



## The Legendre-Picard Iteration Method for the Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind

M. Tafakkori-Bafghi<sup>1</sup> , M. Heydari<sup>2</sup> , G.B. Loghmani<sup>3</sup>

1. Department of Mathematical Sciences, Yazd University, Yazd, Iran. E-mail: [m.tafakkori@stu.yazd.ac.ir](mailto:m.tafakkori@stu.yazd.ac.ir)

2. Corresponding Author, Department of Mathematical Sciences, Yazd University, Yazd, Iran.

✉ E-mail: [m.heydari@yazd.ac.ir](mailto:m.heydari@yazd.ac.ir)

3. Department of Mathematical Sciences, Yazd University, Yazd, Iran. E-mail: [loghmani@yazd.ac.ir](mailto:loghmani@yazd.ac.ir)

### Article Info

#### Article type:

Research Article

#### Article history:

Received: 12 October 2020

Received in revised form:

15 June 2021

Accepted: 23 January 2023

Published online:

29 February 2024

#### Keywords:

Almost contact structure,  
B-metrics,  
Natural metric,  
Sphere bundle,  
Structure tensor.

### ABSTRACT

#### Introduction

The theory and applications of integral equations have been the subject of many researches during the last decades. Fredholm integral equations have been widely used in applied science such as engineering and physics. In recent years, methods based on orthogonal basis functions, including collocation, Tau and Galerkin methods with Jacobi, Legendre and Chebyshev polynomials have attracted the attention of mathematicians. The most important advantage of using orthogonal basis functions is simplifying the mentioned methods by solving a linear/nonlinear algebraic system. But solving algebraic systems is time-consuming, especially in nonlinear problems. This study presents an efficient iterative semi-analytical method by employing the shifted Legendre polynomials for solving the Fredholm integral equations of the second kind.

#### Material and Methods

The proposed method is based on the Picard iteration method, the shifted Legendre polynomials, and the shifted Legendre-Gauss integration rule. According to the orthogonal property of Legendre polynomials, the proposed method uses an iterative scheme to update the coefficients of the series of approximate solution. Also, a vector-matrix form is introduced to increase the efficiency and reduce the computational time. The numerical results clearly indicate the feasibility and the accuracy of the proposed technique.

#### Results and discussion

In order to examine the validity of the proposed method, we employed it to find the numerical solution of several Fredholm integral equations of the second kind. The results for six examples are reported in this section. Also, a comparison study between the proposed iterative method and other existing methods is provided. The obtained numerical results show the accuracy and efficiency of the iterative method.

#### Conclusion

In this paper, we presented the Legendre-Picard iteration method for the numerical solution of nonlinear Fredholm integral equations of the second kind. To obtain this method, the Picard iteration scheme, the shifted Legendre polynomials and the shifted Legendre-Gauss quadrature formula play a fundamental role. The proposed method

- 
- basically, is an iterative method, that we can implement easily and attain more accurate approximate solutions with higher iteration.
  - does not require integral computations, because the integration of the shifted Legendre polynomials is calculated analytically with an iterative formula when the coefficients are updated.
  - unlike spectral methods, does not require solving linear or nonlinear systems of algebraic equations and calculating the inverse of a matrix.
  - in vector-matrix form, implemented significantly faster than in the original iterative form.

---

**How to cite:** Tafakkori-Bafghi, M., Heydari, M., & Loghmani, G.B. (2023). The Legendre-Picard Iteration Method for The Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind. *Mathematical Researches*, 9 (4), 80 – 110.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---

## روش تکرار لژاندر-پیکارد برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم

محمد تفکری بافقی<sup>۱</sup>، محمد حیدری<sup>۲</sup>، قاسم بریدلقمانی<sup>۳</sup>

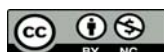
۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران. رایانامه: [m.tafakkori@stu.yazd.ac.ir](mailto:m.tafakkori@stu.yazd.ac.ir)  
۲. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران. رایانامه: [m.heydari@yazd.ac.ir](mailto:m.heydari@yazd.ac.ir)  
۳. گروه ریاضی، گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران. رایانامه: [loughmani@yazd.ac.ir](mailto:loughmani@yazd.ac.ir)

| اطلاعات مقاله            | چکیده                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|--------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| نوع مقاله: مقاله پژوهشی  | در این مقاله یک روش عددی کارا برای حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم ارائه شده است. روش پیشنهادی بر اساس روش تکرار پیکارد، چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته و قاعده‌ی انتگرال‌گیری لژاندر-گاوس انتقال یافته استوار است. با توجه به ویژگی تعامد چندجمله‌ای‌های لژاندر، روش پیشنهادی از یک رابطه‌ی تکراری برای به‌روزرسانی ضرایب بسط جواب تقریبی استفاده می‌کند. هم‌چنین یک ساختار برداری-ماتریسی برای افزایش کارایی و کاهش زمان محاسباتی روش معرفی می‌گردد. نتایج عددی به‌وضوح قابلیت اجرایی و دقت روش پیشنهادی را نشان می‌دهند. |
| تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۷/۲۱  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۳/۲۵ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۳   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۱۲/۱۰ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |

### واژه‌های کلیدی:

معادلات انتگرال فردهلم،  
چندجمله‌ای‌های لژاندر،  
قاعده‌ی انتگرال‌گیری  
لژاندر-گاوس،  
روش تکرار لژاندر-پیکارد.

استناد: تفکری بافقی، محمد؛ حیدری، محمد؛ و بریدلقمانی، قاسم (۱۴۰۲). روش تکرار لژاندر-پیکارد برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم. پژوهش‌های ریاضی، ۹ (۴)، ۸۰ - ۱۱۰.



## مقدمه

بسیاری از پدیده‌های فیزیک، مهندسی، مکانیک سیالات، واکنش‌های الکتروشیمیایی و مدل‌های بیولوژیکی به صورت معادلات انتگرال ظاهر می‌شوند. یکی از مشهورترین آن‌ها، معادله‌ی انتگرال فردهلم نوع دوم است. در اینجا دو حالت خطی و غیرخطی زیر را در نظر می‌گیریم:

- حالت خطی:

$$u(x) = f(x) + \int_{\Lambda} K(x, t)u(t)dt, \quad x \in \Lambda = [a, b], \quad (1)$$

- حالت غیرخطی:

$$u(x) = f(x) + \int_{\Lambda} K(x, t)F(u(t))dt, \quad x \in \Lambda = [a, b], \quad (2)$$

که در آن  $f(x) \in L^1(\Lambda)$  و  $K(x, t) \in L^1(\Lambda \times \Lambda)$ .

معمولاً حل این معادلات از نظر تحلیلی دشوار است. تاکنون روش‌های بسیاری با رویکردهای عددی و نیمه‌تحلیلی برای حل آن‌ها ارائه شده است؛ از قبیل روش‌های نیستروم [۱]، قضیه‌ی مقدار میانی وزن‌دار [۲]، تربیع [۳]، موجک‌های چبیشف، لژاندر و هار [۴]، عناصر متناهی [۵]، تقریب کمترین مربعات [۶]، توابع بلاک-پالس [۷]، توابع پایه‌ای شعاعی [۸]، توابع کلاهی [۹]، تجزیه‌ی آدومیان [۱۰]، تکرار وردشی [۱۱]، اختلال هموتویی [۱۲]، آنالیز هموتویی [۱۳]، برون‌یابی [۱۴]، توابع سینک [۱۵]، چندجمله‌ای‌های برنشتاین [۱۶]، توابع اسپلین و بی-اسپلین [۱۷] و غیره.

در سال‌های اخیر، روش‌های مبتنی بر توابع پایه‌ای متعامد، از جمله روش‌های هم‌محلی، تاو و گالرکین با چندجمله‌ای‌های ژاکوبی، لژاندر و چبیشف مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفته است [۲۰-۱۸]. مهم‌ترین مزیت استفاده از توابع پایه‌ای متعامد، ساده‌سازی روش‌های ذکر شده به صورت حل یک دستگاه جبری خطی / غیرخطی است؛ اما حل دستگاه‌های جبری به‌ویژه در مسائل غیرخطی، زمان‌بر است.

هدف اصلی این مقاله ارائه‌ی یک روش نیمه‌تحلیلی برای حل معادله‌ی انتگرال فردهلم نوع دوم با ترکیبی از روش تکرار پیکارد، چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته و قاعده‌ی انتگرال‌گیری لژاندر-گاوس است. در روش پیشنهادی برای محاسبه‌ی قسمت انتگرالی معادله، از ویژگی تعامد چندجمله‌ای‌های لژاندر استفاده کرده و ضرایب بسط جواب تقریبی که به صورت یک سری قطع شده است، در هر مرحله به‌روزرسانی می‌شود. در ادامه برای افزایش سرعت محاسباتی روش، یک نمایش برداری-ماتریسی نیز ارائه می‌گردد، که کارایی روش پیشنهادی را به قدر قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌دهد.

روند مقاله به شرح زیر است: در بخش ۱، روش تکرار پیکارد و ویژگی‌های چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته شرح داده شده است. فرمول‌بندی روش تکرار لژاندر-پیکارد در بخش ۲ ارائه می‌گردد. به منظور افزایش بهره‌وری و کاهش زمان محاسباتی، ساختار برداری-ماتریسی روش پیشنهادی در بخش ۳ به دست آورده شده است. بخش ۴ به تحلیل همگرایی روش

تکرار لژاندر-پیکارد اختصاص دارد. در بخش ۵ برای نشان دادن دقت و کارایی روش پیشنهادی، چند مثال عددی بررسی شده است. این پژوهش در بخش ۶ با بیان ویژگی‌های روش و نتیجه‌گیری پایان می‌یابد.

## ۱. پیش‌نیازها

در این بخش برخی پیش‌نیازهای ریاضی، قضایا و روش‌هایی را بیان می‌کنیم که در بخش‌های بعدی این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرند.

### ۱.۱ روش تکرار پیکارد

روش تقریب‌های متوالی (تکرار پیکارد)، یکی از مشهورترین روش‌ها برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات انتگرال است. دنباله‌ی روش تکرار پیکارد برای حل معادله انتگرال فردهلم خطی نوع دوم (۱) و (۲) به ترتیب به صورت‌های زیر است:

$$u^i(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) u^{i-1}(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (آ۳)$$

$$u^i(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) F(u^{i-1}(t)) dt, \quad i = 1, 2, \dots \quad (ب۳)$$

پیکارد نشان داد که با در نظر گرفتن تابع تقریبی آغازین مناسب  $u^0(x)$ ، دنباله‌ی  $\{u^i(x)\}_{i=0}^{\infty}$  تحت شرایط مناسب به جواب  $u(x)$  همگرا است [۲۱]. لازم به ذکر است در صورتی که انتگرالده (۳) غیر خطی باشد، محاسبه‌ی انتگرال نظیر ممکن است بسیار پیچیده یا زمان‌بر شود. از این رو، رفع این چالش موضوع مورد علاقه‌ی برخی پژوهشگران است [۲۲-۲۳].

### ۲.۱ چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته

چندجمله‌ای‌های لژاندر، دسته‌ای از چندجمله‌ای‌های متعامد هستند که توسط ریاضیدان فرانسوی، ادین-ماری لژاندر<sup>۱</sup> معرفی شدند. این چندجمله‌ای‌ها که با  $L_n(\tau)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  نشان داده می‌شوند، جواب‌های مسئله‌ی اشتورم-لیوویل تکین

$$(1 - \tau^2) L_n''(\tau) - 2\tau L_n'(\tau) + n(n+1) L_n(\tau) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (۴)$$

و حالت خاصی از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی به صورت

$$L_n(\tau) = J_n'(\tau), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \tau \in I = [-1, 1], \quad (۵)$$

هستند [۲۴]. فرمول رودریگز چندجمله‌ای‌های لژاندر به صورت زیر است:

<sup>۱</sup> Adrien-Marie Legendre

$$L_n(\tau) = \frac{1}{\tau^n n!} \frac{d^n}{d\tau^n} [(\tau^2 - 1)^n], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

این چندجمله‌ای‌ها را می‌توان از رابطه‌ی بازگشتی زیر نیز به دست آورد:

$$L_{n+1}(\tau) = \left( \frac{\tau n + 1}{n + 1} \right) \tau L_n(\tau) - \left( \frac{n}{n + 1} \right) L_{n-1}(\tau), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

که در آن  $L_1(\tau) = \tau$  و  $L_0(\tau) = 1$ .

