Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://jemr.khu.ac.ir/

Generalized state co-annihilators in state residuated lattices

A. Karimi Shahmarvandi[1], **S. Rasouli**[2], **F. Khaksar Haghani**[3]

1. Department of Mathematics, Shahrekord Branch, Islamic Azad University, Shahrekord, Iran. E-mail: akarimi1400@yahoo.com
2. Corresponding Author, Department of Mathematics, Shahrekord Branch, Islamic Azad University, Shahrekord, Iran & Department of mathematics, Persian Gulf University, Bushehr, Iran. E-mail: srasouli@pgu.ac.ir
3. Corresponding Author, Department of Mathematics, Shahrekord Branch, Islamic Azad University, Shahrekord, Iran. E-mail: haghani1351@yahoo.com

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received: 7 July 2021
Accepted: 24 April 2022
Published online: 6 February 2024

Keywords:
Generalized state co-annihilator,
State residuated lattice,
State prime filter,
State minimal prime filter.

ABSTRACT

Introduction

In the realm of information processing, particularly inferences derived from uncertain information, classical logic serves as a foundational system. However, to address the challenges posed by uncertainty and fuzzy information, diverse non-classical logic systems have been extensively proposed and researched. These non-classical logics have proven indispensable in computer science, offering formal and effective tools for managing uncertain and fuzzy data.

To underpin these non-classical logic systems, various algebras of logic have been introduced as semantical frameworks. Examples include BCK-algebras, residuated lattices, divisible residuated lattices, MTL-algebras, Girard monoids, BL-algebras, Gödel algebras, MV-algebras, and Heyting algebras. Among these, residuated lattices stand out as fundamental and crucial algebraic structures, playing an unassailable role in the theory of fuzzy logic. The notion of a state, on the other hand, is an analogue of probability measure. Such a notion plays a crucial role in the theory of quantum structures which generalizes the Kolmogorov probabilistic space. Forty years after appearing MV-algebras, the notion of a state on an MV-algebra was introduced by Mundici [52] as averaging process for formulas in Lukasiewicz logic, and also as a special case of a state on a D-poset by Kopka and Chovanec [44]. Dvurecenskij in [19] extended states theory to pseudo-MV algebras (non-commutative generalization of MV-algebras) and gave an example to show that in contrast to MV-algebras, there exists a pseudo-MV algebra which has no states. Riecan in [68] defined a state for BL-algebras as an extension of the additive measure, using ideas of orthogonal elements. Inspired by [19], Georgescu in [29] proposed the notions of Bosbach states, a very nice definition of a state not using the concept of orthogonal elements, which in the case of pseudo-MV algebras coincides with the notion of a state for pseudo-MV algebras. The main idea of Georgescu was to use an identity studied by Bosbach in residuation groupoids [3]. He also showed that any Bosbach state is a Riecan state on good pseudo BL-algebras. Dvurecenskij et. al. in [21] extended the notion of Bosbach and Riecan states to bounded non-commutative Rl-monoids. Kuhr and Mundici [46] showed that his approach fits well to De Finetti's subjective probabilities, too.

Material and Methods

This paper undertakes an in-depth exploration of the co-annihilator filters in state residuated lattices, aiming to enhance our understanding of this concept. While the spectrum of co-annihilator filters in residuated lattices has been previously examined by [62, 63, 64, 71, 72], this study introduces additional properties that contribute novel insights into algebraic aspects. The investigation extends to prime filters of co-annihilator filters in a state residuated lattice, yielding diverse and compelling results. The parallelism between prime filters and prime filters of co-annihilator filters adds to the intrigue of this research. Notably, some results obtained in prior works can be replicated through the framework of state residuated lattices. The paper is motivated by the quest to identify common patterns between the annihilator ideals in rings and the co-annihilator filters in state residuated lattices, highlighting intriguing similarities between these two contexts.

Results and discussion

In this paper, we introduce the notion of generalized state co-annihilators in state residuated lattices. We establish a connection between generalized state co-annihilators and Galois connection (Proposition 4.7). If $\mathfrak{A}_\nu$ is a state residuated lattice, we show that the set of filters of $\mathfrak{A}_\nu$forms a complete Heyting algebra (Corollary 4.6) in which the relative pseudo-complement of $G$with respect to F is $(G:F)_\nu$. Also, we show that the set of state coannihilator filters of $\mathfrak{A}_\nu$ forms a Boolean lattice (Theorem 4.14). Ultimately, we characterize generalized state co-annihilators in terms of state prime filters and state minimal prime filters.

Conclusion

The following conclusions are obtained from this research.

- There exists a connection between generalized state co-annihilators and Galois connection
- The set of filters of $\mathfrak{A}_\nu$forms a complete Heyting algebra.
- The set of state co-annihilator filters of $\mathfrak{A}_\nu$ forms a Boolean lattice.

How to cite: Karimi Shahmarvandi, A., Rasouli, S., & Khaksar Haghani, F. (2023). Generalized state co-annihilators instate residuated lattices, *Mathematical Researches*, 9 (3), 178 – 213.

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

تعمیم هم‌پوچ‌سازهای حالت در مشبکه‌های مانده‌ی حالت

علی یارکریمی شهمارondی [۱]، سعید رسولی [۲] ✉، فرهاد خاکسار حقانی [۳] ✉

۱. گروه ریاضی، واحد شهرکرد، دانشگاه آزاد اسلامی، شهرکرد، ایران. رایانامه: akarimi1400@yahoo.com
۲. گروه ریاضی، واحد شهرکرد، دانشگاه آزاد اسلامی، شهرکرد، ایران & گروه ریاضی، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران. رایانامه: srasouli@pgu.ac.ir
۳. گروه ریاضی، واحد شهرکرد، دانشگاه آزاد اسلامی، شهرکرد، ایران. رایانامه: haghani1351@yahoo.com

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۴/۱۶
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۲/۴
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۱۱/۱۷

واژه‌های کلیدی:
هم‌پوچ‌سازهای حالت تعمیم‌یافته،
مشبکه‌ی مانده‌ی حالت،
پالایه‌های اول حالت،
پالایه‌های اول کمینه حالت .

چکیده

در این مقاله، مفهوم هم‌پوچ‌سازهای حالت تعمیم‌یافته در مشبکه‌های مانده‌ی حالت را معرفی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که ارتباطی بین هم‌پوچ‌سازهای حالت تعمیم‌یافته و التصاق گالوا برقرار است. اگر $\mathfrak{A}$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت باشد، آن‌گاه ثابت می‌کنیم که مجموعه‌ی پالایه‌ها، تشکیل یک جبر هیتینگ[1] می‌دهند به‌طوری که شبه متمم نسبی G نسبت به F را با $(F:G)_\mathcal{V}$ نشان می‌دهیم. به‌علاوه نشان می‌دهیم مجموعه‌ی پالایه‌های هم‌پوچ‌ساز حالت، یک مشبکه‌ی بولی را تشکیل می‌دهند. در نهایت، به مشخص کردن هم‌پوچ‌سازهای حالت تعمیم‌یافته در پالایه‌های اول حالت و پالایه‌های اول کمینه حالت می‌پردازیم. درآخر به بررسی مشبکه‌ی مانده‌ی حالت، پالایه‌های توسعه‌یافته‌ی حالت، پالایه‌های اول حالت و اول کمینه و هم‌چنین هم‌پوچ‌سازهای حالت می‌پردازیم.

استناد: کریمی شهمارondی، علی یار، رسولی، سعید و خاکسارحقانی، فرهاد (۱۴۰۲). تعمیم هم‌پوچ‌سازهای حالت در مشبکه‌های مانده‌ی حالت، *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۳)، ۱۷۸ – ۲۱۳.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

[1]Heyting

۱. مقدمه

مشبکه‌های مانده‌ی جابه‌جایی، همتای جبری منطق‌های بدون قاعده انقباض هستند.. مفهوم مشبکه‌ی مانده‌ی جابه‌جایی، اولین بار توسط کرول[1] در [۳۹] مطرح شد. بعد از او، وارد[2] و دیلوورس[3] در[۱۲،۱۳،۷۳]، به بررسی این مفهوم پرداختند. سپس مشبکه‌های مانده، توسط بالبس[4] و وینگر[5] در [۱] و پاولکا[6] در [۵۵] مطالعه شدند. این مشبکه‌ها تحت نام‌های بی‌شماری از جمله مشبکه‌های BCK در [۳۵]، جبرهای BCK تام در [۳۹]، جبرهای FL_{ew} در[۵۳] و ℓ-تکواره‌های جابه‌جایی، مانده و صحیح در [۲] شناخته شده‌اند. صرف‌نظر از جذابیت منطقی، مشبکه‌های مانده دارای ویژگی‌های جبری جالب توجهی هستند. ویژگی‌های مشبکه‌های مانده در[۲۸،۴۵،۵۴] ارائه شده‌اند. برای مطالعه‌ی بیشتر در مورد مشبکه‌های مانده به [۳۸] مراجعه کنید. رده‌ی مشبکه‌های مانده را با $\mathscr{LR}$ نمایش می‌دهیم. به دنبال نتایج آدزیاک[7][۳۶]، نشان می‌دهند که رده‌ی $\mathscr{LR}$ از مشبکه‌های مانده به‌شکل معادله‌ای است و از این‌رو تشکیل یک گونه می‌دهد. منظور از یک حالت، شبیه اندازه‌ی احتمال است. چنین مفهومی نقش مهمی در نظریه‌ی ساختارهای کوانتوم بازی می‌کند که به فضای احتمالاتی کولموگوروف تعمیم یافته است. چهل سال پس از ظهور MV-جبرها، مفهوم حالت روی یک MV-جبر، به‌وسیله‌ی موندیسی[8][۵۲] معرفی شد، مانند فرآیند متوسط‌سازی برای فرمول‌ها در منطق لوکاسوییچ[9] و هم‌چنین به‌عنوان یک مورد خاص از یک حالت روی یک D-مجموعه‌ی جزئاً مرتب که توسط کوپکا[10] و چوانس[11] در [۴۴] مطرح شدند. در [۱۹]، دورسنسکیج[12]، نظریه‌ی حالت را به شبه MV-جبرها توسعه داد (تعمیم غیرجابه‌جایی از MV-جبرها) و مثالی ارائه داد که نشان می‌دهد در مقابل MV-جبرها، شبه MV-جبری وجود دارد که دارای هیچ حالتی نیست. ریسان[13] در [۶۸]، با استفاده از مفهوم عضوهای متعامد و به‌عنوان یک توسیع از اندازه‌ی جمعی، به تعریف حالتی برای BL-جبرها پرداخت. با الهام گرفتن از [۱۹]، جورجسکو[14] در [۲۹]، مفاهیم حالت‌های بوسباچ[15] را پیشنهاد داد و تعریفی مناسب از یک حالت ارائه داد که از مفهوم عناصر متعامد استفاده نمی‌کند و در مورد شبه MV-جبرها با مفهوم حالت برای شبه MV-جبرها منطبق می‌باشد. ایده‌ی اصلی جورجسکو، استفاده از اتحادی بود که به‌وسیله‌ی بوسباچ در گروهوار مانده مورد مطالعه قرار گرفت [۳]. او هم‌چنین نشان داد که هر حالت بوسباچ، یک حالت ریسان روی شبهBL-جبرهای خوب است. دورسنسکیج و همکاران در [۲۱]، مفهوم حالت‌های بوسباچ و ریسان را

---

[1]Krull
[2]Ward
[3]Dilworth
[4]Balbes
[5]Dwinger
[6]Pavelka
[7]Idziak
[8]Mundici
[9]Lukasiewicz
[10]Kopka
[11]Chovanec
[12]Dvurecenskij
[13]Riecan
[14]Georgescu
[15]Bosbach

