR[X])} \\ &\subseteq \sqrt{ER[X] + aB} \subseteq \sqrt{ER[X] + \sqrt{f(X)R[X] + RC[X]}} \\ &= \sqrt{ER[X] + f(X)R[X] + RC[X]} \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $B = \sqrt{ER[X] + f(X)R[X] + RC[X]}$. به عبارت دیگر B رادیکال ایده‌آل تولید شده به‌وسیله مجموعه متناهی $E \cup \{f(X)\} \cup C$ است که در تناقض با عضویت B در $\mathcal{S}$ است. بنابراین $R[X]$ رادیکال نوتری است.

□

نتیجه ۲۰،۱. اگر R یک حلقه رادیکال نوتری باشد، آن‌گاه $R[X_1, \cdots, X_n]$ رادیکال نوتری است.

برهان. به استقراء روی n نتیجه می‌شود. □

نتیجه زیر که بلافاصله از قضیه پایه هیلبرت در حلقه‌های نوتری به‌دست می‌آید را می‌توان از قضیه قبل نیز به‌دست آورد.

نتیجه ۲۱،۱. اگر R یک حلقه نوتری باشد، آن‌گاه $R[X_1, \cdots, X_n]$ رادیکال نوتری است.

برهان. بنا به قضیه ۱۹٫۱ واضح است. □

نتیجه ۲۲٫۱. فرض کنید M یک R- مدول باشد. در این صورت R یک حلقه رادیکال نوتری است اگر و تنها اگر $(R(+)M)[X]$ یک حلقه رادیکال نوتری باشد.

برهان. بنا به [۳، نتیجه ۷.۴]، $(R(+)M)[X] \cong R[X](+)M[X]$. حال حکم از نتیجه ۷٫۱ و قضیه ۱۹٫۱ به‌دست می‌آید. □

فرض کنید M یک R- مدول باشد. در نتیجه زیر، عمل‌های جمع و ضرب اسکالری $R[X]$- مدولی $M[X]$ همان‌هایی است که به طور معمول از عمل‌های R- مدول M به دست می‌آیند ([۵، تمرین۶ ص ۳۲] را ببینید). همچنین R- مدول $M[X]$، مدول به‌دست آمده از تحدید اسکالرهای $R[X]$ به R در ساختار قبلی است.

نتیجه ۲۳٫۱. فرض کنید M یک R- مدول رادیکال نوتری و R- مدول $M[X]$ ضربی باشد. در این صورت $R[X]$- مدول $M[X]$ رادیکال نوتری است.

برهان. ابتدا واضح است که چون M نقش همریخت $M[X]$ است، R- مدول M ضربی می‌باشد و از این رو بنا به قضیه ۵، $R/Ann(M)$ یک حلقه رادیکال نوتری است. در این صورت بنا به قضیه ۱۹٫۱،

$$R[X]/Ann(M[X]) = R[X]/Ann(M)[X] \cong (R/Ann(M))[X]$$

یک حلقه رادیکال نوتری است. از طرفی $M[X]$ یک $R[X]$- مدول ضربی نیز هست و در نتیجه بنا به قضیه ۵، $R[X]$- مدول $M[X]$ رادیکال نوتری است.

سپاس گذاری: در اینجا مولفین لازم میدانند که مراتب قدردانی و سپاس خود را از داوران محترم به دلیل مطالعه دقیق مقاله و پیشنهادهای ارزنده اعلام نمایند.

References

1. M. M. Ali, Multiplication modules and tensor product, Beitr. Algebra Geom., **47**(2) (2006), 305-327.

2. M. M. Ali and D. J. Smith, Some remarks on multiplication and projective modules, Comm. Algebra, **32** (2004), 3897-3909.

3. D. D. Anderson and M. Winders, Idealization of a modul, J. Commut. Algebra, **1** (2009), 3-56.

4. H. Ansari-Toroghy and R. Ovlyaee-Sarmazdeh, On the prime spectrum of a module and Zariski topologies, Comm. Algebra, **38** (12) (2010) 4461-4475.

5. M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, Introduction to Commutative Algebra, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1969.

6. G. Călugăreanu, Lattice Concepts of Module Theory, Kluwer Texts in the Mathematical Sciences 22, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

7. Z. A. El-Bast and P. F. Smith, Multiplication Modules, Comm. Algebra, **16**(4) (1988), 755-799.

8. J. B. Harehdashti and H. F. Moghimi, Complete homomorphisms between the lattices of radical submodules, Math. Rep., **20**(70) (2018), 187-200.

9. W. Heinzer, C. Rotthaus and S. Weigand, Examples of non-Noetherian domains inside power series ring, J. Commut. Algebra, **6**(1) (2014), 53-93.

10. C. P. Lu, Prime submodules of modules, Comment. Math. Univ. St. Paul., **33**(1) (1984), 61-69.

11. C. P. Lu, A module whose prime spectrum has the surjective natural map, Houston J. Math., **33** (2007), 125-143.

12. R. L. McCasland and M. E. Moore, Prime submodules, Comm. Algebra., **20**(6) (1992), 1803-1817.

13. R. L. McCasland, M. E. Moore and P. F. Smith, On the spectrum of a module over a commutative ring", Comm. Algebra., **25** (1997), 79-103.

14. R. L. McCasland, M. E. Moore and P. F. Smith, An introduction to Zariski spaces over Zariski topologies, Rocky Mountain J. Math., **28** (1998), 1357-1369.

15. R. L. McCasland, M. E. Moore and P. F. Smith, Subtractive bases of Zariski spaces, Houston J. Math., **4**(32) (2006), 689-701.

16. R. L. McCasland and P. F. Smith, Zariski Spaces of Modules over Arbitrary Rings, Comm. Algebra., **34** (2007), 3961-3973.

17. H. F. Moghimi and J. B. Harehdashti, Mappings between lattices of radical submodules, Int. Electr. J. Alg., **19** (2016), 35-48.

18. M. E. Moore and S. J. Smith., Prime and radical submodules of modules over commutative rings, Comm. Algebra., **30** (2002), 5037-5064.

19. A. R. Naghipour, A short note on minimal prime ideals, J. Commut., Algebra **6**(2) (2014), 231-232.

20. B. Sarac and Y. Tiras, On modules which satisfy the radical formula, Turk. J. Math., **37** (2013), 195-20.