لم ۱.۱. [۲۴] چندجمله‌ای‌های لژاندر در ویژگی‌های زیر صدق می‌کنند:

$$(i) \quad L_n(\pm 1) = (\pm 1)^n, \quad (8a)$$

$$(ii) \quad L_n(\tau) = \frac{1}{\tau n + 1} (L'_{n+1}(\tau) - L'_{n-1}(\tau)), \quad n = 1, 2, \dots \quad (8b)$$

چندجمله‌ای‌های لژاندر  $L_n(\tau)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  روی  $I$ ، نسبت به تابع وزن  $w(\tau) = 1$  یک دستگاه متعامد تشکیل می‌دهند و داریم:

$$\int_I L_n(\tau) L_m(\tau) d\tau = \left( \frac{2}{\tau n + 1} \right) \delta_{nm}, \quad (9)$$

که در آن  $\delta_{nm}$  تابع دلتای کرونکر است. با تغییر متغیر  $\tau = \frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}$ ،  $\tau \in I$  به  $x \in \Lambda$  انتقال می‌یابد. بر این اساس، چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_n^*(x) = L_n \left( \frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a} \right), \quad x \in \Lambda. \quad (10)$$

مطابق با (۷) رابطه‌ی بازگشتی سه‌جمله‌ای زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} L_0^*(x) = 1, \\ L_1^*(x) = \frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}, \\ L_{n+1}^*(x) = \left( \frac{\tau n + 1}{n + 1} \right) \left( \frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a} \right) L_n^*(x) - \left( \frac{n}{n + 1} \right) L_{n-1}^*(x), \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (11)$$

مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته‌ی  $L_n^*(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  روی  $\Lambda$ ، نسبت به تابع وزن  $w(x) = 1$  یک دستگاه متعامد تشکیل می‌دهند. از این رو با توجه به (۹) و (۱۰) داریم:

$$\int_{\Lambda} L_n^*(x) L_m^*(x) dx = \left( \frac{b-a}{2n+1} \right) \delta_{nm}. \quad (12)$$

بنابراین به‌ازای هر  $f(x) \in L_w^1(\Lambda)$  می‌توان نوشت:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i L_i^*(x), \quad (13)$$

$$f_i = \left( \frac{2i+1}{b-a} \right) \int_a^b f(x) L_i^*(x) dx, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (13b)$$

با استفاده از قاعده‌ی انتگرال‌گیری لژاندر-گاوس انتقال‌یافته، می‌توان (۱۳ب) را به‌صورت زیر به‌دست آورد [۶۴]:

$$f_i \approx \left( \frac{2i+1}{2} \right) \sum_{j=0}^N f(x_j) L_i^*(x_j) \omega_j, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (14)$$

که در آن

$$x_j = \frac{b-a}{2} \tau_j + \frac{b+a}{2}, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (15)$$

و  $\{\tau_j\}_{j=0}^N$  ریشه‌های  $L_{N+1}(\tau)$  هستند.  $\{\omega_j\}_{j=0}^N$  وزن‌های متناظر هستند که از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آیند [۶۴]:

$$\omega_j = \frac{2}{(1-\tau_j^2) [L'_{N+1}(\tau_j)]^2}, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (16)$$

در این‌صورت سری تقریب لژاندر-گاوس انتقال‌یافته‌ی مرتبه‌ی  $N$ -ام تابع  $f(x)$  به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathcal{I}_N f(x) = \sum_{i=0}^N \tilde{f}_i L_i^*(x), \quad \tilde{f}_i = \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j=0}^N f(x_j) L_i^*(x_j) \omega_j, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (17)$$

که در آن

$$\gamma_i = \frac{2}{2i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (18)$$

## ۲. فرمول‌بندی روش تکرار لژاندر-پیکارد

در این بخش، روش تکرار لژاندر-پیکارد را برای حل معادلات انتگرال فردهلم خطی و غیرخطی (۱) و (۲) به‌دست می‌آوریم.

### ۱.۲ حالت خطی

دنباله‌ی روش تکرار پیکارد برای حل (۱) را در نظر بگیرید:

$$u^i(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) u^{i-1}(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

که در آن،  $u^i(x)$  تابع تقریب آغازین است و معمولاً  $f(x)$  در نظر گرفته می‌شود. نخستین گام روش تکرار لژاندر-پیکارد، تقریب توابع  $f(x)$  و  $K(x, t)$  با استفاده از  $\{L_r^*(x)\}_{r=0}^N$  است. با توجه به (۱۷) و (۱۸) داریم:

$$f(x) \approx \sum_{r=0}^N \tilde{f}_r L_r^*(x), \quad \tilde{f}_r = \frac{1}{\gamma_r} \sum_{j=0}^N f(x_j) L_r^*(x_j) \omega_j, \quad r = 0, 1, \dots, N, \quad (20)$$

$$K(x, t) \approx \sum_{r=0}^N \sum_{n=0}^N \tilde{k}_m L_r^*(x) L_n^*(t), \quad (20b)$$

$$\tilde{k}_m = \frac{1}{\gamma_r \gamma_n} \sum_{l=0}^N \sum_{j=0}^N K(x_l, t_j) L_r^*(x_l) L_n^*(t_j) \omega_l \omega_j, \quad r, n = 0, 1, \dots, N, \quad (20c)$$

که در آن

$$x_j = t_j = \frac{b-a}{2} \tau_j + \frac{b+a}{2}, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (21)$$

و  $\{\tau_j\}_{j=0}^N$  در (۱۵) تعریف شده‌اند. با جای‌گذاری (۲۰) و (۲۰b) در (۱۹) داریم:

$$u^i(x) = \sum_{r=0}^N \tilde{f}_r L_r^*(x) + \int_a^b \left( \sum_{r=0}^N \sum_{n=0}^N \tilde{k}_m L_r^*(x) L_n^*(t) \right) u^{i-1}(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots \quad (22)$$

با فرض این‌که تقریب آغازین و جواب‌های تقریبی در مرحله  $i-1$  و  $i$  به ترتیب با  $u^i(x)$  و  $u^{i-1}(x)$  نشان داده شود، داریم:

$$u^i(x) \approx \sum_{r=0}^N \tilde{u}_r^i L_r^*(x), \quad \tilde{u}_r^i = \frac{1}{\gamma_r} \sum_{j=0}^N u^i(x_j) L_r^*(x_j) \omega_j, \quad r = 0, 1, \dots, N, \quad (23a)$$

$$u^{i-1}(x) \approx \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k^{i-1} L_k^*(x), \quad (23b)$$

$$u^i(x) \approx \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k^i L_k^*(x). \quad (23c)$$

هدف، به دست آوردن ضرایب  $\{\tilde{u}_k^i\}_{k=0}^N$  است که جواب تقریبی معادله‌ی (۱۹) را در تکرار  $i$ -ام تولید می‌کند. با جای‌گذاری (۲۳) و (۲۳b) در (۲۲) داریم:

$$\sum_{r=0}^N \tilde{u}_r^i L_r^*(x) = \sum_{r=0}^N \tilde{f}_r L_r^*(x) + \int_a^b \left( \sum_{r=0}^N \sum_{n=0}^N \tilde{k}_{rn} L_r^*(x) L_n^*(t) \right) \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k^{i-1} L_k^*(t) dt. \quad (24)$$

در نتیجه

$$\sum_{r=0}^N \tilde{u}_r^i L_r^*(x) = \sum_{r=0}^N \tilde{f}_r L_r^*(x) + \sum_{r=0}^N \sum_{n=0}^N \tilde{k}_{rn} L_r^*(x) \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k^{i-1} \int_a^b L_n^*(t) L_k^*(t) dt. \quad (25)$$

با توجه به ویژگی تعامد (۱۲) داریم:

$$\sum_{r=0}^N \tilde{u}_r^i L_r^*(x) = \sum_{r=0}^N \tilde{f}_r L_r^*(x) + \sum_{r=0}^N \sum_{n=0}^N \tilde{k}_{rn} L_r^*(x) \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k^{i-1} \left( \frac{b-a}{2} \right) \gamma_k \delta_{kn}. \quad (26)$$

بعد از ساده‌سازی داریم:

$$\sum_{r=0}^N \tilde{u}_r^i L_r^*(x) = \sum_{r=0}^N \left[ \tilde{f}_r + \left( \frac{b-a}{2} \right) \sum_{n=0}^N \tilde{k}_{rn} \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k^{i-1} \gamma_k \delta_{kn} \right] L_r^*(x). \quad (27)$$

حال ضرایب  $\{\tilde{u}_k^i\}_{k=0}^N$  مستقیماً از برابر هم قرار دادن ضرایب چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته در طرفین (۲۷) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\tilde{u}_r^i = \tilde{f}_r + \left( \frac{b-a}{2} \right) \sum_{n=0}^N \tilde{k}_{rn} \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k^{i-1} \gamma_k \delta_{kn}, \quad r=0,1,\dots,N, \quad i=1,2,\dots \quad (28)$$

با بسط سری‌های (۲۸) و تعریف تابع دلتای کرونکر داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r^i &= \tilde{f}_r + \frac{b-a}{2} \left( \tilde{k}_{r0} \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k^{i-1} \gamma_k \delta_{k0} + \tilde{k}_{r1} \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k^{i-1} \gamma_k \delta_{k1} + \dots + \tilde{k}_{rN} \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k^{i-1} \gamma_k \delta_{kN} \right) \\ &= \tilde{f}_r + \frac{b-a}{2} \left( \tilde{k}_{r0} \tilde{u}_0^{i-1} \gamma_0 + \tilde{k}_{r1} \tilde{u}_1^{i-1} \gamma_1 + \dots + \tilde{k}_{rN} \tilde{u}_N^{i-1} \gamma_N \right), \quad r=0,1,\dots,N. \end{aligned} \quad (29)$$

بعد از دسته‌بندی جملات، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{u}_r^i = \tilde{f}_r + \left( \frac{b-a}{2} \right) \sum_{j=0}^N \tilde{k}_{rj} \tilde{u}_j^{i-1} \gamma_j, \quad r=0,1,\dots,N, \quad i=1,2,\dots \quad (30)$$

به این ترتیب، فرمول ضرایب بسط جواب تقریبی در تکرار  $i$ -ام، با یک ترکیب خطی از ضرایب بسط جواب تقریبی در تکرار  $(i-1)$ -ام به دست می‌آید. در این رابطه، ضرایب  $\{\tilde{f}_r\}_{r=0}^N$  و  $\{\tilde{k}_{rj}\}_{r,j=0}^N$  ثابت‌اند و ضرایب  $\{\tilde{u}_r^i\}_{r=0}^N$  در هر مرحله به‌روزرسانی می‌شوند. این روند تا زمانی که شرط توقف معینی برآورده گردد، ادامه می‌یابد. معمولاً از معیار توقف

$$\|u^i(x) - u^{i-1}(x)\|_{\infty} = \max_{x \in [a,b]} |u^i(x) - u^{i-1}(x)| < \varepsilon, \quad (31)$$

استفاده می شود که در آن  $\varepsilon$ ، دقت داده شده است. الگوریتم ۱ گام های روش تکرار لژاندر-پیکارد را در حالت خطی نشان می دهد.

#### الگوریتم ۱ نمایش تکراری روش تکرار لژاندر-پیکارد برای حل معادلات انتگرال فردهلم خطی نوع دوم

ورودی:  $a, b$ ، تابع  $f(x)$ ، هسته ی  $K(x, t)$ ، دقت  $\varepsilon$ ، تقریب اولیه ی  $u^0(x)$  و  $m = 0$  و  $N \in \mathbb{N}$ .