به $R\ell$-تکواره‌های غیرجابه‌جایی کراندار توسعه دادند. کوهر[1] و موندیسی در [۴۶] نشان دادند که این مفهوم به‌خوبی به احتمالات ذهنی فینتیس[2]نزدیک است. از آن‌جایی‌که MV-جبرهای با حالت، جبرهای عام نیستند، به‌طور خودکار منطق ادعایی را القا نمی‌کنند. فلامینیو[3] و مونتاگنا[4] در [۲۵،۲۶]، با استفاده از رویکرد احتمالی، به ارائه‌ی یک منطق جبری پرداختند که معناشناسی جبری هم‌ارز آن دقیقاً انواعی از MV-جبرها است. آن‌ها با افزودن عمل یکتایی σ (به‌عنوان یک حالت داخلی یا عملگر حالت)، زبان MV-جبرها را توسعه دادند. این عمل یکتا به‌صورت معادلاتی توصیف شده است تا خصوصیات اساسی یک حالت در معنای اصلی آن حفظ شود. دی نولا[5] و دورسنسکیج در [۱۶] نسخه‌ی قوی‌تری از MV-جبرهای حالت، یعنی MV-جبرهای حالت-ریختی را ارائه دادند(منظور از MV-جبر حالت-ریختی، یک خودریختی خودتوانی روی یک MV-جبر است). آن‌ها در [۱۷] برخی از انواع MV-جبرهای حالت-ریختی را بررسی کردند. در [۱۸]، نویسندگان به مطالعه‌ی چندگونا MV-جبرهای حالت-ریخت به‌همراه توصیف زیرمستقیمی از MV-جبرهای حالت تحویل‌ناپذیر پرداختند و برخی توصیف‌های جالب در مورد تعدادی از MV-جبرهای حالت-ریختی را به‌دست آوردند. نتایج به‌دست آمده، در مراجع [۴،۲۳،۲۴] تعمیم پیدا کردند. مفهوم BL-جبر حالت، به‌عنوان یک توسیع از مفهوم MV-جبر حالت، توسط سینگو[6] و همکاران در [۷] معرفی شد. سپس دورسنسکیج در [۲۴]، مفهوم عملگرهای حالت را به $R\ell$-تکواره‌ها بسط داد. هی[7] و همکاران در [۳۳]، ایده‌ی عملگرهای حالت روی مشبکه‌های مانده را معرفی و تعدادی از ویژگی‌های وابسته به این عملگرها را بررسی کردند. اخیراً کوندو[8] در [۴۲]، به معرفی و مطالعه‌ی تعدادی از ویژگی‌های عملگرهای حالت تعمیم‌یافته روی مشبکه‌های مانده پرداخت. در نظریه‌ی حلقه‌ها، منظور از پوچساز یک مجموعه، مفهومی است که از تاب و تعامد تعمیم می‌یابد. هم‌چنین حلقه‌های بائر[9] و حلقه‌های ریکارت[10]، با استفاده از اصول پوچسازهای مجموعه‌های گوناگون، تلاش‌های مختلفی برای ارائه‌ی شباهت جبری جبرهای ون نیومان[11]هستند. در سال ۱۹۶۸، مندلکر[12]در [۵۱]، نظریه‌ی پوچسازهای نسبی در مشبکه‌ها را معرفی کرد. به‌علاوه او به توصیف مشبکه‌های توزیع‌پذیری برحسب پوچسازهای نسبی آن‌ها پرداخت. پس از آن نویسندگان زیادی به معرفی مفهوم پوچسازها در ساختار حلقه‌ها و مشبکه‌ها پرداختند و چندین ساختار جبری در پوچسازها را مشخص کردند. اسپید[13]در [۶۹] و کورنیش[14]در [۱۰،۱۱] مطالعه‌ی گسترده‌ای از پوچسازها در مشبکه‌های توزیع‌پذیر انجام

[1] Kuhr
[2] Finettis
[3] Flaminio
[4] Montagna
[5] Di Nola
[6] Ciungu
[7] He
[8] Kondo
[9] Baer rings
[10] Rickart rings
[11] Von Neumann algebras
[12] Mandelker
[13] Speed
[14] Cornish

داده‌اند. فیلیپویو[1] در [۲۷]، از مفهوم پوچ‌ساز برای توسیع‌های بئر MV-جبرها استفاده کرده است. در [۳۴،۴۰]، برای BCK-جبرها از مفهوم پوچ‌سازها استفاده شده است. لیوستین[2][۴۹] از مفهوم هم‌پوچ‌سازها برای توسیع‌های بئر BL–جبرها استفاده کرده است. این مفهوم تحت عنوان پالایه‌های توسعه یافته برای $R\ell$-تکواره‌ها در [۳۲] و برای شبه BL-جبرها در [۶] بررسی شده‌اند. در [۴۱]، به مشخص کردن توسیع پالایه‌ها در مشبکه‌ی پالایه‌ها از یک مشبکه‌ی مانده پرداخته شده است. مفهوم پالایه توسعه‌یافته به BL-جبرهای شبه حالت در [۸] و در مورد مشبکه‌های مانده‌ی حالت در [۳۳] تعمیم داده شده است.پالایه‌های حالت توسعه‌یافته را هم‌پوچ‌ساز می‌نامند. هم‌چنین در [۴۲]، پالایه‌های توسعه‌یافته به مشبکه‌های مانده‌ی g–حالت تعمیم داده شده‌اند. هم‌پوچ‌سازها در برخی مقالات از جمله [۴۷،۴۸]، قطبی نام‌گذاری شده‌اند.

این مقاله در چهار بخش تنظیم شده است. در بخش دوم، برخی از تعاریف، گزاره‌ها و نتایج مربوط به مشبکه‌های مانده‌ی حالت و التصاق گالوا را یادآوری می‌کنیم. آن‌ها را با چند مثال از مشبکه‌های مانده که در بخش‌های بعدی مقاله استفاده خواهند شد، شرح داده و بررسی می‌کنیم. در بخش سوم، مفهوم پالایه‌های اول کمینه حالت و اول حالت در مشبکه‌های مانده‌ی حالت را معرفی کرده و نشان می‌دهیم که هر پالایه حالت، اشتراک پالایه‌های اول کمینه حالت شامل آن است. در بخش چهارم، به معرفی پالایه‌های هم‌پوچ‌ساز حالت پرداخته و بین پالایه‌های هم‌پوچ‌ساز حالت و التصاق گالوا، رابطه‌ای برقرار می‌کنیم. به‌علاوه نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی تمام پالایه‌های هم‌پوچ‌ساز حالت، به‌تنهایی تشکیل یک مشبکه‌ی بولی می‌دهد.

۲. پیش نیازها

در این بخش، برخی تعاریف و خواص مربوط به مشبکه‌های مانده‌ی حالت را یادآوری نموده و برخی خواص جدید از آن‌ها را اثبات نموده که در بخش‌های بعدی از آن استفاده خواهیم کرد.

۱.۲ مشبکه‌های مانده‌ی حالت

جبر $\mathfrak{A} = (A;\vee,\wedge,\odot,\rightarrow,0,1)$ را مشبکه‌ی مانده نامیم هرگاه $\ell(\mathfrak{A}) = (A;\vee,\wedge,0,1)$ یک مشبکه‌ی کراندار، $(A;\odot,1)$ تکواره‌ی جابه‌جایی و $(\odot,\rightarrow)$ یک جفت الحاقی باشد.
در مشبکه‌ی مانده‌ی $\mathfrak{A}$، برای هر $a \in A$ قرار می‌دهیم $\neg a := a \rightarrow 0$. برای مطالعه‌ی برخی خواص مشبکه‌های مانده به [۴۵] رجوع کنید.

ملاحظه ۱. [۳۸]. فرض کنید $\mathfrak{A}$ مشبکه‌ی مانده باشد. در این‌صورت برای هر $x,y,z \in A$، شرایط زیر برقرار هستند:

(r_1) $x \odot (y \vee z) = (x \odot y) \vee (x \odot z)$؛

[1] Filipoiu
[2] Leustean

r_2) $x \vee (y \odot z) \geq (x \vee y) \odot (x \vee z)$.

فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه‌ی مانده باشد. زیرمجموعه‌ی غیرتهی F از A را پالایه$\mathfrak{A}$ می‌نامیم، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

a) $x \odot y \in F$، برای هر $x, y \in F$؛

b) برای هر $x \in F$ و $y \in A$، $x \vee y \in F$.

بنابر [۵۸، قضیه ۲.۹] زیرمجموعه‌ی F از A یک پالایه است اگر و تنها ویژگی‌های زیر را برآورده سازد:

۱. $1 \in F$؛

۲. برای هر $x \in F$ و $y \in A$، $x \to y \in F$ نتیجه دهد $y \in F$.

مجموعه‌ی پالایه‌های $\mathfrak{A}$ را با $\mathscr{F}(\mathfrak{A})$ نشان می‌دهیم. اگر F پالایه‌ای از $\mathfrak{A}$ باشد، آن‌گاه منظور از $\mathscr{F}_F(\mathfrak{A})$، مجموعه‌ی تمام پالایه‌های شامل F می‌باشد. درصورتی‌که برای پالایه F داشته باشیم $F \neq A$، گوییم F یک پالایه سره است. به‌وضوح می‌توان دید که پالایه F سره است، اگر و تنها اگر $0 \notin F$. به ازای هر $X \subseteq A$، پالایه$\mathfrak{A}$ تولید شده به‌وسیله‌ی X را با $\mathscr{F}(X)$ نشان می‌دهیم. یک مشبکه مانده $\mathfrak{A} = (A;\vee,\wedge,\odot,\to,0,1)$ را یک جبر هیتینگ گوییم هرگاه برای هر $x, y \in A$، $x \odot y = x \wedge y$ به عبارت دیگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم $x^2 = x$. یک مشبکه کامل را یک قاب گوییم هرگاه در قاعده توزیع پذیری نامتناهی صدق کند، یعنی برای هر $S \subseteq A$ و $a \in A$ داشته باشیم

$$a \wedge \vee S = \vee\{a \wedge s | s \in S\}.$$

با توجه به قضیه‌ی ۳.۱۷ از [۵]، $\mathscr{F}(\mathfrak{A})$ قابی است که در آن اینفیمم، اشتراک نظریه‌ی مجموعه‌ای است و هم‌چنین سوپریمم $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}(\mathfrak{A})$، $\underline{\vee}\, \mathscr{F} = \mathscr{F}(\cup \mathcal{F})$ می‌باشد. از این‌رو $\mathscr{F}(\mathfrak{A})$ جبر هیتینگ کاملی است که شبه متمم نسبی F نسبت به G به‌صورت زیر می‌باشد:

$$F \hookrightarrow G = \underline{\vee}\, \{\mathrm{H} \in \mathscr{F}(\mathfrak{A}) : F \cap H \subseteq G\}.$$

ملاحظه ۲. [۵]. فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه‌ی مانده، F یک پالایه و X زیرمجموعه‌ای از A باشد. در این‌صورت برای هر $x, y \in A$، شرایط زیر برقرار هستند:

۱) $\mathscr{F}(X) = \{a \in A : x_1 \odot \dots \odot x_n \leq a, n \geq 1, x_1, \dots, x_n \in X\}$؛

۲) $\mathscr{F}(F, X) \coloneqq F \,\underline{\vee}\, \mathscr{F}(X) = \{a \in A : f \odot x_1 \odot \dots \odot x_n \leq a, f \in F, x_1, \dots, x_n \in X\}$

۳) $\mathscr{F}(F, x) \cap \mathscr{F}(F, y) = \mathscr{F}(F, x \vee y)$؛

۴) $x \leq y$ نتیجه می‌دهد $\mathscr{F}(y) \subseteq \mathscr{F}(x)$؛

۵) $\mathscr{F}(x) \underline{\vee} \mathscr{F}(y) = \mathscr{F}(x \wedge y) = \mathscr{F}(x \odot y) = \mathscr{F}(x, y)$.

تعریف ۱.۲. [۵۸]. فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه‌ی مانده باشد. نگاشت $\nu: A \to A$ را یک عملگر حالت روی $\mathfrak{A}$ نامیم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

$\mathfrak{s}_1$) $\nu(0) = 0$؛

$\mathfrak{s}_2$) ν یکنوا باشد؛

$\mathfrak{s}_3$) $\nu(x \to y) = \nu(x) \to \nu(x \wedge y)$؛

$\mathfrak{s}_4$) $\nu\big(\nu(x) \odot \nu(y)\big) = \nu(x) \odot \nu(y)$؛

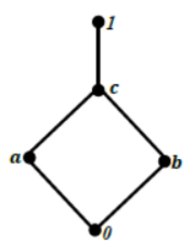
$\mathfrak{s}_5$) $\nu\big(\nu(x) \vee \nu(y)\big) = \nu(x) \vee \nu(y)$؛

$\mathfrak{s}_6$) $\nu\big(\nu(x) \wedge \nu(y)\big) = \nu(x) \wedge \nu(y)$.

اگر $\mathfrak{A}$ یک مشبکه‌ی مانده و ν یک عملگر حالت روی $\mathfrak{A}$ باشد، آن‌گاه $\mathfrak{A}_\nu = (\mathfrak{A}; \nu)$ را مشبکه‌ی مانده‌ی حالت، یا به‌طور دقیق‌تر، مشبکه‌ی مانده با حالت دورنی ν می‌نامیم. رده‌ی مشبکه‌های مانده‌ی حالت را با $\mathscr{LRS}$ نمایش می‌دهیم.

برای هر عملگر حالت ν روی مشبکه‌ی مانده‌ی $\mathfrak{A}$، قرار می‌دهیم $\ker(\nu) = \nu^{\leftarrow}(1)$. عملگر حالت ν را صادق گوییم، هرگاه $\ker(\nu) = \{1\}$.

مثال ۲.۲. فرض کنید $A_5 = \{0, a, b, c, 1\}$ مشبکه‌ای باشد که دارای نمودار هاس[1] به‌صورت زیر است:



شکل ۱: نمودار هاس $\mathfrak{A}_5$

روی A_5، عملگرهای $\odot$ و $\to$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

[1]Hasse diagram

جدول شماره ۱:

$\odot$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	a
b	0	0	0	0	b
c	0	a	0	a	c
1	0	a	b	c	1

جدول شماره ۲:

$\rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	b	1	b	1	1
b	c	c	1	1	1
c	b	c	b	1	1
1	0	a	b	c	1

روشن است که $\mathfrak{A}_5 = (A_5;\vee,\wedge,\odot,\rightarrow,0,1)$ مشبکه‌ی مانده است. اگر نگاشت $\nu: A_5 \rightarrow A_5$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\nu(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, b \\ 1, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

مشاهده می‌کنیم که $(\mathfrak{A}_5;\nu)$ مشبکه‌ی مانده‌ی حالت است. در زیر به معرفی برخی از ویژگی‌های مشبکه‌های مانده‌ی حالت می‌پردازیم.