- ۱: توابع پایه ای  $\{L_k^*(x)\}_{k=0}^N$  را با توجه به (۱۱) تعریف کنید.
- ۲: نقاط گرهی  $\{x_j\}_{j=0}^N$  و  $\{t_j\}_{j=0}^N$  و وزن های نظیر  $\{\omega_j\}_{j=0}^N$  را به ترتیب با توجه به (۱۵) و (۱۶) تعریف کنید.
- ۳: محاسبه کن
- ۴:  $\gamma_r = \frac{2}{r+1}$ ،  $r = 0, 1, \dots, N$
- ۵:  $\tilde{f}_r = \frac{1}{\gamma_r} \sum_{j=0}^N f(x_j) L_r^*(x_j) \omega_j$ ،  $r = 0, 1, \dots, N$
- ۶:  $\tilde{k}_{rn} = \frac{1}{\gamma_r \gamma_n} \sum_{l=0}^N \sum_{j=0}^N K(x_l, t_j) L_r^*(x_l) L_n^*(t_j) \omega_l \omega_j$ ،  $r, n = 0, 1, \dots, N$
- ۷:  $\tilde{u}_r^0 = \frac{1}{\gamma_r} \sum_{j=0}^N u^0(x_j) L_r^*(x_j) \omega_j$ ،  $r = 0, 1, \dots, N$
- ۸: برای  $i = 1, 2, \dots$  انجام بده
- ۹:  $m := m + i$
- ۱۰:  $\tilde{u}_r^i = \tilde{f}_r + \left(\frac{b-a}{2}\right) \sum_{j=0}^N \tilde{k}_{rj} \tilde{u}_j^{i-1} \gamma_j$ ،  $r = 0, 1, \dots, N$
- ۱۱:  $u^i(x) = \sum_{r=0}^N \tilde{u}_r^i L_r^*(x)$
- ۱۲: اگر  $\|u^i(x) - u^{i-1}(x)\|_\infty < \varepsilon$ ، آن گاه
- ۱۳: خروج
- ۱۴: پایان (اگر)
- ۱۵: پایان (برای)
- خروجی:  $u(x) \simeq \sum_{r=0}^N \tilde{u}_r^m L_r^*(x)$

**ملاحظه ۱،۲.** در روند روش تکرار لژاندر-پیکارد، نیازی به تقریب سری تیلور، مشتق گیری عددی یا حل دستگاه معادلات خطی/ غیرخطی نیست و تنها با یک دنباله ی تکراری از ضرایب تقریب ها به جواب مطلوب می رسیم. بنابراین سرعت اجرای روش، قابل قبول است و می توان در الگوریتم، مقادیر بزرگ تر  $N$  را برای به دست آوردن تقریب های بهتر نیز در نظر گرفت.

**ملاحظه ۲،۲.** با یک فرآیند مشابه، روش تکرار لژاندر-پیکارد را می توان برای حل دستگاه معادلات انتگرال فردهلم نیز به کار برد. جزئیات آن به خوانندگان علاقه مند واگذار می شود.

#### ۲.۲ حالت غیرخطی

دنباله ی پیکارد متناظر برای معادله ی انتگرال (۲) به صورت زیر است:

$$u^i(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) F(u^{i-1}(t)) dt, \quad i = 1, 2, \dots \quad (32)$$

با جای گذاری (۲۰) و (۲۰ب) در (۳۲) داریم:

$$u^i(x) = \sum_{r=0}^N \tilde{f}_r L_r^*(x) + \int_a^b \sum_{r=0}^N \sum_{n=0}^N (\tilde{k}_{rn} L_r^*(x) L_n^*(t)) F(u^{i-1}(t)) dt, \quad i = 1, 2, \dots \quad (33)$$

حال با جای گذاری (۲۳ب) و (۲۳ج) در (۳۳) داریم:

$$\sum_{r=0}^N \tilde{u}_r^i L_r^*(x) = \sum_{r=0}^N \tilde{f}_r L_r^*(x) + \int_a^b \left( \sum_{r=0}^N \sum_{n=0}^N \tilde{k}_{rn} L_r^*(x) L_n^*(t) \right) \sum_{k=0}^N \tilde{F}_k^{i-1} L_k^*(t) dt, \quad (34)$$

که در آن

$$\tilde{F}_r^{i-1} = \frac{1}{\gamma_r} \sum_{j=0}^N F(u^{i-1}(t_j)) L_r^*(t_j) \omega_j, \quad r = 0, 1, \dots, N. \quad (35)$$

در این صورت داریم:

$$\sum_{r=0}^N \tilde{u}_r^i L_r^*(x) = \sum_{r=0}^N \tilde{f}_r L_r^*(x) + \sum_{r=0}^N \sum_{n=0}^N \tilde{k}_{rn} L_r^*(x) \sum_{k=0}^N \tilde{F}_k^{i-1} \int_a^b L_n^*(t) L_k^*(t) dt. \quad (36)$$

حال مشابه با روند (۲۹)–(۲۶) بعد از ساده‌سازی و دسته‌بندی جملات، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\tilde{u}_r^i = \tilde{f}_r + \left( \frac{b-a}{\gamma} \right) \sum_{j=0}^N \tilde{k}_{rj} \tilde{F}_j^{i-1} \gamma_j, \quad r = 0, 1, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (37)$$

که در آن ضرایب  $\{\tilde{k}_{rj}\}_{r,j=0}^N$  ثابت‌اند و ضرایب  $\{\tilde{F}_j^{i-1}\}_{j=0}^N$  در هر مرحله با توجه به ضرایب  $\{\tilde{u}_r^{i-1}\}_{r=0}^N$  به‌روزرسانی می‌شوند.

الگوریتم ۲ گام‌های روش تکرار لژاندر-پیکارد را در حالت غیرخطی نشان می‌دهد.

#### الگوریتم ۲ نمایش تکراری روش تکرار لژاندر-پیکارد برای حل معادلات انتگرال فرد هلم غیرخطی نوع دوم

ورودی:  $a, b$ , تابع  $f(x)$ , تابع  $F(x)$ , هسته‌ی  $K(x, t)$ , دقت  $\varepsilon$ , تقریب اولیه‌ی  $u^0(x)$ ,  $m = 0$  و  $N \in \mathbb{N}$ .

- ۱: توابع پایه‌ای  $\{L_k^*(x)\}_{k=0}^N$  را با توجه به (۱۱) تعریف کنید.
- ۲: نقاط گرهی  $\{x_j\}_{j=0}^N$  و  $\{t_j\}_{j=0}^N$  و وزن‌های نظیر  $\{\omega_j\}_{j=0}^N$  را به‌ترتیب با توجه به (۱۵) و (۱۶) تعریف کنید.
- ۳: محاسبه کن
- ۴:  $\gamma_r = \frac{\gamma}{\gamma_r + 1}, \quad r = 0, 1, \dots, N$
- ۵:  $\tilde{f}_r = \frac{1}{\gamma} \sum_{j=0}^N f(x_j) L_r^*(x_j) \omega_j, \quad r = 0, 1, \dots, N$
- ۶:  $\tilde{k}_{rn} = \frac{1}{\gamma_r \gamma_n} \sum_{l=0}^N \sum_{j=0}^N K(x_l, t_j) L_r^*(x_l) L_n^*(t_j) \omega_l \omega_j, \quad r, n = 0, 1, \dots, N$
- ۷:  $\tilde{u}_r^0 = \frac{1}{\gamma_r} \sum_{j=0}^N u^0(x_j) L_r^*(x_j) \omega_j, \quad r = 0, 1, \dots, N$
- ۸: برای  $i = 1, 2, \dots$  انجام بده
- ۹:  $m := m + i$
- ۱۰:  $\tilde{F}_r^{i-1} = \frac{1}{\gamma_r} \sum_{j=0}^N F(u^{i-1}(t_j)) L_r^*(t_j) \omega_j, \quad r = 0, 1, \dots, N$
- ۱۱:  $\tilde{u}_r^i = \tilde{f}_r + \left( \frac{b-a}{\gamma} \right) \sum_{j=0}^N \tilde{k}_{rj} \tilde{F}_j^{i-1} \gamma_j, \quad r = 0, 1, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots$
- ۱۲:  $u^i(x) = \sum_{r=0}^N \tilde{u}_r^i L_r^*(x)$
- ۱۳: اگر  $\|u^i(x) - u^{i-1}(x)\|_\infty < \varepsilon$ , آن‌گاه
- ۱۴: خروج
- ۱۵: پایان (اگر)
- ۱۶: پایان (برای)

خروجی:  $u(x) \simeq \sum_{r=0}^N \tilde{u}_r^m L_r^*(x)$

### ۳. ساختار برداری-ماتریسی

از آنجایی که محاسبه‌ی جمله به جمله‌ی ضرایب چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته به‌ازای  $N$  های بزرگ قدری زمان‌بر است، در این بخش یک نمایش فشرده‌ی برداری-ماتریسی برای افزایش کارایی روش تکرار لژاندر-پیکارد ارائه می‌دهیم. برای این منظور، ضرایب جواب تقریبی  $u^i(x)$  را به‌صورت برداری زیر در نظر می‌گیریم:

$$\tilde{\mathbf{u}}^i = [\tilde{u}_1^i, \tilde{u}_2^i, \dots, \tilde{u}_N^i]^T. \quad (38)$$

همچنین مقادیر جواب تقریبی تکرار  $i$ -ام به‌ازای نقاط گرهی (۱۵) را به‌صورت برداری زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{u}^i = [u^i(x_1), u^i(x_2), \dots, u^i(x_N)]^T. \quad (39)$$

لم ۱،۳. برای  $j = 0, 1, \dots, N$  داریم:

$$L_n^*(x_j) = L_n(\tau_j).$$

برهان. با توجه به تعریف (۱۰)، به‌آسانی ثابت می‌شود.

باتوجه به (۲۳) و لم ۱،۳، بردار  $\mathbf{u}^i$  را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^i &= \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^i L_0^*(x_1) + \tilde{u}_2^i L_1^*(x_1) + \dots + \tilde{u}_N^i L_{N-1}^*(x_1) \\ \tilde{u}_1^i L_0^*(x_2) + \tilde{u}_2^i L_1^*(x_2) + \dots + \tilde{u}_N^i L_{N-1}^*(x_2) \\ \vdots \\ \tilde{u}_1^i L_0^*(x_N) + \tilde{u}_2^i L_1^*(x_N) + \dots + \tilde{u}_N^i L_{N-1}^*(x_N) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_0^*(x_1) & L_1^*(x_1) & \dots & L_{N-1}^*(x_1) \\ L_0^*(x_2) & L_1^*(x_2) & \dots & L_{N-1}^*(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_0^*(x_N) & L_1^*(x_N) & \dots & L_{N-1}^*(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^i \\ \tilde{u}_2^i \\ \vdots \\ \tilde{u}_N^i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_0(\tau_1) & L_1(\tau_1) & \dots & L_{N-1}(\tau_1) \\ L_0(\tau_2) & L_1(\tau_2) & \dots & L_{N-1}(\tau_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_0(\tau_N) & L_1(\tau_N) & \dots & L_{N-1}(\tau_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^i \\ \tilde{u}_2^i \\ \vdots \\ \tilde{u}_N^i \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{C}_u \tilde{\mathbf{u}}^i, \end{aligned} \quad (40)$$

که در آن

$$\mathbf{C}_u = \begin{bmatrix} L_1(\tau_1) & L_1(\tau_1) & \cdots & L_N(\tau_1) \\ L_1(\tau_1) & L_1(\tau_1) & \cdots & L_N(\tau_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1(\tau_N) & L_1(\tau_N) & \cdots & L_N(\tau_N) \end{bmatrix}, \quad (41)$$

یک ماتریس ثابت و مستقل از  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{b}$  است. حال روش تکرار لژاندر-پیکارد را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

### ۱.۳ حالت خطی

بر اساس (۳۰)، بردار  $\tilde{\mathbf{u}}^i$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\tilde{\mathbf{u}}^i = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^i \\ \tilde{u}_1^i \\ \vdots \\ \tilde{u}_N^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 + \left(\frac{b-a}{2}\right) \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{1j} \tilde{u}_j^{i-1} \gamma_j \\ \tilde{f}_1 + \left(\frac{b-a}{2}\right) \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{1j} \tilde{u}_j^{i-1} \gamma_j \\ \vdots \\ \tilde{f}_N + \left(\frac{b-a}{2}\right) \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{Nj} \tilde{u}_j^{i-1} \gamma_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \tilde{f}_N \end{bmatrix} + \frac{b-a}{2} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{1j} \tilde{u}_j^{i-1} \gamma_j \\ \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{1j} \tilde{u}_j^{i-1} \gamma_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{Nj} \tilde{u}_j^{i-1} \gamma_j \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{f}} + \frac{b-a}{2} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{G} \tilde{\mathbf{u}}^{i-1}, \quad (42)$$

که در آن

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \tilde{f}_N \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & \tilde{k}_{11} & \cdots & \tilde{k}_{1N} \\ \tilde{k}_{11} & \tilde{k}_{11} & \cdots & \tilde{k}_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{k}_{N1} & \tilde{k}_{N1} & \cdots & \tilde{k}_{NN} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \gamma_1 & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \gamma_N \end{bmatrix}. \quad (43)$$

بدین صورت بردار ضرایب جواب تقریبی  $\tilde{\mathbf{u}}^i$  بر اساس بردار ضرایب  $\tilde{\mathbf{u}}^{i-1}$  به دست می‌آید. مشابه با نمایش تکراری روش

تکرار لژاندر-پیکارد، بردار ضرایب  $\tilde{\mathbf{u}}^i$  تا برقراری شرایط معینی بروزرسانی می‌شود. معیار توقف را به صورت

$$\|\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} |u^i(x_j) - u^{i-1}(x_j)| < \varepsilon, \quad (44)$$

یا

$$\|\tilde{\mathbf{u}}^i - \tilde{\mathbf{u}}^{i-1}\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} |\tilde{u}_j^i - \tilde{u}_j^{i-1}| < \varepsilon, \quad (45)$$

در نظر می‌گیریم، که در آن  $\varepsilon$  دقت داده شده است. الگوریتم ۳ گام‌های نمایش برداری-ماتریسی روش تکرار لژاندر-پیکارد را در حالت خطی نشان می‌دهد.

**الگوریتم ۳** نمایش برداری-ماتریسی روش تکرار لژاندر-پیکارد برای حل معادلات انتگرال فردهلم خطی نوع دوم

**ورودی:**  $a, b$ , تابع  $f(x)$ , هسته  $K(x, t)$ , دقت  $\varepsilon$ , تقریب اولیه  $u^0(x)$  و  $m \in \mathbb{N}$  و  $N \in \mathbb{N}$

- ۱: توابع پایه‌ای  $\{L_k^*(t)\}_{k=0}^N$  را با توجه به (۱۱) تعریف کنید.
- ۲: نقاط گرهی  $\{x_j\}_{j=0}^N$  و  $\{t_j\}_{j=0}^N$  و وزن‌های نظیر  $\{\omega_j\}_{j=0}^N$  را به ترتیب با توجه به (۱۵) و (۱۶) تعریف کنید.
- ۳: تعریف کنید  $u^0 = [u^0(x_0), u^0(x_1), \dots, u^0(x_N)]^T$ .
- ۴: بردار  $\tilde{f}$  و ماتریس‌های  $\tilde{K}$  و  $G$  را به ترتیب با توجه به (۴۳) تعریف کنید.
- ۵: برای  $i = 1, 2, \dots$  انجام بده
- ۶:  $m := m + i$
- ۷: بردار ضرایب را با توجه به  $\tilde{u}^i = \tilde{f} + \frac{b-a}{\gamma} \tilde{K} G \tilde{u}^{i-1}$  محاسبه کنید.
- ۸: محاسبه کنید  $u^i = C_u \tilde{u}^i$
- ۹: اگر  $\|u^i - u^{i-1}\|_\infty < \varepsilon$  آن گاه
- ۱۰: خروج
- ۱۱: پایان (اگر)
- ۱۲: پایان (برای)
- خروجی:  $u(x) \simeq \sum_{r=0}^N u_r^m L_r^*(x)$

ملاحظه ۱،۳. چون بردار  $\tilde{f}$  و ماتریس‌های ضرایب  $\tilde{K}$  و  $G$  در هر تکرار ثابت‌اند، می‌توانیم آن‌ها را تنها یک مرتبه قبل از حلقه‌ی الگوریتم محاسبه نماییم؛ بنابراین ساختار برداری-ماتریسی روش از نظر محاسباتی سریع‌تر از نمایش تکراری استاندارد است.

**۲.۳ حالت غیر خطی**

در این حالت نخست مشابه با روند (۴۱)-(۳۸) عمل می‌کنیم. سپس با توجه به (۳۷) بردار  $\tilde{u}^i$  را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\tilde{u}^i = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^i \\ \tilde{u}_2^i \\ \vdots \\ \tilde{u}_N^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 + \left(\frac{b-a}{\gamma}\right) \sum_{j=0}^N \tilde{k}_{1j} \tilde{F}_j^{i-1} \gamma_j \\ \tilde{f}_2 + \left(\frac{b-a}{\gamma}\right) \sum_{j=0}^N \tilde{k}_{2j} \tilde{F}_j^{i-1} \gamma_j \\ \vdots \\ \tilde{f}_N + \left(\frac{b-a}{\gamma}\right) \sum_{j=0}^N \tilde{k}_{Nj} \tilde{F}_j^{i-1} \gamma_j \end{bmatrix}. \quad (46)$$

مشابه با روند (۴۲)، بعد از ساده‌سازی داریم:

$$\tilde{u}^i = \tilde{f} + \frac{b-a}{\gamma} \tilde{K} G \tilde{F}^{i-1}, \quad (47)$$

که در آن  $\tilde{f}$ ,  $\tilde{K}$  و  $G$  در (۴۳) تعریف شده‌اند و

$$\tilde{F}^{i-1} = [\tilde{F}_1^{i-1}, \tilde{F}_2^{i-1}, \dots, \tilde{F}_N^{i-1}]^T = G^{-1} C_u^T W F^{i-1}, \quad (48)$$

که در آن

$$\mathbf{F}^{i-1} = [F(\mathbf{u}_0^{i-1}), F(\mathbf{u}_1^{i-1}), \dots, F(\mathbf{u}_N^{i-1})]^T.$$

بدین صورت بردار ضرایب جواب تقریبی  $\tilde{\mathbf{u}}^i$  به دست می‌آید. با این فرمول، الگوریتم حالت غیرخطی را می‌توان مشابه با الگوریتم ۳ به صورت زیر نوشت.

#### الگوریتم ۴ نمایش برداری-ماتریسی روش تکرار لژاندر-پیکارد برای حل معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی نوع دوم

ورودی:  $a, b$ , تابع  $f(x)$ , تابع  $F(x)$ , هسته  $K(x, t)$ , دقت  $\varepsilon$ , تقریب اولیه  $u^\circ(x)$  و  $m = 0$  و  $N \in \mathbb{N}$ .

۱: توابع پایه‌ای  $\{L_k^*(t)\}_{k=0}^N$  را با توجه به (۱۱) تعریف کنید.

۲: نقاط گرهی  $\{x_j\}_{j=0}^N$  و  $\{t_j\}_{j=0}^N$  و وزن‌های نظیر  $\{\omega_j\}_{j=0}^N$  را به ترتیب با توجه به (۱۵) و (۱۶) تعریف کنید.

۳: تعریف کنید  $\mathbf{u}^\circ = [u^\circ(x_0), u^\circ(x_1), \dots, u^\circ(x_N)]^T$ .

۴: بردار  $\tilde{\mathbf{f}}$  و ماتریس‌های  $\tilde{\mathbf{K}}$  و  $\mathbf{G}$  را به ترتیب با توجه به (۴۳) تعریف کنید.

۵: برای  $i = 1, 2, \dots$  انجام بده

۶:  $m := m + i$

۷:  $\mathbf{F}^{i-1} = [F(\mathbf{u}_0^{i-1}), F(\mathbf{u}_1^{i-1}), \dots, F(\mathbf{u}_N^{i-1})]^T$

۸:  $\tilde{\mathbf{F}}^{i-1} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{C}_u^T \mathbf{W} \mathbf{F}^{i-1}$

۹: بردار ضرایب را با توجه به  $\tilde{\mathbf{u}}^i = \tilde{\mathbf{f}} + \frac{b-a}{\gamma} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{G} \tilde{\mathbf{F}}^{i-1}$  محاسبه کنید.

۱۰: محاسبه کنید  $\mathbf{u}^i = \mathbf{C}_u \tilde{\mathbf{u}}^i$

۱۱: اگر  $\|\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}\|_\infty < \varepsilon$  آن‌گاه

۱۲: خروج

۱۳: پایان (اگر)

۱۴: پایان (برای)

خروجی:  $u(x) \simeq \sum_{r=0}^N \mathbf{u}_r^m L_r^*(x)$

#### ۴. تحلیل همگرایی روش

به‌خاطر انباشتگی خطای گرد کردن و استفاده از سری قطع شده لژاندر مرتبه‌ی  $N$  در گام‌های روش، نتایج همگرایی روش تکرار لژاندر-پیکارد با روش پیکارد کلاسیک تفاوت دارد. برای حصول همگرایی روش، در این بخش نشان می‌دهیم که روش تکرار لژاندر-پیکارد تحت شرایط مناسب و کافی برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی همگرا خواهد بود.

قضیه ۱،۴. برای معادله‌ی انتگرال (۲)، روش تکرار لژاندر-پیکارد همگراست، هرگاه

$$b - a < \frac{2}{L \|\mathbf{C}_u \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}_u^T \mathbf{W}\|}, \quad (49)$$

که در آن  $L$  ثابت لیپ‌شیتز برای تابع  $F$  است.

برهان. از (۴۰)، (۴۷) و (۴۸) داریم:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1} &= \mathbf{C}_u (\tilde{\mathbf{u}}^i - \tilde{\mathbf{u}}^{i-1}) \\
&= \mathbf{C}_u \left[ \left( \tilde{\mathbf{f}} + \frac{b-a}{\gamma} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{G} \tilde{\mathbf{F}}^{i-1} \right) - \left( \tilde{\mathbf{f}} + \frac{b-a}{\gamma} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{G} \tilde{\mathbf{F}}^{i-2} \right) \right] \\
&= \frac{b-a}{\gamma} \mathbf{C}_u \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{G} (\tilde{\mathbf{F}}^{i-1} - \tilde{\mathbf{F}}^{i-2}) \\
&= \frac{b-a}{\gamma} \mathbf{C}_u \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{G} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{C}_u^T \mathbf{W} (\mathbf{F}^{i-1} - \mathbf{F}^{i-2}) \\
&= \frac{b-a}{\gamma} \mathbf{C}_u \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}_u^T \mathbf{W} (\mathbf{F}^{i-1} - \mathbf{F}^{i-2}) \\
&= \frac{b-a}{\gamma} \mathbf{Q} (\mathbf{F}^{i-1} - \mathbf{F}^{i-2}),
\end{aligned} \tag{۵۰}$$

که در آن

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}_u \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}_u^T \mathbf{W}. \tag{۵۱}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}\| &= \frac{b-a}{\gamma} \|\mathbf{Q} (\mathbf{F}^{i-1} - \mathbf{F}^{i-2})\| \\
&\leq \frac{b-a}{\gamma} \|\mathbf{Q}\| \|\mathbf{F}^{i-1} - \mathbf{F}^{i-2}\| \\
&= \frac{b-a}{\gamma} \|\mathbf{Q}\| \max_{1 \leq k \leq N} |F(\mathbf{u}_k^{i-1}) - F(\mathbf{u}_k^{i-2})| \\
&\leq \frac{b-a}{\gamma} \|\mathbf{Q}\| \max_{1 \leq k \leq N} L |\mathbf{u}_k^{i-1} - \mathbf{u}_k^{i-2}| \\
&= \frac{b-a}{\gamma} L \|\mathbf{Q}\| \max_{1 \leq k \leq N} |\mathbf{u}_k^{i-1} - \mathbf{u}_k^{i-2}| \\
&= \frac{b-a}{\gamma} L \|\mathbf{Q}\| \|\mathbf{u}^{i-1} - \mathbf{u}^{i-2}\|,
\end{aligned} \tag{۵۲}$$

که در آن  $L$  ثابت لیپشیتز تابع  $F$  است. حال با استفاده مکرر از (۵۲) داریم:

$$\begin{aligned}
\|u^i - u^{i-1}\| &\leq \frac{b-a}{\gamma} L \|Q\| \|u^{i-1} - u^{i-2}\| \\
&\leq \left( \frac{b-a}{\gamma} L \|Q\| \right)^2 \|u^{i-2} - u^{i-3}\| \\
&\leq \left( \frac{b-a}{\gamma} L \|Q\| \right)^3 \|u^{i-3} - u^{i-4}\| \\
&\leq \dots \\
&\leq \left( \frac{b-a}{\gamma} L \|Q\| \right)^{i-1} \|u^1 - u^0\|.
\end{aligned} \tag{۵۳}$$

در نتیجه

$$\|u^i - u^{i-1}\| \leq \left( \frac{b-a}{\gamma} L \|Q\| \right)^{i-1} \|u^1 - u^0\|. \tag{۵۴}$$

حال اگر  $\frac{b-a}{\gamma} L \|Q\| < 1$ ، آن‌گاه

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|u^i - u^{i-1}\| = 0, \tag{۵۵}$$

که برهان را کامل می‌کند.