ملاحظه ۳. فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت است. در این‌صورت برای هر $x, y \in A$، شرایط زیر برقرار هستند:

$\mathfrak{s}_7$) $\nu(1) = 1$؛

$\mathfrak{s}_8$) $\nu(\neg x) = \neg\nu(x)$؛

$\mathfrak{s}_9$) $\nu(x) \odot \nu(y) \leq \nu(x \odot y)$. به‌ویژه از $x \odot y = 0$ نتیجه می‌گیریم $\nu(x) \odot \nu(y) = 0$؛

$\mathfrak{s}_{10}$) اگر $x \leq y$، آن‌گاه $\neg\nu(y) \odot \nu(x) = 0$؛

$\mathfrak{s}_{11}$) اگر x و y مقایسه‌پذیر باشند، آن‌گاه $\nu(x \rightarrow y) = \nu(x) \rightarrow \nu(y)$؛

$\mathfrak{s}_{12}$) اگر ν صادق باشد، آن‌گاه از این‌که $x < y$ نتیجه می‌گیریم که $\nu(x) < \nu(y)$؛

$\mathfrak{s}_{13}$) $\nu^2(x) = \nu(x)$؛

$\mathfrak{s}_{14}$) $\nu\big(\nu(x) \to \nu(y)\big) = \nu(x) \to \nu(y)$؛

$\mathfrak{s}_{15}$) $\nu(A) = \{a \in A :\ \nu(a) = a\}$؛

$\mathfrak{s}_{16}$) $\nu(A)$ زیرجبر $\mathfrak{A}$ است؛

$\mathfrak{s}_{17}$) $\ker(\nu) \cap \nu(A) = \{1\}$.

اثبات. $\mathfrak{s}_{14}$**)** براساس $\mathfrak{s}_3$ و $\mathfrak{s}_6$ ازتعریف ۱.۲ داریم:

$$\begin{aligned}\nu\big(\nu(x) \to \nu(y)\big) &= \nu\big(\nu(x)\big) \to \nu\big(\nu(x) \wedge \nu(y)\big)\\ &= \nu(x) \to \nu(x) \wedge \nu(y)\\ &= \nu(x) \to \nu(x) \odot \big(\nu(x) \to \nu(y)\big)\\ &= \nu(x) \to (\nu(x) \to \nu(y) \odot \nu(x))\\ &= \nu(x) \to \nu(y)\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\nu\big(\nu(x) \to \nu(y)\big) = \nu(x) \to \nu(y)$$

$\mathfrak{s}_{15}$**)** $\nu(A) = \{a \in A :\ \nu(a) = a\}$

چون ν یک عملگر حالت روی $\mathfrak{A}$ است، هم‌چنین با توجه به $(\mathfrak{s}_2)$، ν یکنواست. با توجه به $(\mathfrak{s}_1)$، $\nu(0) = 0$ و هم‌چنین بنابر $(\mathfrak{s}_7)$، $\nu(1) = 1$. بنابراین چون ν صادق است، پس برای هر $a \in A$، $\nu(a) = a$.

سایرقسمت ها مشابه [۴۲] اثبات می‌شود.

تعریف ۳.۲.[۵۸]. فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت است. پالایه F از $\mathfrak{A}$ را پالایه $\mathfrak{A}_\nu$ یا ν-پالایه نامیم، هرگاه $\nu(F) \subseteq F$. مجموعه‌ی تمام ν-پالایه‌ها را با $\mathscr{F}(\mathfrak{A}_\nu)$ نشان می‌دهیم. روشن است که

$$1, \ker(\nu)\,, A \in \mathscr{F}(\mathfrak{A}_\nu).$$

به‌علاوه به آسانی نتیجه می شود که اگر F پالایه‌ای از $\mathfrak{A}$ مشمول در $\ker(\nu)$ باشد، آن‌گاه F، ν-پالایه است.

مثال ۴.۲. مشبکه‌ی مانده‌ی $\mathfrak{A}_5$ مطرح شده در مثال ۲.۲ را در نظر بگیرید. در این‌صورت داریم

$$\mathscr{F}((\mathfrak{A}_5)_\nu) = \{F_1 = 1, F_2 = \{a, c, 1\}, F_3 = A_5\}.$$

گزاره ۵.۲. فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت است.. در این‌صورت شرایط زیر برقرار هستند:

۱) $F \in \mathscr{F}(\mathfrak{A})$ نتیجه می‌دهد که $\nu^{\leftarrow}(F) \in \mathscr{F}(\mathfrak{A}_\nu)$؛

۲) از این‌که $F \in \mathscr{F}(\mathfrak{A}_\nu)$ نتیجه می‌گیریم که $F \cap \nu(A) = \nu(F) \in \mathscr{F}(\nu(A))$؛

۳) $F \in \mathscr{F}(\nu(A))$ نتیجه می‌دهد $\nu^{\leftarrow}(F) \in \mathscr{F}(\mathfrak{A}_\nu)$.

اثبات. (۱): فرض کنید F پالایه‌ای از $\mathfrak{A}$ باشد. با توجه به رابطه‌ی($\mathfrak{s}_8$)، داریم $1 \in \nu^{\leftarrow}(F)$. فرض کنیم

$x_1,\ x_1 \to x_2 \in \nu^{\leftarrow}(F)$. به این ترتیب داریم $\nu(x_1),\ \nu(x_1 \to x_2) \in F$. چون F یک پالایه است، با توجه به رابطه‌ی ($\mathfrak{s}_{11}$)، نتیجه می‌گیریم که $\nu(x_1) \to \nu(x_2) \in F$ و به این ترتیب $\nu(x_2) \in F$. در نتیجه $x_2 \in \nu^{\leftarrow}(F)$ که نشان می‌دهد $\nu^{\leftarrow}(F)$ یک پالایه از $\mathfrak{A}$ است. هم‌چنین با توجه به رابطه‌ی ($\mathfrak{s}_{14}$)، نتیجه می‌گیریم که $\nu\big(\nu^{\leftarrow}(F)\big) = \nu^{\leftarrow}(F)$. به این ترتیب $\nu^{\leftarrow}(F)$، ν-پالایه است.

(۲): فرض کنید F یک ν-پالایه است. بنابراین $\nu(F) \subseteq F \cap \nu(A)$ و $a \in F \cap \nu(A)$ نتیجه می‌دهند که $x \in A$ موجود است به‌طوری‌که

$$a = \nu^2(x) = \nu(a) \in \nu(F), a = \nu(x).$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم که $F \cap \nu(A) = \nu(F)$. هم‌چنین داریم $1 = \nu(1) \in \nu(F)$. اگر داشته باشیم $x_1, x_2 \in \nu(A)$ و هم‌چنین $x_1,\ x_1 \to x_2 \in \nu(F) = F \cap \nu(A)$، آن‌گاه $x_2 \in F \cap \nu(A) = \nu(F)$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $\nu(F) \in \mathscr{F}(\nu(A))$.

(۳): مشابه (۱) اثبات می‌شود. ■

گزاره ۶.۲. فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت و F یک ν-پالایه باشد. در این‌صورت نگاشت زیر یک عملگر حالت روی $\mathfrak{A}/F$ است:

$$\nu/_F : A/_F \to A/_F,$$
$$\nu/_F\left(a/_F\right) = \nu(a)/_F.$$

اثبات. فرض کنید $F \in \mathscr{F}(\mathfrak{A}_\nu)$. چون $x/_F = y/_F$. در این‌صورت $x \to y,\ y \to x \in F$. بنابراین

$$\nu(x \to y), \nu(y \to x) \in F.$$

طبق ($\mathfrak{s}_3$)، روشن است که

$$\nu(x) \to \nu(y), \nu(y) \to \nu(x) \in F.$$

به این ترتیب نتیجه می‌گیریم که $\nu(x)/_F = \nu(y)/_F$. واضح است که روابط$(\mathfrak{s}_1)$، $(\mathfrak{s}_4)$، $(\mathfrak{s}_5)$، $(\mathfrak{s}_6)$ و $(\mathfrak{s}_7)$با توجه به عملگر ν/F برقرار هستند. اگر $x/F \leq y/F$، آن‌گاه $x \to y \in F$. با توجه به فرض، $\nu(x \to y) \in F$. هم‌چنین طبق $(\mathfrak{s}_3)$ داریم $\nu(x) \to \nu(y) \in F$. از این‌رو $\nu(x)/F \leq \nu(y)/F$ که به این معنی است که

$$\nu/F\,(x/F) \leq \nu/F\,(y/F).$$

بنابراین ν/F در $(\mathfrak{s}_2)$ صدق می‌کند و به این ترتیب ν/F یک عملگر حالت روی مشبکه‌ی مانده‌ی $\mathfrak{A}/F$ است. ■

فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت است. عملگر بستار وابسته به دستگاه بسته‌ی $(A; \mathscr{F}(\mathfrak{A}_\nu))$ را با $\mathscr{F}^{\mathfrak{A}_\nu}$ نشان می‌دهیم و در صورتی‌که ابهامی وجود نداشته باشد، با $\mathscr{F}^\nu$ نشان داده می‌شود.

فرض کنیم $\mathscr{A}= (A; \leq)$ و $\mathscr{B}= (B; \preccurlyeq)$دو مجموعه‌ی جزئاً مرتب و $f: A \to B$ نگاشتی بین این دو مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد.

۱) f را آنتی‌تون نامیم، هرگاه به ازای$a_1, a_2 \in A$، از $a_1 \leq a_2$، $f(a_2) \preccurlyeq f(a_1)$ را نتیجه بگیریم. به‌ویژه زمانی‌که $A = B$.

۲) f را افزایشی یا گسترده نامیم، هرگاه به ازای$a \in A$، داشته باشیم$a \leq f(a)$.

۳) f را خودتوان نامیم، هرگاه $f^2 = f$.

۴) f یک عملگر بستار روی A است، هرگاه f افزایشی، ایزوتون و خودتوان باشد.

یک نقطه‌ی ثابت از عملگر بستار f را عضو بسته‌ی f می‌نامیم (منظور از نقطه‌ی ثابت از عملگر بستار f، یک عضو از A مانند a است که در شرط $f(a) = a$ صدق می‌کند). مجموعه‌ی عضوهای بسته از عملگر بستار f را با $\mathscr{C}_f$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۷.۲. فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت است و $X \subseteq A$ در این‌صورت داریم

$$\mathscr{F}^\nu(X) = \mathscr{F}\big(X \cup \nu(X)\big).$$

اثبات. فرض کنید $a \in \mathscr{F}\big(X \cup \nu(X)\big)$. در این‌صورت وجود دارد عدد صحیح n و $y_1, \dots, y_n \in X \cup \nu(X)$ به‌طوری‌که $y_1 \odot \dots \odot y_n \leq a$. با در نظر گرفتن $(\mathfrak{s}_2)$ و $(\mathfrak{s}_9)$ داریم

$$\nu(y_1) \odot \dots \odot \nu(y_n) \leq \nu(a).$$

از این‌رو $\mathscr{F}\big(X \cup \nu(X)\big)$ یک ν-پالایه و شامل X است.

فرض کنیم G یک ν-پالایه و شامل X باشد. واضح است که $X \cup \nu(X) \subseteq G$ و لذا داریم

$$\mathscr{F}\big(X \cup \nu(X)\big) \subseteq G.$$

به این ترتیب $\mathscr{F}^{\nu}(X) = \mathscr{F}\big(X \cup \nu(X)\big)$.

نتیجه ۸.۲. فرض کنید $\mathfrak{A}_{\nu}$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت و F یک پالایه از $\mathfrak{A}_{\nu}$ است و $x, y \in A$. در این‌صورت شرایط زیر برقرار هستند:

۱) $\mathscr{F}^{\nu}(x) = \mathscr{F}\big(x \odot \nu(x)\big) = \mathscr{F}\big(x \wedge \nu(x)\big) = \mathscr{F}\big(x, \nu(x)\big) = \mathscr{F}(x) \,\underline{\vee}\, \mathscr{F}\big(\nu(x)\big)$؛

۲) $\mathscr{F}^{\nu}(F, x) = \mathscr{F}\Big(F \cup \big(x \odot \nu(x)\big)\Big) = \big\{a \in A{:}\, f \odot \big(x \odot \nu(x)\big)^{n} \leq a, f \in F, n \geq 1\big\}$.
در حالت خاص $\mathscr{F}^{\nu}(1, X) = \mathscr{F}^{\nu}(X)$؛

۳) اگر $x \leq y$ آن‌گاه $\mathscr{F}^{\nu}(y) \subseteq \mathscr{F}^{\nu}(x)$؛

۴) $\mathscr{F}^{\nu}\big(\nu(x)\big) \subseteq \mathscr{F}^{\nu}(x)$.

اثبات. (۱)، (۲) و (۳)، از ملاحظه ۲ و گزاره ۷.۲ نتیجه می‌شوند.

(۴): بنابر $(\mathfrak{s}_{13})$، (۱) و (۳)، داریم

$$\mathscr{F}^{\nu}\big(\nu(x)\big) = \mathscr{F}(\nu(x) \wedge \nu^{2}(x)) = \mathscr{F}\big(\nu(x) \wedge \nu(x)\big) = \mathscr{F}\big(\nu(x)\big)$$
$$\subseteq \mathscr{F}\big(x \wedge \nu(x)\big) = \mathscr{F}^{\nu}(x)$$

نتیجه ۹.۲. فرض کنید $\mathfrak{A}_{\nu}$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت است و $x, y \in A$. در این‌صورت شرایط زیر برقرار هستند:

۱) $\mathscr{F}^{\nu}(x) \cap \mathscr{F}^{\nu}(y) = \mathscr{F}\big(x \vee y, x \vee \nu(y), \nu(x) \vee y, \nu(x) \vee \nu(y)\big)$؛

۲) $\mathscr{F}^{\nu}(x \vee y) \subseteq \mathscr{F}^{\nu}(x) \cap \mathscr{F}^{\nu}(y)$؛

۳) $\mathscr{F}^{\nu}(x) \,\underline{\vee}\, \mathscr{F}^{\nu}(y) = \mathscr{F}\big(x, y, \nu(x), \nu(y)\big)$؛

۴) $\mathscr{F}^{\nu}(x \odot y) \subseteq \mathscr{F}^{\nu}(x) \,\underline{\vee}\, \mathscr{F}^{\nu}(y)$

اثبات. (۱) با توجه به توزیع پذیری مشبکه‌ای $\mathscr{F}(\mathfrak{A})$، بند (۵) از ملاحظه ۲ و بند (۱) از گزاره ۸.۲، داریم

$$\mathscr{F}^{\nu}(x) \cap \mathscr{F}^{\nu}(y) = \mathscr{F}\big(x \odot \nu(x)\big) \cap \mathscr{F}\big(y \odot \nu(y)\big) = \mathscr{F}\Big(x \,\underline{\vee}\, \mathscr{F}\big(\nu(x)\big)\Big)$$
$$\cap\, \mathscr{F}\Big(y \,\underline{\vee}\, \mathscr{F}\big(\nu(y)\big)\Big) = \big(\mathscr{F}(x) \cap \mathscr{F}(y)\big) \,\underline{\vee}\, \big(\mathscr{F}(x) \cap \mathscr{F}(\nu(y))\big) \,\underline{\vee}$$
$$\Big(\mathscr{F}\big(\nu(x)\big) \cap \mathscr{F}(y)\Big) \,\underline{\vee}\, \Big(\mathscr{F}\big(\nu(x)\big) \cap \mathscr{F}\big(\nu(y)\big)\Big)$$

$$= \mathscr{F}(x \vee y) \underline{\vee} \mathscr{F}(x \vee \nu(y)) \underline{\vee} \mathscr{F}(\nu(x) \vee y) \underline{\vee} \mathscr{F}(\nu(x) \vee \nu(y))$$

$$= \mathscr{F}(x \vee y, x \vee \nu(y), \nu(x) \vee y, \nu(x) \vee \nu(y)).$$

(۲): با توجه به رابطه‌ی (۱) و $(\mathfrak{s}_2)$، واضح است.

(۳): با توجه به بند (۵) از ملاحظه ۲ و بند (۱) از گزاره ۸.۲، داریم

$$\mathscr{F}^{\nu}(x) \underline{\vee} \mathscr{F}^{\nu}(y) = \mathscr{F}(x, \nu(x)) \underline{\vee} \mathscr{F}(y, \nu(y)) = \mathscr{F}(x, y, \nu(x), \nu(y)).$$

(۴): با توجه به بند (۳) و $(\mathfrak{s}_2)$، قابل اثبات است. ■

گزاره ۱۰.۲. فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت است. در این‌صورت $\mathscr{F}(\mathfrak{A}_\nu)$ زیرقابی از $\mathscr{F}(\mathfrak{A})$ است.

اثبات. فرض کنید $\mathscr{F}$ گردایه‌ای از پالایه‌های $\mathfrak{A}_\nu$ باشد. در این‌صورت $\mathscr{F}$ تحت اشتراک نظریه‌ی مجموعه‌ای، بسته است. هم‌چنین داریم

$$\nu(\cup \mathscr{F}) = \cup_{F \in \mathscr{F}} \nu(F) \subseteq \cup \mathscr{F}.$$

با توجه به گزاره ۷.۲، داریم

$$\nu(\underline{\vee} \mathscr{F}) = \nu(\mathscr{F}(\cup \mathcal{F})) = \nu\left(\mathscr{F}(\cup \mathcal{F} \cup \nu(\cup \mathcal{F}))\right)$$

$$= \nu(\mathscr{F}^{\nu}(\cup \mathcal{F})) \subseteq \mathscr{F}^{\nu}(\cup \mathcal{F}) = \mathscr{F}(\cup \mathcal{F}) = \underline{\vee} \mathcal{F}. \blacksquare$$

فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت است. در این‌صورت مجموعه‌ی همه‌ی پالایه‌ها یک جبر هیتینگ است و با $\mathscr{F}(\mathfrak{A}_\nu)$ نمایش داده می شود [**۲۸**].

اکنون، فرض کنیم $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت و F و G دو پالایه از $\mathfrak{A}_\nu$ باشند. در این‌صورت شبه متمم نسبی F نسبت به G را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$F \hookrightarrow_\nu G = \underline{\vee} \{H \in \mathscr{F}(\mathfrak{A}_\nu) : F \cap H \subseteq G\}.$$

ملاحظه ۴. طبق گزاره ۱۰.۲، اگر $\mathfrak{A}_\nu$ مشبکه‌ی مانده‌ی حالت باشد، آن‌گاه $\mathscr{F}(\mathfrak{A}_\nu)$ جبر هیتینگ است و شبه متمم نسبی F نسبت به G به‌صورت زیر می‌باشد:

$$F \hookrightarrow_\nu G = \underline{\vee} \{H \in \mathscr{F}(\mathfrak{A}_\nu) : F \cap H \subseteq G\}.$$

۲.۲ التصاق گالوا

تعریف ۱۱.۲.[۳۰]. زوج (f,g) را یک التصاق گالوا بین زوج‌های $\mathscr{A}=(A;\leq)$ و $\mathscr{B}=(B;\preccurlyeq)$ نامیم، هرگاه $f\colon A\to B$ و $g\colon B\to A$ توابعی باشند که برای هر $a\in A$ و $b\in B$ داشته باشیم

$$a\leq g(b)\Leftrightarrow b\preccurlyeq f(a).$$

گزاره ۱۲.۲.[۳۰].فرض کنیم $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ دو زنجیر و $f\colon A\to B$ و $g\colon B\to A$ دو نگاشت باشند. زوج (f,g) را یک التصاق گالوا بین $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ نامیم، اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشند:

۱) fg و gf نگاشت‌های افزایشی باشند؛

۲) f و g نگاشت‌های آنتی‌تون باشند.

گزاره ۱۳.۲.[۳۰]. فرض کنید (f,g) یک التصاق گالوا بین مجموعه‌های جزئاً مرتب $\mathscr{A}$ و $\mathscr{B}$ باشد. در این‌صورت روابط زیر برقرار هستند:

۱) $fgf=f$ و $gfg=g$؛

۲) اگر برای $X\subseteq A$، $\bigvee X$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $\bigwedge f(X)$ وجود دارد و $\bigwedge f(X)=f(\bigvee X)$؛

۳) gf عملگر بستار روی $\mathscr{A}$ است و $\mathscr{C}_{gf}=g(B)$.

قضیه ۱۴.۲.[۷۰]. فرض کنید A یک مجموعه و $f\colon\mathcal{P}(A)\to\mathcal{P}(A)$ یک عملگر بستار باشد. در این‌صورت $\mathscr{C}_f$ نسبت به عملگرهای زیر یک مشبکه‌ی کامل است:

$$\wedge^f\colon \mathscr{C}_f\times\mathscr{C}_f\to\mathscr{C}_f,$$

$$(X,Y)\mapsto X\cap Y$$

$$\vee^f\colon \mathscr{C}_f\times\mathscr{C}_f\to\mathscr{C}_f,$$

$$(X,Y)\mapsto f(X\cup Y)$$

نتیجه ۱۵.۲. فرض کنیم A و B دو مجموعه و (f,g) یک التصاق گالوا بین $\mathcal{P}(A)$ و $\mathcal{P}(B)$ باشد. در این‌صورت

$$\Big(g\big(\mathcal{P}(B)\big);\wedge^g,\vee^g,0=g(B),1=g(\emptyset)\Big),$$

یک مشبکه‌ی کامل کراندار است که برای هر خانواده‌ی $\{Y_i\}_{i\in I}\subseteq\mathcal{P}(B)$، داریم

$$\wedge_{i\in I}^g\, g(Y_i)=g(\cup_{i\in I}Y_i),$$

$$\vee_{i\in I}^g\, g(Y_i)=g(\cap_{i\in I}fg(Y_i)).$$

اثبات. طبق بند (۳) از گزاره ۱۳.۲، gf یک عملگر بستار روی $\mathcal{P}(A)$ است و $\mathscr{C}_{gf} = g(\mathcal{P}(B))$. بنابر قضیه ۱۴.۲، $\left(g\left(\mathcal{P}(B)\right);\wedge^{gf},\vee^{gf}\right)$ مشبکه‌ی کاملی است که برای هر خانواده‌ی $\{Y_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(B)$، داریم

$$\wedge_{i\in I}^{gf} g(Y_i) = \cap_{i\in I} g(Y_i),$$

$$\vee_{i\in I}^{gf} g(Y_i) = gf(\cup_{i\in I} g(Y_i)).$$

اکنون فرض کنیم $\{Y_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی B باشد. بنابر بند (۲) از گزاره‌ی ۱۳.۲، داریم

$$\cap_{i\in I} g(Y_i) = g(\cup_{i\in I} Y_i).$$

به این ترتیب نتیجه می‌گیریم که

$$\wedge_{i\in I}^{gf} g(Y_i) = \wedge_{i\in I}^{g} g(Y_i).$$

هم‌چنین داریم

$$gf\left(\cup_{i\in I} g(Y_i)\right) = g\left(\cap_{i\in I} fg(Y_i)\right).$$

بنابراین رابطه‌ی زیر نتیجه گرفته می‌شود:

$$\vee_{i\in I}^{gf} g(Y_i) = \vee_{i\in I}^{g} g(Y_i).$$

از این‌رو $\left(g\left(\mathcal{P}(B)\right);\wedge^{g},\vee^{g}\right)$ یک مشبکه‌ی کامل است. به‌علاوه با توجه به بند (۲) از گزاره ۱۲.۲، برای هر $Y \subseteq B$ داریم $g(B) \subseteq g(Y) \subseteq g(\emptyset)$. از این‌رو

$$\left(g\left(\mathcal{P}(B)\right);\wedge^{g},\vee^{g}, 0 = g(B), 1 = g(\emptyset)\right),$$

یک مشبکه‌ی کراندار است. ■

۳- پالایه‌های اول حالت و اول کمینه حالت

در این بخش، به بررسی مفهوم پالایه‌های اول کمینه حالت و اول حالت در مشبکه‌های مانده‌ی حالت می‌پردازیم. در [۷]، پالایه‌های بیشینه حالت بررسی شده‌اند. در قسمت بعدی، این تعریف را یادآوری کرده و به مشخص کردن آن‌ها در مشبکه‌های مانده می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳. فرض کنید $\mathfrak{A}_v$ مشبکه‌ی مانده‌ی حالت باشد. v-پالایه سره M را بیشینه حالت می‌نامیم، هرگاه در هیچ v-پالایه دیگری قرار نگیرد. برای نمایش مجموعه‌ی همه‌ی v-پالایه‌های بیشینه، از نماد $Max(\mathfrak{A}_v)$ استفاده می‌کنیم.

گزاره ۲.۳. هر v-پالایه سره از یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت $\mathfrak{A}_v$ را می‌توان به v-پالایه بیشینه توسیع داد.

اثبات. یک نتیجه‌ی مستقیم از لم زورن است. ■

گزاره‌ی زیر مشابه [۷، گزاره ۴.۵]، [۸، قضیه ۳.۳] و [۳۳، لم ۱۸.۳] است.

گزاره ۳.۳. فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت باشد. در این‌صورت برای هر ν-پالایه سره M، شرایط زیر معادل هستند:

۱) M بیشینه حالت است؛
۲) اگر $x \notin M$، آن‌گاه $m \in M$ و عدد صحیح n وجود دارند که $m \odot (\nu(x) \odot x)^n = 0$؛
۳) اگر $x \notin M$، آن‌گاه یک عدد صحیح n وجود دارد به‌طوری‌که $\neg\nu(x)^n \in M$.

اثبات. (۲) ⇐ (۱): فرض کنیم $x \notin M$. چون M، ν-پالایه بیشینه است، پس $\mathscr{F}^\nu(M \cup \{x\}) = A$. طبق بند (۲) از گزاره ۸.۲، عدد صحیح n و هم‌چنین $m \in M$ وجود دارند که $m \odot (\nu(x) \odot x)^n = 0$.

(۳) ⇐ (۲): فرض کنیم $x \notin M$. در این‌صورت عدد صحیح n و $m \in M$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$m \odot (\nu(x) \odot x)^n = 0.$$

بنابر $(\mathfrak{s}_{10})$ و $(\mathfrak{s}_{14})$، $\nu(m) \odot \left(\nu(x)\right)^{2n} = 0$. به این ترتیب داریم $\nu(m) \leq \neg\nu(x)^{2n}$. چون M، ν-پالایه است، بنابراین $\nu(m) \in M$. لذا نتیجه می‌گیریم که $\neg\nu(x)^{2n} \in \mathrm{M}$.