## ۵. مثال‌های عددی

در این بخش نتایج حاصل از روش تکرار لژاندر-پیکارد برای حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم گزارش شده است. الگوریتم‌ها با نرم افزار میپل نسخه ۲۰۱۶.۲a با دقت ۶۴ رقم بر روی رایانه‌ی شخصی با پردازنده‌ی چهار هسته‌ای و هشت گیگابایت رم، تحت سیستم عامل ویندوز ۷ نسخه ۶۴ بیتی، بر روی چند مثال اجرا گردیده‌اند. برای ارزیابی دقت روش پیشنهادی، با در نظر گرفتن

$$L_\gamma = \|u_{\text{ext}}(x) - u_{\text{app}}(x)\|_\gamma,$$

$$L_\infty = \|u_{\text{ext}}(x) - u_{\text{app}}(x)\|_\infty,$$

که در آن  $u_{\text{ext}}(x)$  و  $u_{\text{app}}(x)$  به ترتیب جواب‌های دقیق و تقریبی هستند، نتایج به دست آمده را با روش‌های دیگر مقایسه نمودیم.

**مثال ۱.۵.** معادله‌ی انتگرال خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$u(x) = f(x) + \frac{1}{\gamma} \int_{\frac{1}{\gamma}}^1 \frac{xt-1}{1+x} u(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{۵۶}$$

که در آن  $f(x)$  به گونه‌ای انتخاب می‌شود تا جواب دقیق  $u(x) = \sin(x+1)$  به دست آید. با در نظر گرفتن  $N = 3$ ، داریم:

$$C_u = \begin{bmatrix} 1 & -0.86114 & 0.61233 & -0.30475 \\ 1 & -0.33998 & -0.32662 & 0.41173 \\ 1 & 0.33998 & -0.32662 & -0.41173 \\ 1 & 0.86114 & 0.61233 & 0.30475 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} -0.051010 & 0.014441 & 9.2500 \times 10^{-11} & 1.6082 \times 10^{-10} \\ 0.033389 & 0.010327 & -5.7000 \times 10^{-11} & -6.7200 \times 10^{-11} \\ -0.0015643 & -0.0042647 & 1.5000 \times 10^{-11} & -5.2500 \times 10^{-12} \\ -0.0021834 & 0.00018771 & -7.8750 \times 10^{-12} & -1.4700 \times 10^{-11} \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 2 & . & . & . \\ . & 0.66667 & . & . \\ . & . & 0.40000 & . \\ . & . & . & 0.28571 \end{bmatrix}, \quad (57)$$

$$\tilde{f} = \begin{bmatrix} 1.5321 \\ 0.37771 \\ -0.036351 \\ -0.0040749 \end{bmatrix}.$$

در این صورت جواب تقریبی روش پیشنهادی بعد از ۲۰ تکرار به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u(x) \approx 0.9998 + 1.0040x - 0.0184x^2 - 0.1447x^3. \quad (58)$$

برای بررسی کارایی روش پیشنهادی، جدول ۱ را آماده کرده‌ایم، که ماکزیمم خطای مطلق روش پیشنهادی را به ازای مقادیر مختلف  $N$ ، نشان می‌دهد. جدول ۲ به مقایسه‌ی زمان محاسباتی حلقه‌ی تکرار **for** مابین نمایش تکراری و برداری-ماتریسی اختصاص دارد. با ملاحظه‌ی نتایج این جدول در می‌یابیم که نمایش برداری-ماتریسی روش، به قدر قابل ملاحظه‌ای سریع‌تر است؛ بنابراین در مثال‌های بعدی، روش پیشنهادی را با ساختار برداری-ماتریسی اجرا می‌کنیم. خطای مطلق به صورت نقطه به نقطه نیز با خطای حاصل از روش درونیاب اسپلاین طبیعی (NSI) و روش درونیاب شبه اسپلاین (SQI) (۱-۲) در جدول ۳ مقایسه شده است. شکل ۱ نمودارهای جواب تقریبی، دقیق و خطای مطلق نظیر را به ازای  $N = 20$  و  $\varepsilon = 10^{-25}$  نشان می‌دهد. نمودار لگاریتم خطای حاصل از روش تکرار لژاندر-پیکارد در شکل ۲ به ازای مقادیر متفاوت  $N$  رسم شده است. جدول‌ها و شکل‌های ارائه شده، دقت و کارایی روش این پژوهش را تأیید می‌کند.

جدول ۱. ماکزیمم قدر مطلق خطای روش تکرار لژاندر-پیکارد با شرط توقف  $\varepsilon = 10^{-25}$  (تعداد تکرارها = ۲۰)

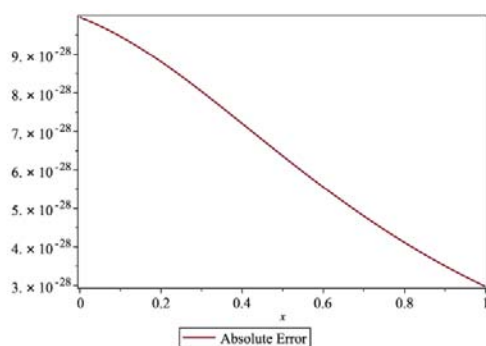
| N            | ۵                         | ۱۰                         | ۱۵                          | ۲۰                         | ۲۵                         |
|--------------|---------------------------|----------------------------|-----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $L_{\infty}$ | $۸.۰۶۵۱۸۹ \times 10^{-7}$ | $۳.۱۶۹۱۳۳ \times 10^{-14}$ | $۴.۰۰۱۱۴۷۷ \times 10^{-23}$ | $۹.۹۶۴۵۷۱ \times 10^{-28}$ | $۸.۳۵۷۹۸۴ \times 10^{-33}$ |

جدول ۲. مقایسه‌ی زمان محاسباتی (ثانیه) نمایش تکراری (IF) و برداری-ماتریسی (VMF) روش تکرار لژاندر-پیکارد با شرط توقف  $\varepsilon = 10^{-25}$ .

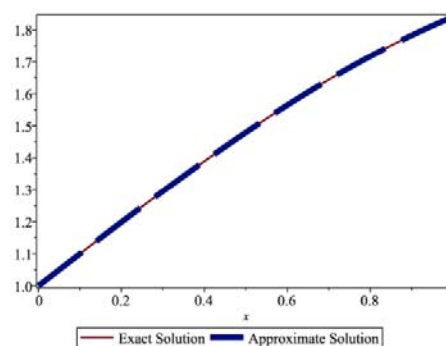
| N   | ۵     | ۱۰    | ۱۵    | ۲۰    | ۲۵    |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| IF  | ۰.۷۶۶ | ۱.۶۷۲ | ۳.۴۳۷ | ۴.۸۲۸ | ۶.۲۳۴ |
| VMF | ۰.۱۲۵ | ۰.۱۵۷ | ۰.۲۳۵ | ۰.۳۵۹ | ۰.۵۳۱ |

جدول ۳. مقایسه‌ی خطای مطلق نقطه به نقطه‌ی روش پیشنهادی با ۱۰ تکرار و روش‌های ارائه شده در [۲۵].

|     | NSI[۲۵]              | SQI1[۲۵]             | SQI2[۲۵]             | روش پیشنهادی               |
|-----|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------------|
| x   | N = ۲۰               | N = ۲۰               | N = ۲۰               | N = ۲۰                     |
| ۰.۰ | $۴.۶ \times 10^{-4}$ | $۵.۳ \times 10^{-9}$ | $۱.۰ \times 10^{-8}$ | $۱.۶۸۸۳۹۴ \times 10^{-12}$ |
| ۰.۱ | $۵.۵ \times 10^{-4}$ | $۱.۲ \times 10^{-8}$ | $۳.۱ \times 10^{-7}$ | $۱.۶۰۴۳۴۱ \times 10^{-12}$ |
| ۰.۲ | $۶.۱ \times 10^{-4}$ | $۲.۹ \times 10^{-8}$ | $۵.۳ \times 10^{-8}$ | $۱.۴۹۲۶۶۸ \times 10^{-12}$ |
| ۰.۳ | $۶.۵ \times 10^{-4}$ | $۴.۷ \times 10^{-8}$ | $۱.۶ \times 10^{-7}$ | $۱.۳۶۱۸۰۳ \times 10^{-12}$ |
| ۰.۴ | $۶.۸ \times 10^{-4}$ | $۶.۴ \times 10^{-8}$ | $۲.۸ \times 10^{-7}$ | $۱.۲۲۰۹۹۶ \times 10^{-12}$ |
| ۰.۵ | $۶.۸ \times 10^{-4}$ | $۸.۰ \times 10^{-8}$ | $۳.۰ \times 10^{-7}$ | $۱.۰۷۸۶۷۷ \times 10^{-12}$ |
| ۰.۶ | $۶.۶ \times 10^{-4}$ | $۹.۵ \times 10^{-8}$ | $۲.۶ \times 10^{-7}$ | $۹.۴۱۴۲۳۸ \times 10^{-13}$ |
| ۰.۷ | $۶.۴ \times 10^{-4}$ | $۱.۰ \times 10^{-7}$ | $۱.۹ \times 10^{-7}$ | $۸.۱۳۴۴۲۲ \times 10^{-13}$ |
| ۰.۸ | $۶.۰ \times 10^{-4}$ | $۱.۲ \times 10^{-7}$ | $۱.۲ \times 10^{-7}$ | $۶.۹۷۷۵۴۵ \times 10^{-13}$ |
| ۰.۹ | $۵.۶ \times 10^{-4}$ | $۱.۳ \times 10^{-8}$ | $۶.۶ \times 10^{-8}$ | $۵.۹۴۶۴۵۲ \times 10^{-13}$ |
| ۱.۰ | $۵.۱ \times 10^{-4}$ | $۱.۰ \times 10^{-9}$ | $۲.۲ \times 10^{-8}$ | $۵.۰۴۱۴۹۱ \times 10^{-13}$ |

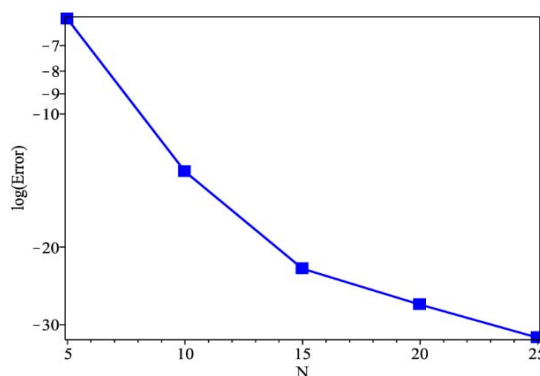


(ب)



(ا)

شکل ۱. (ا) مقایسه‌ی جواب‌های تقریبی و دقیق، (ب) خطای مطلق نظیر، به‌ازای  $N = ۲۰$  و شرط توقف  $\varepsilon = 10^{-25}$ .



شکل ۲. لگاریتم ماکزیمم خطای مطلق روش پیشنهادی با شرط توقف  $\varepsilon = 10^{-25}$ .

مثال ۲.۵. معادله‌ی انتگرال خطی زیر موسوم به لاو<sup>۱</sup> [۲۶]

$$u(x) = 1 + \frac{1}{\pi} (\arctan(x-1) - \arctan(x+1)) - \frac{\delta}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\delta^2 + (x-t)^2} u(t) dt, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (59)$$

را در نظر بگیرید، که در آن  $\delta = -1$ . جواب دقیق این معادله  $u(x) = 1$  است. با در نظر گرفتن  $N=5$  بعد از ۲۰ تکرار، روش پیشنهادی جواب تقریبی زیر را به دست می‌دهد:

(۶۰)

$$u(x) \approx 1.000 - 4.476 \times 10^{-137} x - 0.00008731 x^2 + 1.891 \times 10^{-126} x^3 + 0.00007964 x^4 - 1.487 \times 10^{-126} x^5.$$

جدول ۴ نشان‌دهنده‌ی خطای مطلق روش ارائه شده در این مقاله به‌ازای مقادیر مختلف  $N$  است؛ از طرفی خطای  $L_p$  در جدول ۵ با خطای چند روش کارا مقایسه گردیده است. این جدول نشان می‌دهد روش پیشنهادی از روش‌های ارائه شده در [۲۷-۳۳] دقیق‌تر است. شکل ۳ نمودار لگاریتم خطا به‌ازای مقادیر متفاوت  $N$  را نشان می‌دهد.