(۱) ⇐ (۳): فرض کنیم $x \notin M$. در این‌صورت برای عدد صحیح n، $\neg\nu(x)^n \in M$. طبق بند (۲) از گزاره ۸.۲،

$$0 = \neg\nu(x)^n \odot \nu(x)^n \in \mathscr{F}^\nu(M, x).$$

از این‌رو $M \in Max(\mathfrak{A}_\nu)$. ■

گزاره ۴.۳. فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت باشد. در این‌صورت شرایط زیر برقرار هستند:

۱) از $M \in Max(\mathfrak{A}_\nu)$ نتیجه می‌گیریم که $\nu(M) \in Max(\nu(A))$؛
۲) $M \in Max(\nu(A))$ نتیجه می‌دهد $\nu^{\leftarrow}(M) \in Max(\mathfrak{A}_\nu)$.

اثبات. (۱):فرض کنیم M یک ν-پالایه بیشینه باشد. با توجه به بند (۳) از گزاره ۵.۲، چون M سره است،

$\nu(M) = M \cap \nu(A)$. به این ترتیب $\nu(M)$ یک پالایه سره از $\nu(A)$ است. فرض کنیم $x \in \nu(A) \backslash \nu(M)$.

لذا $x \notin M$ از این‌رو طبق بند (۳) از گزاره ۳.۳، عدد صحیح n وجود دارد به‌طوری‌که $\neg x^n = \neg\nu(x)^n \in M$. در نتیجه $\nu(M)$ یک پالایه بیشینه از مشبکه‌ی مانده‌ی $\nu(A)$ است.

(۲): فرض کنیم M یک پالایه بیشینه از مشبکه‌ی مانده‌ی $\nu(A)$ باشد. چون M سره است، نتیجه می‌گیریم $\nu^{\leftarrow}(M) \subsetneq A$ و لذا طبق بند (۳) از گزاره ۵.۲، $\nu^{\leftarrow}(M)$ یک ν-پالایه از $\mathfrak{A}$ است. اکنون فرض کنیم $x \notin \nu^{\leftarrow}(M)$. در این‌صورت $\nu(x) \notin M$ و لذا عدد صحیح n به‌گونه‌ای وجود دارد که $\neg\nu(x)^n \in M$. بنابر $(\mathfrak{s}_5)$ و $(\mathfrak{s}_9)$ داریم

$$\nu(\neg\nu(x)^n) = \neg\nu(x)^n \in M.$$

در نتیجه $\neg\nu(x)^n \in \nu^{\leftarrow}(M)$. بنابراین، طبق بند (۳) از گزاره ۳.۳، $\nu^{\leftarrow}(M)$ یک ν-پالایه بیشینه است. ■

تعریف ۵.۳. فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت باشد. ν-پالایه سره P را پالایه اول حالت (یا به‌طور دقیق‌تر، پالایه ν-اول) نامیم، هرگاه برای هر ν-پالایه F_1 و F_2، $F_1 \cap F_2 = P$ نتیجه بدهد که $F_1 = P$ یا $F_2 = P$. به‌عبارت دیگر، P، $\cap$-تحویل‌ناپذیر باشد.

مجموعه‌ی تمام پالایه‌های اول حالت از $\mathfrak{A}_\nu$ را با $Spec_\nu(\mathfrak{A}_\nu)$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین به آسانی مشاهده می‌شود که $Max(\mathfrak{A}_\nu) \subseteq Spec_\nu(\mathfrak{A}_\nu)$.

کانستنتنیسکو در [۸، گزاره ۶.۳]، پالایه‌های اول حالت را برای شبه BL-جبرها مشخص کرد. در گزاره بعدی، پالایه‌های اول حالت را در مشبکه‌های مانده مشخص می‌کنیم.

گزاره ۶.۳. فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ مشبکه‌ی مانده‌ی حالت باشد. برای هر ν-پالایه P، شرایط زیر معادل یکدیگرند:

۱) P یک پالایه اول حالت است؛

۲) اگر F_1 و F_2، ν-پالایه باشند و $F_1 \cap F_2 \subseteq P$، آن‌گاه $F_1 \subseteq P$ یا $F_2 \subseteq P$؛

۳) اگر $x, y \in A$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \big(y \odot \nu(y)\big) \in P,$$

آن‌گاه $x \in P$ یا $y \in P$.

اثبات. (۲) $\Leftarrow$ (۱): فرض کنیم F_1 و F_2، ν-پالایه باشند به‌طوری‌که $F_1 \cap F_2 \subseteq P$. به این ترتیب $(F_1 \cap F_2) \vee_\nu P = P$. اکنون داریم

$$(F_1 \vee_\nu P) \cap (F_2 \vee_\nu P) = P,$$

یعنی $F_1 \vee_\nu P = P$ یا $F_2 \vee_\nu P = P$. حال فرض کنیم $F_1 \vee_\nu P = P$. در نتیجه داریم

$$F_1 \cup P \subseteq F_1 \vee_\nu P = P,$$

و از این‌رو $F_1 \subseteq P$.

(۳) $\Rightarrow$ (۲): فرض کنیم $x, y \in A$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \big(y \odot \nu(y)\big) \in P$. هم‌چنین فرض کنیم $z \in \mathscr{F}^{\nu}(P, x) \cap \mathscr{F}^{\nu}(P, y)$ اکنون بنابر بند (۲) از گزاره ۸.۲، اعداد صحیح m و n و $p_2 \in P$ و p_1 وجود دارند به‌طوری‌که

$$x \geq (p_1 \odot (x \odot \nu(x))^n) \vee (p_2 \odot (x \odot \nu(x))^m).$$

بنابر رابطه‌ی (r_2)، نتیجه می‌گیریم که

$$x \geq (p_1 \vee p_2) \odot (p_1 \vee (y \odot \nu(y))^m) \odot ((x \odot \nu(x))^n \vee p_2) \odot ((x \odot \nu(x)) \\ \vee (y \odot \nu(y)))^{nm}.$$

پس نتیجه می‌گیریم که $x \in P$ و بنابراین

$$\mathscr{F}^{\nu}(P, x) \cap \mathscr{F}^{\nu}(P, y) \subseteq P,$$

که نتیجه می‌دهد $x \in \mathscr{F}^{\nu}(P, x) \subseteq P$ یا $y \in \mathscr{F}^{\nu}(P, y) \subseteq P$.

(۱) $\Rightarrow$ (۳): فرض کنیم F_1 و F_2 دو ν-پالایه باشند به‌طوری‌که $F_1 \cap F_2 = P$، $F_1 \neq P$ و $F_2 \neq P$. فرض کنیم $x \in F_1 \backslash P$ و $y \in F_2 \backslash P$. بنابراین داریم

$$\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \big(y \odot \nu(y)\big) \in F_1 \cap F_2 = P,$$

و به این معنی است که $x \in P$ یا $y \in P$ که یک تناقض می‌باشد. ■

زیرمجموعه‌ی غیرتهی $\mathscr{C}$ از $\mathfrak{A}_\nu$ را زیرمجموعه‌ی $\vee$-بسته‌ی حالت می‌نامیم، هرگاه از $x, y \in \mathscr{C}$ نتیجه بگیریم که

$$\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \big(y \odot \nu(y)\big) \in \mathscr{C}.$$

ملاحظه ۵. فرض کنیم P یک ν-پالایه باشد. واضح است که P یک پالایه‌ی اول حالت است، اگر و تنها اگر $P' := A - P$ یک زیرمجموعه‌ی $\vee$-بسته‌ی حالت باشد. به‌علاوه اگر Γ خانواده‌ای از ν-پالایه‌های اول حالت باشد، آن‌گاه $(\cup \Gamma)'$ یک زیرمجموعه‌ی $\vee$-بسته‌ی حالت است.

قضیه ۷.۳. فرض کنید F یک ν-پالایه از $\mathfrak{A}_\nu$ و $\mathscr{C}$ یک زیرمجموعه‌ی $\vee$-بسته‌ی حالت از $\mathfrak{A}_\nu$ باشد که اشتراک آن با F تهی است. آن‌گاه F درون ν-پالایه P قرار دارد که نسبت به "خاصیت اشتراک نداشتن با $\mathscr{C}$ "، بیشینه است. به‌علاوه P، ν-اول است.

اثبات. فرض کنیم

$$\Sigma = \{G \in \mathscr{F}(\mathfrak{A}_\nu) : F \subseteq G, G \cap \mathscr{C} = \emptyset\}.$$

روشن است که Σ در لم زورن صدق می‌کند. فرض کنیم P عضو بیشینه Σ باشد. فرض کنیم

$$\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \big(y \odot \nu(y)\big) \in P, x, y \notin P.$$

با توجه به بیشینه بودن P، داریم

$$\mathscr{F}^{\nu}(P, x) \cap \mathscr{C} \neq \emptyset, \qquad \mathscr{F}^{\nu}(P, y) \cap \mathscr{C} \neq \emptyset.$$

فرض کنیم

$$a_x \in \mathscr{F}^{\nu}(P, x) \cap \mathscr{C}, \qquad a_y \in \mathscr{F}^{\nu}(P, y) \cap \mathscr{C}.$$

با توجه به بند (۲) از گزاره ۸.۲، اعداد صحیح m و n و هم‌چنین $p_x, p_y \in P$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$\big(a_x \odot \nu(a_x)\big) \vee \Big(a_y \odot \nu\big(a_y\big)\Big) \geq \Big(p_x \odot \big(x \odot \nu(x)\big)^n\Big) \vee \Big(p_y \odot \big(y \odot \nu(y)\big)^m\Big).$$

بنابر (r_2) داریم

$$\big(a_x \odot \nu(a_x)\big) \vee \Big(a_y \odot \nu\big(a_y\big)\Big) \geq \big(p_x \vee p_y\big) \odot \Big(p_x \vee \big(y \odot \nu(y)\big)^m\Big) \odot$$
$$\Big(\big(x \odot \nu(x)\big)^n \vee p_y\Big) \odot \Big(\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \big(y \odot \nu(y)\big)\Big)^{nm},$$

و از این‌رو

$$\big(a_x \odot \nu(a_x)\big) \vee \Big(a_y \odot \nu\big(a_y\big)\Big) \in P \cap \mathscr{C},$$

که یک تناقض است. بنابراین $x \in P$ یا $y \in P$ و با توجه به گزاره ۶.۳، P یک پالایه اول حالت است.

نتیجه ۸.۳. فرض کنید F یک ν-پالایه از $\mathfrak{A}_n$ باشد، $x \in A$ و $\emptyset \neq X \subseteq A$. در این‌صورت شرایط زیر برقرار هستند:

۱) اگر $X \nsubseteq F$، آن‌گاه $P \in Spec_{\nu}(\mathfrak{A}_{\nu})$ وجود دارد به‌طوری‌که $F \subseteq P$ و P نسبت به ویژگی $X \nsubseteq P$، بیشینه است؛

۲) $\mathscr{F}^{\nu}(X) = \cap \{P \in Spec_{\nu}(\mathfrak{A}_{\nu}) : X \subseteq P\}$.

اثبات. نتیجه‌ی مستقیم از قضیه ۷.۳ است. ■

تعریف ۹.۳. فرض کنیم $\mathfrak{A}_{\nu}$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت باشد و $X \subseteq A$. پالایه اول حالت P را پالایه اول کمینه حالت متعلق به X می‌نامیم (پالایه اول کمینه X-حالت)، هرگاه

$$\{Q \in Spec_{\nu}(\mathfrak{A}_{\nu}) : X \subseteq Q \subseteq P\} = P.$$

مجموعه‌ی همه‌ی پالایه‌های اول کمینهX-حالت $\mathfrak{A}_\nu$ را با $Min_X(\mathfrak{A}_\nu)$ نشان می‌دهیم. اگر برای پالایه اول حالت P داشته باشیم $P \in Min_1(\mathfrak{A}_\nu)$، آن‌گاه P را پالایه اول کمینه حالت می‌نامیم.

بنابر لم زورن، لم زیر را داریم:

لم ۱۰.۳. فرض کنید F یک ν-پالایه از $\mathfrak{A}_\nu$ باشد. اگر $\mathscr{C}$ یک زیرمجموعه‌ی V-بسته‌ی حالت از $\mathfrak{A}_\nu$ باشد که $\mathscr{C} \cap F = \emptyset$، آن‌گاه $\mathscr{C}$ در یک زیرمجموعه‌ی V-بسته‌ی حالت C که نسبت به خاصیت"اشتراک نداشتن با F"، بیشینه است، قرار دارد.

قضیه ۱۱.۳. فرض کنید F یک ν-پالایه از $\mathfrak{A}_\nu$ باشد. $P \subseteq A$ را پالایه اول کمینه F-حالت گوییم، اگر و تنها اگر P' یک زیرمجموعه‌ی V-بسته از $\mathfrak{A}$ باشد به‌طوری‌که نسبت به خاصیت "اشتراک نداشتن با F"، بیشینه باشد.

اثبات. فرض کنیم $P \subseteq A$ به‌طوری‌که P' بزرگترین زیرمجموعه‌ی V-بسته‌ی حالت از $\mathfrak{A}_\nu$ باشد و نسبت به خاصیت "اشتراک نداشتن با F"، بیشینه باشد. بنابر گزاره ۷.۳، پالایه اول حالت Q به‌گونه‌ای وجود دارد که $Q \cap P' = \emptyset$. بنابراین $Q \subseteq P$. با توجه به ملاحظه ۵، Q' یک زیرمجموعه‌ی V-بسته‌ی حالت از $\mathfrak{A}_\nu$ است. طبق فرض، $P' \subseteq Q'$ و $Q' \cap F = \emptyset$. با توجه به بیشینه بودن P'، داریم $P' = Q'$ و $P = Q$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که P یک پالایه اول حالت است و به‌علاوه P یک پالایه اول کمینه F-حالت است.

برعکس، فرض کنیم P یک پالایه اول کمینه F-حالت از $\mathfrak{A}_\nu$ باشد. بنابر ملاحظه ۵، P' زیرمجموعه‌ی V-بسته‌ی حالت از $\mathfrak{A}_\nu$ است که $P' \cap F = \emptyset$. با استفاده از لم ۱۰.۳،$\mathscr{C}$ را زیرمجموعه‌ی V-بسته‌ی حالت از $\mathfrak{A}_\nu$ در نظر می‌گیریم که نسبت به خاصیت "اشتراک نداشتن با F "، بیشینه باشد. به این ترتیب $\mathscr{C}'$ یک پالایه اول کمینه F-حالت است که $\mathscr{C}' \cap P' = \emptyset$ و از این‌رو $\mathscr{C}' \subseteq P$. طبق فرض، $\mathscr{C} = P'$. بنابراین،P' یک زیرمجموعه‌ی V-بسته از $\mathfrak{A}_\nu$ است که نسبت به خاصیت "اشتراک نداشتن با F"، بیشینه است. ■

نتیجه ۱۲.۳. فرض کنیم $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت، $X \subseteq A$ و P یک پالایه اول حالت شامل X باشد. در این‌صورت یک پالایه اول کمینه X-حالت مشمول در P وجود دارد.

اثبات. طبق ملاحظه ۵، P' یک زیرمجموعه‌ی V-بسته‌ی حالت از $\mathfrak{A}_\nu$ است به‌طوری‌که $P' \cap \mathscr{F}^\nu(X) = \emptyset$. بنابر لم ۱۰.۳، می‌توان یک زیرمجموعه‌ی V-بسته‌ی حالت$\mathscr{C}$ **از** $\mathfrak{A}$ شامل P' به‌دست آورد که نسبت به ویژگی

$\mathscr{C} \cap \mathscr{F}^\nu(\mathrm{X}) = \emptyset$ بیشینه است. با توجه به قضیه ۱۱.۳، $\mathscr{C}'$ یک پالایه اول کمینه $\mathscr{F}^\nu(X)$-حالت و مشمول در P است. در نتیجه $\mathscr{C}'$ یک پالایه اول کمینه X-حالت مشمول در P است. ■

نتیجه ۱۳.۳. فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت باشد و $X \subseteq A$. در این‌صورت داریم

$$\mathscr{F}^\nu(X) = \cap \{m \in Min_\nu(\mathfrak{A}_\nu) : X \subseteq m\}.$$

اثبات. مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\Sigma = \{P \in Spec_{\nu}(\mathfrak{A}_{\nu}) : X \subseteq P\},$$
$$\Gamma = \{m \in Min_{\nu}(\mathfrak{A}_{\nu}) : X \subseteq m\}.$$

با توجه به بند (۲) از نتیجه ۸.۳، کافی است نشان دهیم که $\cap \Sigma = \cap \Gamma$. واضح است که $\cap \Sigma \subseteq \cap \Gamma$. اکنون فرض کنیم $a \in \cap \Gamma$ و P عضو دلخواهی از Σ باشد. بنابر نتیجه ۱۲.۳، یک پالایه اول کمینه X-حالت $\mathfrak{m}$، مشمول در P وجود دارد. از این‌رو $a \in \mathfrak{m} \subseteq P$ و به این ترتیب $\cap \Gamma \subseteq \cap \Sigma$. ■

۴- هم‌پوچ‌سازهای حالت

در این بخش، به معرفی مفهوم ν-هم‌پوچ‌سازهای تعمیم‌یافته در مشبکه‌های مانده‌ی حالت می‌پردازیم. هم‌چنین ثابت می‌کنیم که ارتباطی بین ν-هم‌پوچ‌سازهای تعمیم‌یافته در مشبکه‌های مانده‌ی حالت و التصاق گالوا برقرار است. در نهایت، نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی ν-پالایه‌های یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت، یک جبر هیتینگ کامل را تشکیل می‌دهد.

تعریف ۱.۴. فرض کنید $\mathfrak{A}_{\nu}$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت و F پالایه‌ای از $\mathfrak{A}$ باشد. به ازای هر $X \subseteq A$، ν-هم‌پوچ‌ساز X متعلق به F را با $(F:X)_{\nu}$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(F:X)_{\nu} = \{a \in A : (x \odot \nu(x)) \vee (a \odot \nu(a)) \in F, \qquad \forall x \in X\}.$$

اگر $X = \{x_1, \dots, x_n\}$، آن‌گاه $(F:X)_{\nu}$ را با $(F:x_1, \dots, x_n)_{\nu}$ نشان می‌دهیم. به‌علاوه $(1:X)_{\nu}$ را ν-هم‌پوچ‌ساز X نامیده و با $X_{\nu}^{\perp}$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۴. پالایه حالت F_2 از مثال ۴.۲ را در نظر می‌گیریم. مشاهده می‌کنیم که $(F_2:0)_{\nu} = (F_2:b)_{\nu} = F_2$ و $(F_2:a)_{\nu} = (F_2:c)_{\nu} = (F_2:1)_{\nu} = A_5$.

ملاحظه ۶. ν-هم‌پوچ‌ساز X که در تعریف ۱.۴ بیان کردیم، پالایه توسعه‌یافته‌ی F وابسته به X نامیده می‌شود (در [۳۲]، برای $R\ell$-تکواره‌ها و در [۶،۹]، برای شبه BL-جبرها). پالایه‌های توسعه‌یافته در مشبکه‌ی پالایه‌های یک مشبکه‌ی مانده در [۴۱] مشخص شدند. مفهوم پالایه‌ی توسعه‌یافته در [۸]، به شبه‌حالت BL-جبرها و برای مشبکه‌های مانده در [۳۳] تعمیم یافتند وقتی‌که پالایه‌های حالت توسعه‌یافته، هم‌پوچ‌سازها نامیده شدند. هم‌چنین پالایه‌های توسعه‌یافته برای مشبکه‌های مانده‌ی g-حالت در [۴۲] تعمیم یافتند.

در گزاره بعدی، نشان می‌دهیم که ν-هم‌پوچ‌سازهای یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت، ν-پالایه هستند.

گزاره ۳.۴. فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت و F پالایه‌ای از $\mathfrak{A}$ باشد. در این‌صورت برای هر $X \subseteq A$، $(F:X)_\nu$ پالایه‌ای از $\mathfrak{A}_\nu$ است.

اثبات. فرض کنیم $X \subseteq A$ در این‌صورت بنابر $(\mathfrak{s}_7)$، $1 \in (F:X)_\nu$، زیرا فرض کنیم $x \in X$ باشد دراین صورت داریم:

$\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \big(1 \odot \nu(1)\big) = 1 \in F$. ازاینکه $\nu(1)) = 1$، لذا پرانتزدوم برابر 1 شده و نتیجه می گیریم $1 \in (F:X)_\nu$.

اکنون فرض کنیم $a, b \in (F:X)_\nu$. در این‌صورت برای هر $x \in X$،

$$\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \big(a \odot \nu(a)\big) \in F,$$
$$\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \big(b \odot \nu(b)\big) \in F.$$

از این‌رو نتیجه می‌گیریم که

$$\big(x \odot \nu(x)\big) \vee a, \big(x \odot \nu(x)\big) \vee \nu(a) \in F,$$
$$\big(x \odot \nu(x)\big) \vee b, \big(x \odot \nu(x)\big) \vee \nu(b) \in F.$$

هم‌چنین داریم

$$\Big(\big(x \odot \nu(x)\big) \vee a\Big) \odot \Big(\big(x \odot \nu(x)\big) \vee b\Big) \in F,$$
$$\Big(\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \nu(a)\Big) \odot \Big(\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \nu(b)\Big) \in F.$$

با توجه به رابطه‌ی (r_2)،

$$\Big(\big(x \odot \nu(x)\big) \vee a\Big) \odot \Big(\big(x \odot \nu(x)\big) \vee b\Big) \leq \big(x \odot \nu(x)\big) \vee (a \odot b),$$

که رابطه‌ی اخیر، رابطه‌ی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\big(x \odot \nu(x)\big) \vee (a \odot b) \in F.$$

بنابر (r_2) و $(\mathfrak{s}_9)$، داریم

$$\begin{aligned}\Big(\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \nu(a)\Big) \odot \Big(\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \nu(b)\Big) &\leq \big(x \odot \nu(x)\big) \vee \big(\nu(a) \odot \nu(b)\big)\\ &\leq \big(x \odot \nu(x)\big) \vee \nu(a \odot b),\end{aligned}$$

و از این رابطه، نتیجه می‌گیریم که

$$\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \nu(a \odot b) \in F.$$

به این ترتیب

$$\Big(\big(x \odot \nu(x)\big) \vee (a \odot b)\Big) \odot \Big(\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \nu(a \odot b)\Big) \in F.$$

با توجه به رابطه‌ی (r_2)، داریم

$$\begin{aligned}&\Big(\big(x \odot \nu(x)\big) \vee (a \odot b)\Big) \odot \Big(\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \nu(a \odot b)\Big)\\ &\leq \big(x \odot \nu(x)\big) \vee \big((a \odot b) \odot \nu(a \odot b)\big),\end{aligned}$$

که رابطه‌ی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \big((a \odot b) \odot \nu(a \odot b)\big) \in F.$$

لذا $a \odot b \in (F:X)_\nu$. اگر $a \leq b$، آن‌گاه بنابر $(\mathfrak{s}_2)$ نتیجه می‌گیریم که $a \in (F:X)_\nu$ و در نتیجه $b \in (F:X)_\nu$. از این‌رو $(F:X)_\nu$ پالایه‌ای از $\mathfrak{A}$ است. اکنون فرض کنیم $a \in (F:X)_\nu$. از این‌رو

$$\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \big(a \odot \nu(a)\big) \in F,$$

و در نتیجه $\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \nu(a) \in F$. چون F پالایه است، لذا

$$\Big(\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \nu(a)\Big) \odot \Big(\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \nu(a)\Big) \in F.$$

از طرفی بنابر رابطه‌ی (r_2)،

$$\Big(\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \nu(a)\Big) \odot \Big(\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \nu(a)\Big) \leq \big(x \odot \nu(x)\big) \vee \big(\nu(a) \odot \nu(a)\big).$$

با استفاده از $(\mathfrak{s}_{13})$، رابطه‌ی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \Big(\nu(a) \odot \nu\big(\nu(a)\big)\Big) = \big(x \odot \nu(x)\big) \vee \big(\nu(a) \odot \nu(a)\big) \in F.$$

به این ترتیب نتیجه می‌گیریم که $\nu(a) \in (F:X)_\nu$. لذا $(F:X)_\nu$ یک ν-پالایه است. ■

در گزاره‌ی بعدی، برخی از ویژگی‌های ν-هم‌پوچ‌سازهای توسعه‌یافته را بیان می‌کنیم.

گزاره ۴.۴. فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت باشد. در این‌صورت برای هر $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ و $F, G \in \mathscr{F}(\mathfrak{A})$، شرایط زیر برقرار هستند:

۱) از $X \subseteq (F:Y)_\nu$، $Y \subseteq (F:X)_\nu$ نتیجه می‌شود؛

۲) اگر F، ν-پالایه باشد، آن‌گاه $F \subseteq (F:X)_\nu$؛

۳) از $F \subseteq G$، $(F:X)_\nu \subseteq (G:X)_\nu$ نتیجه می‌شود؛

۴) $(F:X)_\nu = A$، اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$، $x \odot \nu(x) \in F$. به‌علاوه اگر داشته باشیم $F \in \mathscr{F}(\mathfrak{A}_\nu)$، $(F:\emptyset)_\nu = (F:1)_\nu = A$، آن‌گاه $(F:F)_\nu = A$؛

۵) $X \cap (F:X)_\nu \subseteq F$؛

۶) اگر F، ν-پالایه باشد و $F \subseteq X$، آن‌گاه $X \cap (F:X)_\nu = F$. به‌ویژه برای هر ν-پالایه F، داریم $(F:A)_\nu = F$.

اثبات. (۱): فرض کنیم $X \subseteq (F:Y)_\nu$ و $x \in X$. در این‌صورت برای هر $y \in Y$، داریم

$$\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \big(y \odot \nu(y)\big) \in F,$$

یعنی $y \in (F:X)_\nu$. از این‌رو $Y \subseteq (F:X)_\nu$.