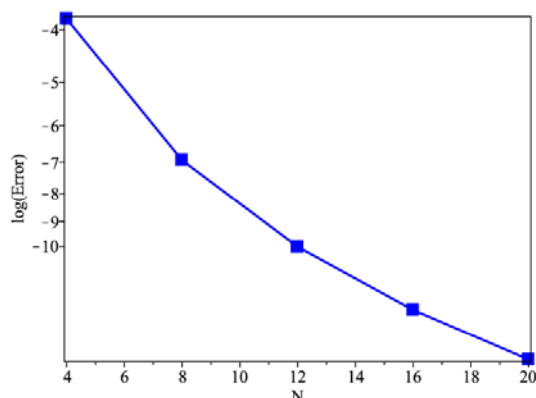
جدول ۴. ماکزیمم قدر مطلق خطای روش تکرار لژاندر-پیکارد با شرط توقف  $\varepsilon = 10^{-25}$ . (تعداد تکرارها = ۷۲)

| N            | ۴                         | ۸                         | ۱۲                         | ۱۶                         | ۲۰                         |
|--------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $L_{\infty}$ | $1.540884 \times 10^{-4}$ | $1.138048 \times 10^{-7}$ | $9.486453 \times 10^{-11}$ | $8.080532 \times 10^{-14}$ | $6.949124 \times 10^{-17}$ |

<sup>۱</sup> Love's integral equation

جدول ۵. مقایسه‌ی خطای مطلق روش پیشنهادی با شرط توقف  $\varepsilon = 10^{-25}$  و روش‌های ارائه شده در [۲۷-۳۳].

| روش                                                        | $L_p$ خطای                |
|------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (۲۷) موجک هار $(M = 32)$                                   | $4.45168 \times 10^{-3}$  |
| توابع هار کسری [۲۸] $(m = 64)$                             | $1.89036 \times 10^{-3}$  |
| موجک هارمونیک [۲۹] $(M = 32)$                              | $8.24901 \times 10^{-4}$  |
| شبه درونیایی [۳۰] $(N = 5, d = 0.01)$                      | $9.75676 \times 10^{-4}$  |
| موجک هار بهبودیافته [۳۱] $(M = 32)$                        | $3.29179 \times 10^{-5}$  |
| نیستروم بهبودیافته [۳۲] $(N = 32, \gamma = -0.5, h = 1)$   | $5.16371 \times 10^{-6}$  |
| توابع پایه‌ای مثلثاتی سینوسی [۳۳] $(d = 16, M = 2, m = 8)$ | $3.05403 \times 10^{-8}$  |
| تکرار لژاندر-پیکارد $(N = 10)$                             | $3.27617 \times 10^{-9}$  |
| تکرار لژاندر-پیکارد $(N = 16)$                             | $8.08053 \times 10^{-14}$ |
| تکرار لژاندر-پیکارد $(N = 32)$                             | $1.07912 \times 10^{-25}$ |



شکل ۳. لگاریتم ماکزیمم خطای مطلق روش پیشنهادی با شرط توقف  $\varepsilon = 10^{-25}$ .

مثال ۳.۵. معادله‌ی انتگرال غیرخطی

$$u(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{5} \int_0^1 \cos(\pi x) \sin(\pi t) (u(t))^2 dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (61)$$

را که جواب دقیق آن به صورت  $u(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{3}(20 - \sqrt{391})\cos(\pi x)$  است، در نظر بگیرید. با انتخاب  $N = 5$ ، روش پیشنهادی بعد از ۱۲ تکرار جواب تقریبی زیر را به دست می‌دهد:

$$u(x) \approx 0.07671 + 3.086x + 0.1756x^2 - 7.302x^3 + 4.067x^4 - 0.1774x^5. \quad (62)$$

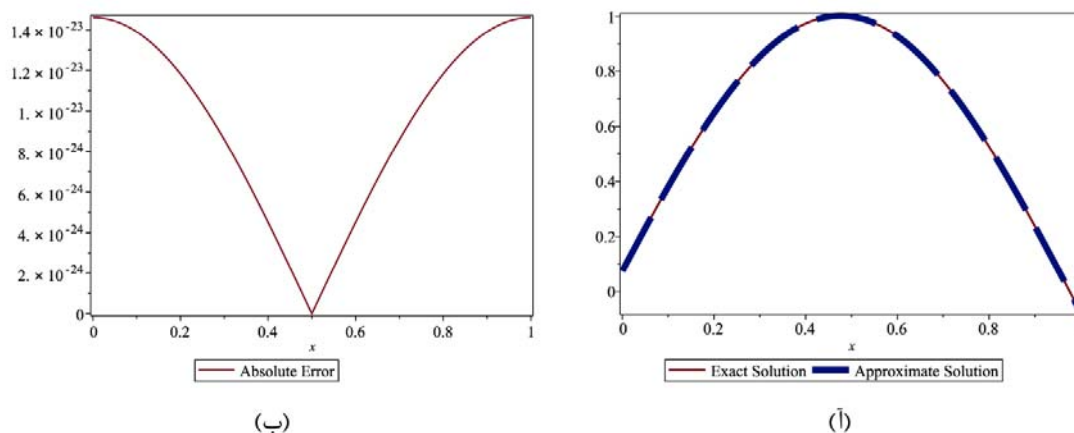
جدول ۶ ماکزیمم خطای مطلق روش تکرار لژاندر-پیکارد را به ازای  $N = 5, 10, 15, 20, 25$  نشان می‌دهد. به ازای  $N = 10$  خطای مطلق نقطه به نقطه‌ی روش تکرار لژاندر-پیکارد با خطای حاصل از روش‌های اختلال هموتوبی (HPM) [۳۴]، آنالیز هموتوبی (HAM) [۳۵]، کوادراتور نیوتن-کانتروویچ (NKQ) [۳۶]، هم‌محلی (CM) [۳۷] و قضیه‌ی مقدار میانی برای انتگرال‌ها (IMVT) [۳۸] در جدول ۷ مقایسه شده است. شکل ۴ جواب تقریبی و جواب دقیق را به همراه خطای مطلق روش به ازای  $N = 25$  و  $\varepsilon = 10^{-20}$  نشان می‌دهد. به ازای مقادیر متفاوت  $N$ ، نمودار لگاریتم خطا در شکل ۵ رسم شده است. ملاحظه می‌شود با افزایش  $N$ ، خطا به صورت نمایی کاهش می‌یابد.

جدول ۶. ماکزیمم قدر مطلق خطای روش تکرار لژاندر-پیکارد با شرط توقف  $\varepsilon = 10^{-20}$ . (تعداد تکرارها = ۱۲)

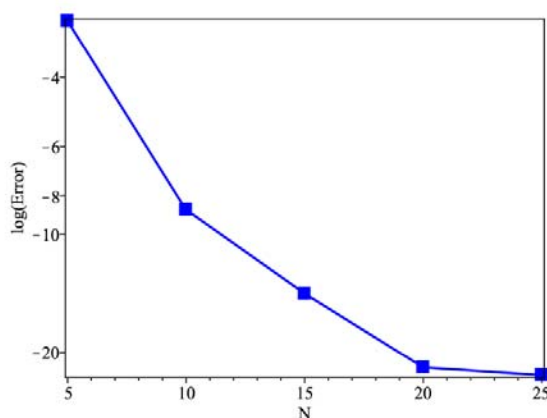
| N            | ۴                         | ۸                         | ۱۲                         | ۱۶                         | ۲۰                         |
|--------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $L_{\infty}$ | $1.313885 \times 10^{-7}$ | $2.048109 \times 10^{-9}$ | $6.930992 \times 10^{-15}$ | $1.575682 \times 10^{-22}$ | $1.462283 \times 10^{-23}$ |

جدول ۷. مقایسه‌ی خطای مطلق نقطه به نقطه‌ی روش پیشنهادی با شرط توقف  $\varepsilon = 10^{-20}$  و روش‌های ارائه شده در [۳۴-۳۸].

|     | HPM [۳۴]                  | HAM [۳۵]                   | NKQ [۳۶]  | CM [۳۷]                | IMVT [۳۸]              | روش پیشنهادی               |
|-----|---------------------------|----------------------------|-----------|------------------------|------------------------|----------------------------|
| x   | N=5                       | N=15                       | m=1, N=20 | N=20                   | N=25                   | N=20                       |
| ۰.۰ | $1.189762 \times 10^{-6}$ | $2.561865 \times 10^{-8}$  | ۰.۰۴۹۸۳۸  | .                      | $3.19 \times 10^{-16}$ | $1.836510 \times 10^{-23}$ |
| ۰.۱ | $1.131531 \times 10^{-6}$ | $2.533099 \times 10^{-8}$  | ۰.۰۴۷۳۹۹  | $1.84 \times 10^{-7}$  |                        | $1.740151 \times 10^{-23}$ |
| ۰.۲ | $9.625379 \times 10^{-7}$ | $2.194322 \times 10^{-8}$  | ۰.۰۴۰۳۲۰  | $1.56 \times 10^{-7}$  |                        | $1.765822 \times 10^{-23}$ |
| ۰.۳ | $6.993245 \times 10^{-7}$ | $1.455291 \times 10^{-8}$  | ۰.۰۲۹۲۹۴  | $1.14 \times 10^{-7}$  | $3.33 \times 10^{-16}$ | $1.305899 \times 10^{-23}$ |
| ۰.۴ | $3.676568 \times 10^{-7}$ | $1.064762 \times 10^{-8}$  | ۰.۰۱۵۴۰۱  | $5.99 \times 10^{-8}$  |                        | $5.111558 \times 10^{-24}$ |
| ۰.۵ | .                         | $1.840237 \times 10^{-8}$  | .         | $1.11 \times 10^{-16}$ |                        | .                          |
| ۰.۶ | $3.676568 \times 10^{-7}$ | $6.849763 \times 10^{-9}$  | ۰.۰۱۵۴۰۱  | $6.90 \times 10^{-8}$  | $1.11 \times 10^{-16}$ | $9.621255 \times 10^{-24}$ |
| ۰.۷ | $6.993247 \times 10^{-7}$ | $6.087238 \times 10^{-10}$ | ۰.۰۲۹۲۹۴  | $1.14 \times 10^{-7}$  |                        | $1.851838 \times 10^{-23}$ |
| ۰.۸ | $9.625379 \times 10^{-7}$ | $3.551072 \times 10^{-9}$  | ۰.۰۴۰۳۲۰  | $1.57 \times 10^{-7}$  |                        | $3.306153 \times 10^{-23}$ |
| ۰.۹ | $1.131531 \times 10^{-6}$ | $2.819651 \times 10^{-9}$  | ۰.۰۴۷۳۹۹  | $1.84 \times 10^{-7}$  | $3.89 \times 10^{-16}$ | $3.942025 \times 10^{-23}$ |
| ۱.۰ | $1.189762 \times 10^{-6}$ | $4.163761 \times 10^{-10}$ | ۰.۰۴۹۸۳۸  | $1.94 \times 10^{-7}$  |                        | $1.575682 \times 10^{-22}$ |



شکل ۴. (آ) مقایسه‌ی جواب‌های تقریبی و دقیق، (ب) خطای مطلق نظیر، به‌ازای  $N = 25$  و شرط توقف  $\varepsilon = 10^{-20}$ .



شکل ۵. لگاریتم ماکزیمم خطای مطلق روش پیشنهادی با شرط توقف  $\varepsilon = 10^{-20}$ .

مثال ۴،۵. معادله‌ی انتگرال غیرخطی

$$u(x) = -x^2 - \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)x + 2 + \int_0^1 xt\sqrt{u(t)}dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (63)$$

را با جواب دقیق  $u(x) = 2 - x^2$  در نظر بگیرید. روش پیشنهادی به‌ازای  $N = 4$  بعد از  $20$  تکرار، جواب تقریبی زیر را می‌دهد:

$$u(x) \approx 2.0000 + 1.9431 \times 10^{-7}x - 1.0000x^2 + 2.3132 \times 10^{-124}x^3 - 9.5329 \times 10^{-125}x^4. \quad (64)$$

ماکزیمم خطای مطلق به‌دست آمده توسط روش تکرار لژاندر-پیکارد را به‌ازای مقادیر مختلف  $N$  در جدول ۸ گزارش نموده‌ایم. هم‌چنین این خطا را با خطای حاصل از روش‌های موجک هار (HWM) [۲۷،۳۹]، موجک هار کسری

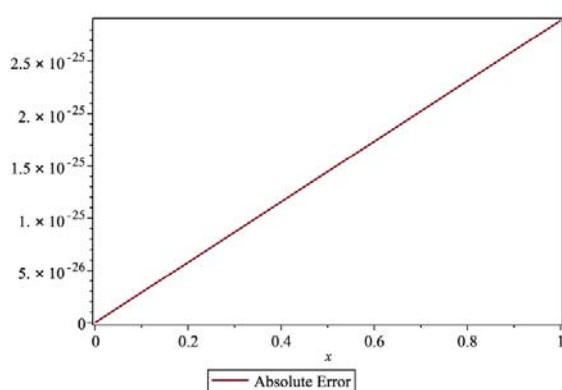
(RHWM) [۴۰]، قضیه‌ی مقدار میانی وزن‌دار برای انتگرال‌ها (IMVT) [۳۸] و تکرار وردشی بهبودیافته (MVIM) [۴۱]، در جدول ۹ مقایسه شده است. در شکل ۶ جواب تقریبی، جواب دقیق و خطای مطلق متناظر روش پیشنهادی را به‌ازای  $N = 20$  و  $\varepsilon = 10^{-25}$  رسم نموده‌ایم. با توجه به شکل ۷ درمی‌یابیم با افزایش  $N$ ، خطا به‌صورت نمایی کاهش می‌یابد.