(۲): فرض کنیم $f \in F$. چون $F \in \mathscr{F}(\mathfrak{A}_\nu)$، بنابراین

$$\nu(f) \in F, \qquad f \odot \nu(f) \in F.$$

پس برای هر $x \in X$، داریم

$$\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \big(f \odot \nu(f)\big) \geq f \odot \nu(f) \in F.$$

در نتیجه $f \in (F:X)_\nu$.

(۳): فرض کنیم $F \subseteq G$ و $a \in (F:X)_\nu$. به این ترتیب برای هر $x \in X$، داریم

$$\big(x \odot \nu(x)\big) \vee \big(a \odot \nu(a)\big) \in F \subseteq F.$$

از این‌رو $a \in (G:X)_\nu$.

(۴): فرض کنیم $(F:X)_\nu = A$ و $x \in X$. از این‌رو

$$x \odot \nu(x) = \big(x \odot \nu(x)\big) \vee \big(x \odot \nu(x)\big) \in F.$$

به این ترتیب $x \odot \nu(x) \in F$.

برعکس، فرض کنیم $a \in A$. لذا برای هر $x \in X$،

$$x \odot \nu(x) \leq \big(x \odot \nu(x)\big) \vee \big(a \odot \nu(a)\big).$$

به این ترتیب با توجه به فرض، $a \in (F:X)_\nu$، یعنی $(F:X)_\nu = A$. باقی‌مانده‌ی اثبات نیز واضح است.

(۵): فرض کنیم $x \in X \cap (F:X)_{\nu}$. در نتیجه

$$x \odot \nu(x) = \big(x \odot \nu(x)\big) \vee \big(x \odot \nu(x)\big) \in F.$$

چون $\big(x \odot \nu(x)\big) \leq x$، لذا $x \in F$.

(۶): نتیجه‌ی مستقیم بندهای (۲) و (۵) است. ■

در ملاحظه ۴، مشاهده کردیم که مجموعه‌ی ν-پالایه‌های یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت، تشکیل جبر هیتینگ می‌دهند. در گزاره بعدی، به بررسی شبه‌متمم‌های نسبی این جبر هیتینگ در ν-هم‌پوچ‌سازها می‌پردازیم.

گزاره ۵.۴. فرض کنید $\mathfrak{A}_{\nu}$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت و F و G، دو ν-پالایه از $\mathfrak{A}_{\nu}$ باشند. در این‌صورت شبه‌متمم نسبی G نسبت به F، $(F:G)_{\nu}$ است.

اثبات. طبق بند (۵) از گزاره ۴.۴، داریم

$$G \cap (F:G)_{\nu} \subseteq F.$$

اکنون فرض کنیم که برای ν-پالایه H، داشته باشیم $G \cap H \subseteq F$. هم‌چنین فرض کنیم $h \in H$ و $g \in G$. چون G و H، ν-پالایه هستند، داریم

$$\big(h \odot \nu(h)\big) \vee \big(g \odot \nu(g)\big) \in G \cap H \subseteq F,$$

و در نتیجه $h \in (F:G)_{\nu}$. بنابراین $H \subseteq (F:G)_{\nu}$. لذا نتیجه می‌گیریم که $(F:G)_{\nu}$ یک شبه‌متمم نسبی از G نسبت به F است. ■

نتیجه زیر بلافاصله از گزاره ۵.۴ به‌دست آمده است.

نتیجه ۶.۴. فرض کنیم F یک پالایه از مشبکه‌ی مانده‌ی حالت $\mathfrak{A}$ باشد. در این‌صورت روابط زیر برقرار هستند:

۱) $(\mathscr{F}_F(\mathfrak{A}_{\nu}); \cap, \underline{\vee}, (F:-), F, A)$ یک جبر هیتینگ کامل است؛

۲) $\mathscr{F}_F(\mathfrak{A}_{\nu})$ یک جبر بولی است، اگر و تنها اگر برای هر $G \in \mathscr{F}_F(\mathfrak{A}_{\nu})$، $G = (F:(F:G)_{\nu})$.

اثبات: با توجه به گزاره ۵.۴، ازاین که هر دو عنصر دارای شبه متمم نسبی هستند، نتیجه میگیریم

$(\mathcal{F}_F(\mathfrak{A}_{\nu}); \cap, \underline{\vee}, (F:-), F, A)$ یک جبر هیتینگ است.

گزاره ۷.۴. فرض کنید $\mathfrak{A}_{\nu}$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت و F پالایه‌ای از $\mathfrak{A}$ باشد. نگاشت زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathscr{C}_F^{\nu}: \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A),$$

$$X \mapsto (F:X)_\nu$$

در این‌صورت زوج$(\mathscr{C}_F^\nu, \mathscr{C}_F^\nu)$ یک التصاق گالوا روی $\mathcal{P}(A)$ است.

اثبات. طبق بند (۱) از گزاره ۴.۴، واضح است. ■

با توجه به گزاره ۱۲.۲، گزاره ۱۳.۲ و گزاره ۷.۴، نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۸.۴. فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت و F، پالایه‌ای از $\mathfrak{A}$ باشد. برای هر $X, Y \subseteq A$، شرایط زیر برقرار هستند:

۱) $X \subseteq (F:(F:X)_\nu)_\nu$؛

۲) از $X \subseteq Y$، $(F:Y)_\nu \subseteq (F:X)_\nu$ نتیجه می‌شود؛

۳) $(F:X)_\nu = (F:(F:(F:X)_\nu)_\nu)_\nu$؛

۴) $\mathscr{C}_F \mathscr{C}_F$ یک عملگر بستار روی $\mathcal{P}(A)$ است و

$$\mathscr{C}_{\mathscr{C}_F^\nu \mathscr{C}_F^\nu} = \mathscr{C}_F^\nu\big(\mathcal{P}(A)\big) = \{(F:X)_\nu : X \subseteq A\}.$$

در گزاره بعدی، به‌عنوان کاربردی از گزاره ۷.۴، برخی از ویژگی‌های هم‌پوچ‌سازهای حالت توسعه‌یافته را بیان می‌کنیم.

گزاره ۹.۴. فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت و F پالایه‌ای از $\mathfrak{A}_\nu$ باشد. برای هر خانواده‌ی $\{X\} \cup \{X_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(A)$، شرایط زیر برقرار هستند:

۱) $(F:\cup_{i\in I} X_i)_\nu = \cap_{i\in I} (F:X_i)_\nu$؛

۲) $(F:X)_\nu = \cap_{x\in X} (F:x)_\nu$؛

۳) اگر G یک پالایه مشمول در F باشد، آن‌گاه $(F:\mathscr{F}^\nu(G,X))_\nu = (F:X)_\nu$؛

۴) $(F:\mathscr{F}^\nu(X))_\nu = (F:X)_\nu$، خصوصاً $(F:0)_\nu = F$؛

۵) اگر G یک پالایه مشمول در F باشد، آن‌گاه $\mathscr{F}^\nu(G,X) \cap (F:X)_\nu \subseteq F$؛

۶) $\mathscr{F}^\nu(F,X) \cap (F:X)_\nu = F$؛

۷) $(F:X)_\nu = (F:X-F)_\nu$.

اثبات. (۱): طبق گزاره ۷.۴ و بند (۲) از گزاره ۱۳.۲، واضح است.

(۲): با قرار دادن $X = \cup_{x\in X}\{x\}$، نتیجه از بند (۱)، به‌دست می‌آید.

(۳): فرض کنیم G یک پالایه مشمول در F باشد. طبق بند (۲) از گزاره ۸.۴، داریم

$$\big(F:\mathscr{F}(G,X)\big)_\nu \subseteq (F:X)_\nu.$$

اکنون فرض کنیم $a \in (F{:}X)_\nu$. با توجه به بندهای (۱) و (۲) از گزاره ۴.۴، $G \cup X \subseteq (F{:}a)_\nu$. چون $(F{:}a)_\nu$، ν-پالایه است، بنابراین

$$\mathscr{F}^\nu(G,X) \subseteq (F{:}a)_\nu,$$

و لذا $a \in (F{:}\mathscr{F}^\nu(G,X))_\nu$.

(۴): با توجه به بند (۲) از نتیجه ۸.۲، بند (۳) از گزاره ۹.۴ و قرار دادن $G = 1$، اثبات به‌وضوح آشکار است.

به‌علاوه طبق بند (۶) از گزاره ۴.۴، داریم

$$(F{:}0)_\nu = \left(F{:}\mathscr{F}^\nu(0)\right)_\nu = (F{:}A)_\nu = F.$$

(۵): طبق بند (۳) از گزاره ۹.۴ و هم‌چنین بند (۵) از گزاره‌ی ۴.۴، نتیجه می‌شود.

(۶): با توجه به بند (۳) از گزاره ۹.۴ و هم‌چنین بند (۶) از گزاره ۴.۴، نتیجه می‌شود.

(۷): طبق بند (۱)، داریم

$$(F{:}X)_\nu = (F{:}(X-F) \cup (X \cap F))_\nu = (F{:}X-F) \cap (F{:}X \cap F).$$

با توجه به بند (۴) از گزاره ۴.۴، $(F{:}X \cap F)_\nu = A$. در نتیجه داریم $(F{:}X)_\nu = (F{:}X-F)_\nu$. ■

تعریف ۱۰.۴. فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت و F پالایه‌ای از $\mathfrak{A}_\nu$ باشد. پالایه G از مشبکه‌ی مانده‌ی $\mathfrak{A}$ را پالایه F-هم‌پوچ‌ساز $\mathfrak{A}$ نامیم، هرگاه وجود داشته باشد $X \subseteq A$ به‌طوری‌که $G = (F{:}X)_\nu$.

مجموعه‌ی پالایه‌های F-هم‌پوچ‌ساز از $\mathfrak{A}_\nu$ را با $\Gamma_F(\mathfrak{A}_\nu)$ نشان می‌دهیم. بدیهی است که $\Gamma_F(\mathfrak{A}_\nu) = \mathscr{C}_F^\nu(\mathcal{P}(A))$.

در گزاره بعدی نشان می‌دهیم که هم‌پوچ‌سازهای حالت توسعه‌یافته از یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت، تشکیل یک مشبکه‌ی کراندار کامل را می‌دهند.

گزاره ۱۱.۴. فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت و F پالایه‌ای از $\mathfrak{A}_\nu$ باشد. در این‌صورت

$$(\Gamma_F(\mathfrak{A}_\nu); \wedge^F, \vee^F, F, A),$$

یک مشبکه‌ی کامل کراندار است که عملگرهای $\wedge^F$ و $\vee^F$ برای هر خانواده‌ی $\{X_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(A)$، به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\wedge^F_{i\in I} (F{:}X_i)_\nu = (F{:}\cup_{i\in I} X_i)_\nu,$$

$$\vee^F_{i\in I} (F{:}X_i)_\nu = (F{:}(F{:}\cup_{i\in I} (F{:}X_i)_\nu)_\nu)_\nu.$$

اثبات. با توجه به نتیجه ۱۵.۲ و گزاره ۷.۴،

$$\left(\Gamma_F(\mathfrak{A}_\nu); \wedge^{\mathscr{C}_F^\nu}, \vee^{\mathscr{C}_F^\nu}, \mathscr{C}_F^\nu(A), \mathscr{C}_F^\nu(\emptyset)\right),$$

یک مشبکه‌ی کامل کراندار است. فرض کنیم $\{X_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های A باشد. با توجه به نتیجه ۱۵.۲ و بند (۱) از گزاره ۹.۴، داریم

$$\wedge_{i\in I}^{\mathscr{C}_F^\nu} (F: X_i)_\nu = \cap_{i\in I} (F: X_i)_\nu = (F: \cup_{i\in I} X_i)_\nu = \wedge_{i\in I}^{F} (F: X_i)_\nu,$$

$$\vee_{i\in I}^{\mathscr{C}_F^\nu} (F: X_i)_\nu = (F: \cap_{i\in I} (F: (F: X_i)_\nu)_\nu)_\nu = (F: (F: \cup_{i\in I} (F: X_i)_\nu)_\nu)_\nu = \vee_{i\in I}^{F} (F: X_i)_\nu.$$

هم‌چنین از بند (۴) گزاره ۴.۴، داریم

$$\mathscr{C}_F^\nu(\emptyset) = (F: \emptyset)_\nu = A,$$

اکنون با توجه به بند (۶) از گزاره ۴.۴، نتیجه می‌گیریم که

$$\mathscr{C}_F^\nu(A) = (F: A)_\nu = F. \quad \blacksquare$$

گزاره ۱۲.۴. فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت و F پالایه‌ای از $\mathfrak{A}_\nu$ باشد. در این‌صورت داریم

$$\Gamma_F(\mathfrak{A}_\nu) = \{(F: G)_\nu : G \in \mathscr{F}_F(\mathfrak{A}_\nu)\}.$$

اثبات. واضح است که

$$\{(F: G)_\nu : G \in \mathscr{F}_F(\mathfrak{A}_\nu)\} \subseteq \Gamma_F(\mathfrak{A}_\nu).$$

فرض کنیم برای $X \subseteq A$، $H = (F: X)_\nu$. بنابر بند (۳) از نتیجه ۸.۴، $H = (F: (F: H)_\nu)_\nu$. اکنون با توجه به گزاره ۳.۴ و بند (۲) از گزاره ۴.۴، داریم $(F: H) \in \mathscr{F}_F(\mathfrak{A}_\nu)$ که نشان می‌دهد

$$\Gamma_F(\mathfrak{A}_\nu) \subseteq \{(F: G)_\nu : G \in \mathscr{F}_F(\mathfrak{A}_\nu)\},$$

و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود. $\blacksquare$

نتیجه ۱۳.۴. فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت، F پالایه‌ای از $\mathfrak{A}_\nu$ و $\mathscr{H} \subseteq \Gamma_F(\mathfrak{A}_\nu)$ باشد. در این‌صورت روابط زیر برقرارند:

۱) $\cap \mathscr{H} = \wedge^F \mathcal{H}$؛

۲) $\underline{\vee}\, \mathcal{H} \subseteq \vee^F \mathcal{H} = (F: \cap_{H\in\mathcal{H}} (F: H)_\nu)_\nu$.