جدول ۸. ماکزیمم قدر مطلق خطای روش تکرار لژاندر-پیکارد با شرط توقف  $\varepsilon = 10^{-25}$ . (تعداد تکرارها = ۳۲)

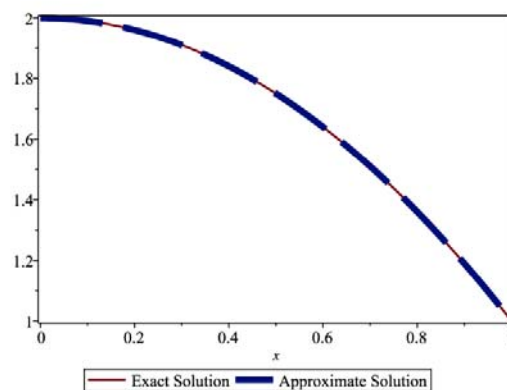
| N            | ۴                         | ۸                          | ۱۲                         | ۱۶                         | ۲۰                         |
|--------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $L_{\infty}$ | $1.943057 \times 10^{-7}$ | $4.644822 \times 10^{-12}$ | $1.612499 \times 10^{-16}$ | $6.573395 \times 10^{-21}$ | $2.889746 \times 10^{-25}$ |

جدول ۹. مقایسه‌ی ماکزیمم خطای مطلق روش پیشنهادی با شرط توقف  $\varepsilon = 10^{-25}$  و روش‌های ارائه شده در [۲۷، ۳۸-۴۱].

| N  | HWM [۲۷]             | HWM [۳۹]             | RHWM [۴۰]            | IMVT [۳۸]             | MVIM [۴۱]                | روش پیشنهادی             |
|----|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|--------------------------|--------------------------|
| ۸  | $2.7 \times 10^{-3}$ | $1.0 \times 10^{-3}$ | $3.6 \times 10^{-2}$ | $1.63 \times 10^{-3}$ | $3.6381 \times 10^{-5}$  | $4.6448 \times 10^{-12}$ |
| ۱۶ | $1.1 \times 10^{-3}$ | $2.6 \times 10^{-4}$ | $8.8 \times 10^{-3}$ | $4.09 \times 10^{-4}$ | $1.2796 \times 10^{-10}$ | $6.5734 \times 10^{-21}$ |
| ۳۲ | $3.7 \times 10^{-4}$ | $6.6 \times 10^{-5}$ | $7.1 \times 10^{-3}$ | $9.94 \times 10^{-5}$ | —                        | $4.2529 \times 10^{-27}$ |

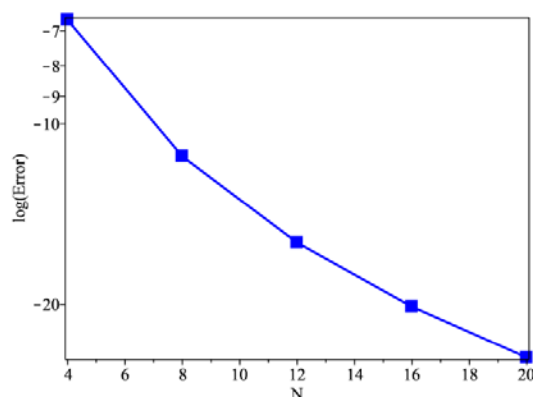


(ب)



(آ)

شکل ۶. (آ) مقایسه‌ی جواب‌های تقریبی و دقیق، (ب) خطای مطلق نظیر، به‌ازای  $N = 20$  و شرط توقف  $\varepsilon = 10^{-25}$ .



شکل ۷. لگاریتم ماکزیمم خطای مطلق روش پیشنهادی با شرط توقف  $\varepsilon = 10^{-25}$ .

مثال ۵.۵. معادله‌ی انتگرال غیر خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$u(x) = x + \frac{2-\pi}{16}x^2 + \frac{1}{4} \int_0^1 x^2 t \arctan(u(t)) dt, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (65)$$

جواب دقیق این معادله  $u(x) = x$  به دست آید. به ازای  $N = 5$  و شرط توقف  $\varepsilon = 10^{-30}$ ، جواب تقریبی روش پیشنهادی به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x) \approx 1.34 \times 10^{-126} + 1.0000x + 1.5824 \times 10^{-10}x^2 - 1.8238 \times 10^{-123}x^3 \\ + 2.2372 \times 10^{-123}x^4 - 9.5068 \times 10^{-124}x^5. \quad (66)$$

برای بررسی کارایی روش تکرار لژاندر-پیکارد، جدول ۱۰ را تنظیم نموده‌ایم، که ماکزیمم خطای مطلق روش پیشنهادی را به ازای مقادیر مختلف  $N$ ، نشان می‌دهد. همچنین این خطا را در مقایسه با خطای حاصل از روش‌های موجک هار HWM [۲۷]، موجک هار کسری RHW [۴۰] و پایه‌های شورد<sup>۱</sup> SBM [۴۲] در جدول ۱۱ گردآوری نموده‌ایم. نمودارهای جواب تقریبی، دقیق و خطای مطلق نظیر به ازای  $N = 25$  و  $\varepsilon = 10^{-30}$  در شکل ۸ ترسیم شده است. شکل ۹ نمودار لگاریتم خطای مطلق حاصل از روش تکرار لژاندر-پیکارد را به ازای مقادیر متفاوت  $N$  نشان می‌دهد. جدول‌ها و شکل‌های ارائه شده، دقت و کارایی روش این مقاله را تأیید می‌کند.

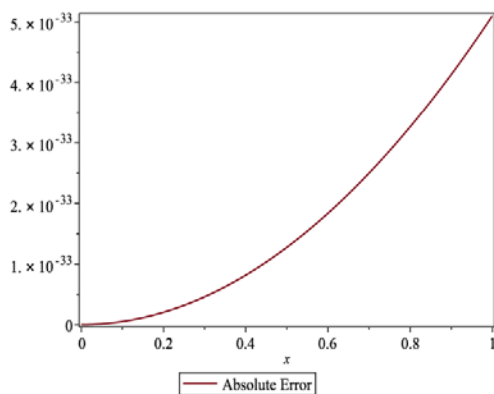
جدول ۱۰. ماکزیمم قدر مطلق خطای روش تکرار لژاندر-پیکارد با شرط توقف  $\varepsilon = 10^{-30}$ . (تعداد تکرارها = ۲۳)

| N            | ۵                          | ۱۰                         | ۱۵                         | ۲۰                         | ۲۵                         |
|--------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $L_{\infty}$ | $1.582427 \times 10^{-10}$ | $4.890859 \times 10^{-17}$ | $3.342780 \times 10^{-24}$ | $8.462381 \times 10^{-31}$ | $8.357984 \times 10^{-33}$ |

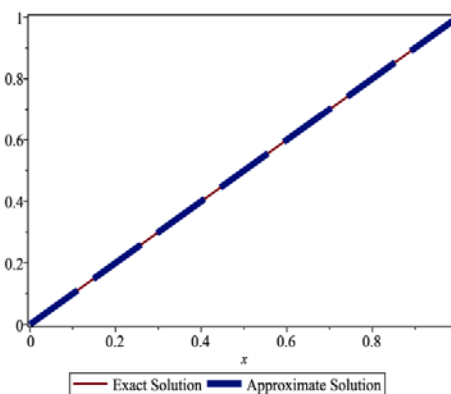
<sup>۱</sup> Schauder

جدول ۱۱. مقایسه‌ی ماکزیمم خطای مطلق روش پیشنهادی با شرط توقف  $\varepsilon = 10^{-30}$  و روش‌های ارائه شده در [۲۷، ۴۰، ۴۲].

| HVM [۲۷]              | SBM [۴۲]              | RHWM [۴۰]             | روش پیشنهادی               |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------------|
|                       |                       | $k = 7$               | $N = 7$                    |
| $3.40 \times 10^{-5}$ | $2.71 \times 10^{-6}$ | $8.97 \times 10^{-7}$ | $5.565154 \times 10^{-13}$ |

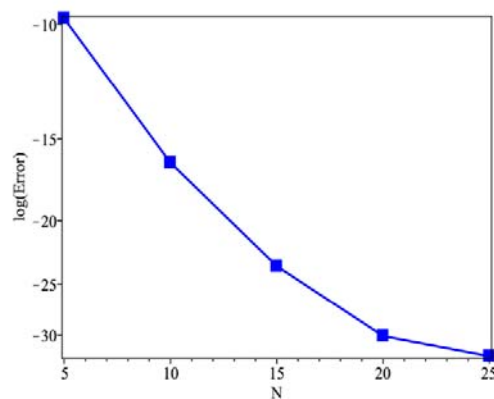


(ب)



(آ)

شکل ۸. (آ) مقایسه‌ی جواب‌های تقریبی و دقیق، (ب) خطای مطلق نظیر، به‌ازای  $N = 25$  و شرط توقف  $\varepsilon = 10^{-30}$ .



شکل ۹. لگاریتم ماکزیمم خطای مطلق روش پیشنهادی با شرط توقف  $\varepsilon = 10^{-30}$ .

مثال ۶.۵. معادله‌ی انتگرال غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$u(x) = f(x) + \frac{1}{\gamma} \int_0^1 x e^t \sin(u(t)) dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (67)$$

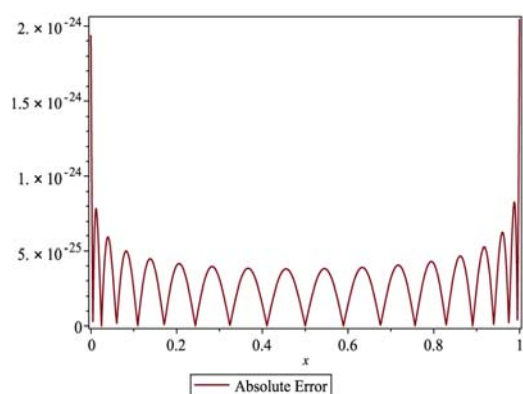
که در آن  $f(x)$  به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود تا جواب دقیق  $u(x) = e^x$  به‌دست آید. به‌ازای  $N = 4$  و شرط توقف  $\varepsilon = 10^{-20}$ ، جواب تقریبی روش پیشنهادی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$u(x) \approx 1.0001 + 0.99849x + 0.51039x^2 + 0.13995x^3 + 0.069335x^4. \quad (68)$$

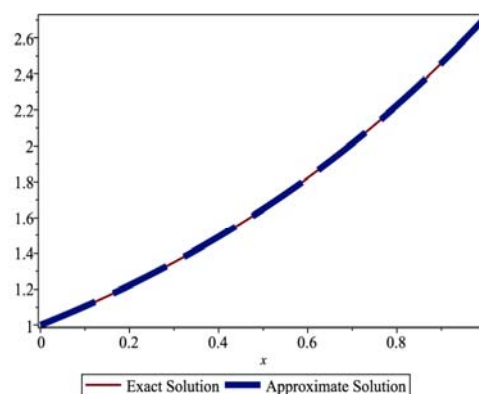
برای بررسی قابلیت اجرایی و دقت روش پیشنهادی، جدول ۱۲ فراهم شده است، که خطای  $L_\infty$  و  $L_2$  روش را در مقایسه با روش تکرار وردشی بهبودیافته MVIM [۴۱]، به‌ازای مقادیر مختلف  $N$  نشان می‌دهد. در شکل ۱۰ نمودارهای جواب تقریبی، دقیق و خطای مطلق نظیر به‌ازای  $N = 16$  و  $\varepsilon = 10^{-20}$  نشان داده شده است. نمودار لگاریتم خطای مطلق روش تکرار لژاندر-پیکارد به‌ازای مقادیر متفاوت  $N$  در شکل ۱۱ تأکید می‌کند که با افزایش  $N$ ، دقت روش بالاتر رفته و خطا به‌طور نمایی کاهش می‌یابد.

جدول ۱۲. ماکزیمم قدر مطلق خطای روش تکرار لژاندر-پیکارد با شرط توقف  $\varepsilon = 10^{-20}$  (تعداد تکرارها = ۴۹)

| N          | روش عددی     | ۶                       | ۸                        | ۱۰                       | ۱۲                       | ۱۴                       | ۱۶                       |
|------------|--------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $L_2$      | MVIM         | $2.4981 \times 10^{-5}$ | $4.0865 \times 10^{-7}$  | $1.1040 \times 10^{-10}$ | $6.9346 \times 10^{-11}$ | $7.2906 \times 10^{-13}$ | $3.1165 \times 10^{-15}$ |
|            | روش پیشنهادی | $2.4817 \times 10^{-8}$ | $2.1580 \times 10^{-11}$ | $1.2275 \times 10^{-14}$ | $4.9217 \times 10^{-18}$ | $1.4658 \times 10^{-21}$ | $3.3696 \times 10^{-25}$ |
| $L_\infty$ | MVIM         | $1.6210 \times 10^{-5}$ | $2.3116 \times 10^{-7}$  | $5.6087 \times 10^{-11}$ | $3.2245 \times 10^{-11}$ | $3.1441 \times 10^{-13}$ | $1.3322 \times 10^{-15}$ |
|            | روش پیشنهادی | $1.0206 \times 10^{-7}$ | $9.8861 \times 10^{-11}$ | $6.1341 \times 10^{-14}$ | $2.6494 \times 10^{-17}$ | $8.4179 \times 10^{-21}$ | $2.0491 \times 10^{-24}$ |

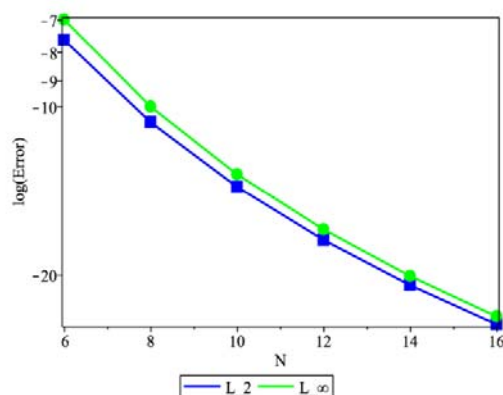


(ب)



(ا)

شکل ۱۰. (ا) مقایسه‌ی جواب‌های تقریبی و دقیق، (ب) خطای مطلق نظیر، به‌ازای  $N = 20$  و شرط توقف  $\varepsilon = 10^{-20}$ .



شکل ۱۱. لگاریتم خطای  $L_2$  و  $L_\infty$  روش پیشنهادی با شرط توقف  $\varepsilon = 10^{-20}$ .

## ۶. ملاحظات پایانی و نتیجه‌گیری

در این مقاله روش تکرار لژاندر-پیکارد را برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم خطی و غیرخطی ارائه دادیم. برای به‌دست آوردن روش، دنباله‌ی تکرارهای پیکارد، چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته و قاعده‌ی انتگرال‌گیری لژاندر-گاوس انتقال‌یافته به شکل مناسبی به کار گرفته شد تا روش تکراری پیشنهادی فرمول‌بندی شود. این روش اساساً یک روش تکراری است که به‌سادگی قابل پیاده‌سازی است و برخلاف روش‌های شبه طیفی و طیفی، نیازی به تقریب مشتق و انتگرال یا حل دستگاه‌های جبری ندارد؛ هم‌چنین به‌دلیل استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته، نیازی به تغییر و انتقال بازه در ساختار معادلات انتگرال نیست. برای افزایش کارایی روش تکرار لژاندر-پیکارد، یک ساختار برداری-ماتریسی ارائه دادیم، که مشاهده شد سرعت اجرای روش به قدر قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد. در پایان کارایی روش تکرار لژاندر-پیکارد را با حل چند مثال نشان دادیم. ملاحظه می‌شود نتایج تقریبی تطابق مناسبی با جواب دقیق دارد، که نشان‌دهنده‌ی دقت و کاربردی بودن روش پیشنهادی است.

## References

1. S. Lemita, H. Guebbai, New process to approach linear Fredholm integral equations defined on large interval, Eur. J. Math. **12**(1) (2019), DOI: 10.1142/S1793557119500098.
2. A. Alturk, Numerical solution of linear and nonlinear Fredholm integral equations by using weighted mean-value theorem, SpringerPlus **5** (2016), DOI: 10.1186/s40064-016-3645-8.
3. I. Suryani, M. Imran, M.D.H. Gamal, Composite Mendeleev's quadratures for solving a linear Fredholm integral equation of the second kind, Global J. Pure Appl. Math. **12**(4) (2016), 3493-3498.
4. A. Mennouni, N. E. Ramdani, K. Zennir, A new class of Fredholm integral equations of the

- second kind with non-symmetric kernel: solving by wavelets method, Bol. Soc. Paran. Mat. (2019), Doi:10.5269/bspm.41734.
5. N. Koshev, L. Beilina, An adaptive finite element method for Fredholm integral equations of the first kind and its verification on experimental data, Cent. Eur. J. Math. **11**(8) (2013), 1489-1509.
  6. M. Ahmadinia, H. Afshari A., M. Heydari, Numerical solution of Itô-Volterra integral equation by least squares method, Numer. Algorithms **84** (2020), 591-602.
  7. Z. Masouri, Numerical expansion-iterative method for solving second kind Volterra and Fredholm integral equations using block-pulse functions, Adv. Comput. Tech. Electromagn. (2012), DOI:10.5899/2012/acte-00108.
  8. Z. Avazzadeh, M. Heydari, W. Chen, G. B. Loghmani, Exponential convergence for numerical solution of integral equations using radial basis functions, J. Appl. Math. (2014), DOI:10.1155/2014/710437.
  9. F. Mirzaee, E. Hadadiyan, A new improved hat function for numerical solution of linear Fredholm integral equations, Thai J. Math. **15**(1) (2017), 17-31.
  10. H. O. Bakodah, Some modifications of Adomian decomposition method applied to nonlinear system of Fredholm integral equations of the second kind, Int. J. Contemp. Math. Sciences **7**(19) (2012), 929-942.
  11. J. Biazar, H. Ebrahimi, Variational iteration method for Fredholm integral equations of the second kind, Iranian J. Optim. **1**(1) (2009), 11-17.
  12. S.M. Mirzaei, Fredholm integral equations of the first kind solved by using the homotopy perturbation method, Int. J. Math. Anal. **5**(19) (2011), 935-940.
  13. B. Ghanbari, On the convergence of the homotopy analysis method for solving Fredholm integral equations, Walailak J. Sci Tech. **10**(4) (2013), 395-403.
  14. A.J. Mohammed, J.I. Mustafa, Construction of a new technique in Aitken extrapolation method for solving Fredholm integral equation of the first kind with iterated kernel, J. Edu. Sci. **21**(2) (2008), 143-149.
  15. M. Muhammad, N. Ahniyaz, M. Masatake, S. Masaaki, Numerical solution of integral equations by means of the Sinc-collocation method based on the double exponential transformation, J. Comput. Appl. Math. **177**(2) (2005), 269-286.
  16. S. Davaei far, Y. Ordokhani, Solving Fredholm integral equations with Bernstein multi-scaling functions, J. Sci. Kharazmi University **13**(2) (2013), 305-320.
  17. J. Rashidinia, E. Babolian, Z. Mahmoodi, Spline collocation for Fredholm integral equations, Math. Sci. **5**(2) (2011), 147-158.
  18. Y. Liu, Application of the Chebyshev polynomial in solving Fredholm integral equations, Math. Comput. Model. **50**(3-4) (2009), 465-469.
  19. H. Guo, H. Cai, X. Zhang, A Jacobi-collocation method for second kind Volterra integral equations with a smooth kernel, Abstr. Appl. Anal. (2014), DOI: 10.1155/2014/913691.
  20. Nemati Saray, Sparse multiscale representation of Galerkin method for solving linear mixed Volterra-Fredholm integral equations, Math. Methods Appl. Sci. **43**(5) (2020), 2601-2614.
  21. A.M. Wazwaz, Linear and nonlinear integral equations: methods and applications, Springer Science & Business Media, Berlin, Heidelberg, 2011.

22. J. Junkins, A. B. Younes, R. M. Woollands, X. Bai, Picard iteration, Chebyshev polynomials and Chebyshev-Picard methods: Application in astrodynamics, *J. Astronaut. Sci.* **60**(3) (2013), 623-653.
23. M. Tafakkori-Bafghi, G.B. Loghmani, M. Heydari, X. Bai, Jacobi-Picard iteration method for the numerical solution of nonlinear initial value problems, *Math. Meth. Appl. Sci.* **43**(3) (2020), 1084-1111.
24. J. Shen, T. Tang, L. L. Wang, *Spectral methods: algorithms, analysis and applications*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011.
25. A. Bellour, D. Sbibi, A. Zidna, Two cubic spline methods for solving Fredholm integral equation, *Appl. Math. Comput.* **276** (2016), 1-11.
26. E. Love, The electrostatic field of two equal circular conducting disks, *Q. J. Mech. Appl. Math.* **2**(4) (1949), 420-451.
27. Ü. Lepik, E. Tamme, Solution of nonlinear Fredholm integral equations via the Haar wavelet method, *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.* **56**(1) (2007), 17-27.
28. M. Reihani, Z. Abadi, Rationalized Haar functions method for solving Fredholm and Volterra integral equations, *J. Comput. Appl. Math.* **200**(1) (2007), 12-20.
29. C. Cattani, A. Kudreyko, Harmonic wavelet method towards solution of the Fredholm type integral equations of the second kind, *Appl. Math. Comput.* **215**(12) (2010), 4164-4171.
30. Müller, W. Varnhorn, On approximation and numerical solution of Fredholm integral equations of second kind using quasi-interpolation, *Appl. Math. Comput.* **217**(13) (2011), 6409-6416.
31. S. Islam, I. Aziz, A. Al-Fhaid, An improved method based on Haar wavelets for numerical solution of nonlinear integral and integro-differential equations of first and higher orders, *J. Comput. Appl. Math.* **260** (2014), 449-469.
32. S. Panda, S. Martha, A. Chakrabarti, A modified approach to numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind, *Appl. Math. Comput.* **271** (2015), 102-112.
33. S. Amiri, M. Hajipour, D. Baleanu, On accurate solution of the Fredholm integral equations of the second kind, *Appl. Numer. Math.* **150** (2020), 478-490.
34. J. Biazar, H. Ghazvini, Numerical solution for special non-linear Fredholm integral equation by HPM, *Appl. Math. Comput.* **195**(2) (2008), 681-687.
35. Awawdeh, A. Adawi, S. Al-Shara, A numerical method for solving nonlinear integral equations, *Int. Math. Forum* **4**(17) (2009), 805-817.
36. J. Saberi-Nadjafi, M. Heidari, Solving nonlinear integral equations in the Urysohn form by Newton-Kantorovich-quadrature method, *Comput. Math. Appl.* **60**(7) (2010), 2058-2065.
37. N. Ebrahimi, J. Rashidinia, Collocation method for linear and nonlinear Fredholm and Volterra integral equations, *Appl. Math. Comput.* **270** (2015), 156-164.
38. H. Li, J. Huang, A novel approach to solve nonlinear Fredholm integral equations of the second kind, *SpringerPlus* **5** (2016), DOI: 10.1186/s40064-016-1810-8.
39. I. Aziz, S. Islam, New algorithms for the numerical solution of nonlinear Fredholm and Volterra integral equations using Haar wavelets, *J. Comput. Appl. Math.* **239** (2013), 333-345.
40. M. Erfanian, M. Gachpazan, H. Beiglo, Rationalized Haar wavelet bases to approximate solution of nonlinear Fredholm integral equations with error analysis, *Appl. Math. Comput.* **265** (2015),

304-312.

41. M. H. Daliri, J. Saberi-Nadjafi, Improved variational iteration method for solving a class of nonlinear Fredholm integral equations, SeMA J. **76** (2019), 65-77.
42. M. I. Berenguer, M. F. Muñoz, A. G. Guillem, M.R. Galán, Numerical treatment of fixed point applied to the nonlinear Fredholm integral equation, Fixed Point Theory Appl. (2009), DOI:10.1155/2009/735638.