با تـوجه به قضیه گلیونکو-فرینک مرجع [۳۱]، اگر $\mathfrak{A} = (A;\wedge,*,0)$ یک نیم‌مــشبکه‌ی شبه‌مکمل باشد و

$$S(A) = \{a^* : a \in A\},$$

آن‌گاه $(S(A);\wedge,\curlyvee,*,0,1 = 0^*)$ یک جبر بولی است که برای هر $x,y \in S(A)$، $x \curlyvee y := (x^* \wedge y^*)^*$. هم‌چنین اگر $\mathfrak{A} = (A;\wedge,\vee,*,0)$ یک مشبکه‌ی شبه مکمل باشد، آن‌گاه برای هر $x,y \in A$، داریم

$$x^{**} \curlyvee y^{**} = (x \vee y)^{**}.$$

اکنون نتیجه زیر را داریم:

نتیجه ۱۴.۴. فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت و F پالایه‌ای از آن باشد. در این‌صورت

$$(\Gamma_F(\mathfrak{A}_\nu);\cap,\vee^F,(F:-),F,A),$$

یک جبر بولی کامل است.

اثبات. بنابر نتیجه ۶.۴، $(\mathscr{F}_F(\mathfrak{A}_\nu);\cap,\underline{\vee},(F:-),F,A)$ یک جبر هیتینگ است و به این ترتیب مشبکه‌ی شبه کامل می‌باشد. از این‌رو

$$(S(\mathscr{F}_F(\mathfrak{A}_\nu);\cap,\curlyvee,(F:-),F,(F:F) = A),$$

جبر بولی است. طبق گزاره ۱۲.۴، داریم

$$S\big(\mathscr{F}_F(\mathfrak{A})\big) = \Gamma_F(\mathfrak{A}_\nu).$$

لذا طبق نتیجه ۱۳.۴، $\curlyvee$ و $\vee^F$ بر هم منطبق می‌شوند. ■

نتیجه ۱۵.۴. فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت و F پالایه‌ای از آن باشد. در این‌صورت جبر هیتینگ $\mathscr{F}_F(\mathfrak{A}_\nu)$یک جبر بولی است، اگر و تنها اگر $\mathscr{F}_F(\mathfrak{A}) = \Gamma_F(\mathfrak{A}_\nu)$.

اثبات. فرض کنیم $\mathscr{F}_F(\mathfrak{A}_\nu)$ یک جبربولی باشد. در این‌صورت با توجه به بند (۲) از نتیجه ۶.۴، برای هر $G \in \mathscr{F}_F(\mathfrak{A}_\nu)$، $\big(F:(F:G)\big) = G$. به این ترتیب $G \in \Gamma_F(\mathfrak{A}_\nu)$. از طرفی، اگر $\mathscr{F}_F(\mathfrak{A}_\nu) = \Gamma_F(\mathfrak{A}_\nu)$، آن‌گاه بنابر نتیجه ۱۴.۴، $(\mathscr{F}_F(\mathfrak{A}_\nu);\cap,\vee^F,(F:-),F,A)$ یک جبر بولی است. برای هر $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{F}_F(\mathfrak{A})$، با توجه به نتیجه ۱۳.۴ داریم

$$\vee^F \mathscr{H} = \curlyvee \mathscr{H} = \Big(\mathrm{F}:\big(\mathrm{F}:\underline{\vee}\,\mathscr{H}\big)\Big) = \underline{\vee}\,\mathscr{H}.$$

از این‌رو $\underline{\vee}$ و $\vee^F$ بر هم منطبق هستند. ■

در گزاره بعدی، به مشخص کردن هم‌پوچ‌سازهای حالت توسعه‌یافته در پالایه‌های اول حالت و پالایه‌های اول کمینه حالت می‌پردازیم.

گزاره ۱۶.۴. فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ مشبکه‌ی مانده‌ی حالت و Γ مجموعه‌ی ν-پالایه‌های اول در $\mathfrak{A}_\nu$ باشد. در این‌صورت برای هر $X \subseteq A$ داریم

$$(\cap\, \Gamma : X)_\nu = \cap\, \{P \in \Gamma \ : X \nsubseteq P\}.$$

اثبات. قرار می‌دهیم

$$\Phi = \{P \in \Gamma : X \nsubseteq P\}.$$

اگر $\Phi = \emptyset$، آن‌گاه $\cap\, \Phi = A$. از طرف دیگر، با توجه به بند (۴) از گزاره ۴.۴، داریم $(\cap\, \Gamma : X) = A$. در غیر این‌صورت فرض کنیم $a \in (\cap\, \Gamma : X)$ و P را عضو دلخواهی از Φ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $x \in X - P$. به این ترتیب

$$\big(a \odot \nu(a)\big) \vee \big(x \odot \nu(x)\big) \in \cap\, \Gamma \subseteq P.$$

بنابراین $a \in P$ را نتیجه می‌گیریم و لذا $a \in \cap\, \Phi$.

برعکس، فرض کنیم $a \in \cap\, \Phi$ و $x \in X$. روشن است که برای هر $P \in \Phi$ و هر $P \in \Gamma - \Phi$، داریم

$$\big(a \odot \nu(a)\big) \vee \big(x \odot \nu(x)\big) \in P.$$

لذا $\big(a \odot \nu(a)\big) \vee \big(x \odot \nu(x)\big) \in \cap\, \Gamma$. از این‌رو $a \in (\cap\, \Gamma : X)$ و در نتیجه $\cap\, \Phi \subseteq (\cap\, \Gamma : X)$. ■

نتیجه ۱۷.۴. فرض کنید $\mathfrak{A}_\nu$ یک مشبکه‌ی مانده‌ی حالت باشد و $X \subseteq A$. برای هر $Y \subseteq A$، داریم

$$(\mathscr{F}^\nu(X) : Y)_\nu = \cap\, \{\mathfrak{m} \in Min_\nu(\mathfrak{A}_\nu) : X \subseteq \mathfrak{m}, Y \nsubseteq \mathfrak{m}\}.$$

در نتیجه بعدی، به بررسی هم‌پوچ‌سازهای حالت تعمیم‌یافته در پالایه‌های اول کمینه می‌پردازیم.

نتیجه ۱۸.۴. فرض کنید F یک ν-پالایه از $\mathfrak{A}_\nu$ باشد. برای هر $X \subseteq A$ داریم

$$(F : X)_\nu = \cap\, \{\mathfrak{m} \in Min_\nu(\mathfrak{A}_\nu) : F \subseteq \mathfrak{m}, \qquad X \nsubseteq \mathfrak{m}\}.$$

نتیجه ۱۹.۴. فرض کنید F یک ν-پالایه از $\mathfrak{A}_\nu$ باشد و $X \subseteq A$. اگر $(F : X)_\nu$پالایه اول حالت باشد، آن‌گاه $(F : X)_\nu$ یک پالایه اول کمینه F-حالت است.

اثبات. فرض کنیم $(F : X)_\nu$ یک پالایه اول باشد. با توجه به بندهای (۲) و (۴) از گزاره ۴.۴، $(F : X)_\nu$ یک پالایه اول F-حالت است که شامل X نمی‌باشد. اکنون با توجه به گزاره ۱۷.۴، حکم بدیهی است. ■

References

1. R. Balbes and P. Dwinger, Distributive lattices, Columbia, Missouri: University of Missouri Press. XIII, 1974.

2. W. J. Blok and D. Pigozzi, Algebraizable Logics, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 396, Amer. Math.Soc, Providence, 1989.

3. B. Bosbach, Residuationgroupoids, Result. Math. **5** (1982), 107-122.

4. M. Botur and A. Dvure_censkij, State-morphism algebras general approach, Fuzzy Sets Syst. **218** (2013), 90102.

5. L. C. Ciungu, Classes of residuated lattices, Annals of University of Craiova. Math. Comp. Sci. Ser. **33** (2006), 189-207.

6. L. C. Ciungu, Bosbach and Rie_can states on residuated lattices, Jour. Appl. Funct. Analy., **3** (2008), 175-188.

7. L. C. Ciungu, A. Dvure_censkij and M. Hy_cko, State BL-algebras, Soft Comput. **15** (2011), 619 -634.

8. N. M. Constantinescu, On pseudo-BL algebras with internal state, Soft Computing **16** (2012), 1915-1922.

9. N. M. Constantinescu, State filters on fuzzy structures with internal states, Soft Comput. **18** (2014), 1841-1852.

10. W. H. Cornish, Normal lattices, J. Austral. Math. Soc. **14**(2) (1972), 200- 215.

11. W. H. Cornish, Annulets and α-ideals in distributive lattices, J. Austral. Math. Soc. **15** (1973), 70-77.

12. R. P. Dilworth, Abstract residuation over lattices, Bull. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 262-268.

13. R. P. Dilworth, Non-commutative residuated lattices, Trans. Amer. Math. Soc. **46** (1939), 426-444.

14. A. Di Nola, G. Georgescu and A. Iorgulescu, Pseudo BL-algebras, Part I, Multiple Valued Logic, **8** (2002), 673-714.

15. A. Di Nola, G. Georgescu and A. Iorgulescu, Pseudo BL-algebras, Part II, Multiple Valued Logic, **8** (2002), 715-750.

16. A. Di Nola and A. Dvure_censkij, State-morphism MV-algebras, Ann. Pure Appl. Logic, **161** (2009), 161 - 173.

17. A. Di Nola and A. Dvure_censkij, On some classes of state morphism MV-algebras. Math Slovaca **59** (2009), 517-534.

18. A. Di Nola, A. Dvure_censkij and A. Lettieri, On varieties of MV-algebras with internal states, Int. J. Approx. Reason., **51** (2010), 680 - 694.

19. A. Dvure_censkij, States on pseudo MV-algebras, Studia Logica, **68** (2001), 301-327.

20. A. Dvurec_enskij and J. Rachu_nek, Probabilistic averaging in bounded commutativeresiduatedℓ-monoids, Discrete Math., **306** (2006), 1317-1326.

21. A. Dvurec_enskij and J. Rachu_nek, On Riec_an and Bosbach states for bounded non-commutative $R\ell$-monoids, Math. Slovaca, **56** (2006), 487-500.

22. A. Dvurec_enskij and J. Rachu_nek, Probabilistic averaging in bounded $R\ell$- monoids, Semigroup Forum, **72** (2006), 190-206.

23. A. Dvure_censkij, T. Kowalski and F. Montagna, State morphism MV-algebras, Int. J. Approx. Reason. **52** (2011), 1215 - 1228.

24. A. Dvurec_enskij, J. Rachu_nek and D. Salounova, State operators on general- izations of fuzzy structures, Fuzzy Sets and Systems **187** (2012), 58 - 76.

25. T. Flaminio and F. Montagna, An algebraic approach to states on MV-algebras. In: Nov_akV (ed) Fuzzy Logic 2, proceedings of the 5th EUSFLAT Conference September 1114, Ostrava, vol II, (2007) 201-206.

26. T. Flaminio and F. Montagna, MV-algebras with internal states and probabilistic fuzzy logic, International Journal of Approximate Reasoning, **50** (2009), 138 - 152.

27. A. Filipoiu, About Baer extensions of MV-algebras, Math. Japonica, **40** (2) (1994), 235-241.

28. N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski and H. Ono, Residuated lattices: an algebraic glimpse at sub-structural logics, studies in logic and the foundations of mathematics. Elsevier, Amsterdam, 2007.

29. G. Georgescu, Bosbach states on fuzzy structures, Soft Computing, **8** (2004), 217-230.

30. G. Gierz, K. Hofmann, K. Keimel, J. Lawson, M. Mislove and D. Scott, Continuous Lattices and domains. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

31. G. Gratzer, Lattice theory, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1979.

32. M. Haveshki and M. Mohamadhasani, Extended filters in bounded commutative $R\ell$-monoids, Soft Comput., **16** (2012), 2165-2173.

33. P. He, X. Xin and Y. Yang, On state residuated lattices, Soft Comput, **19** (2015), 2083-2094.

34. R. Hala_s, Annihilators in bck-algebras, Czechoslovak Mathematical Journal, **53** (128) (2003), 1001-1007.

35. U. Hohle, Commutative residuated monoids, in: U. Hohle, P. Klement (eds), Non-classical Logics and Their Aplications to Fuzzy Subsets, Kluwer Academic Publishers, 1995.

36. P. M. Idziak, Lattice operations in BCK-algebras, Mathematica Japonica, **29** (1984), 839-846.

37. A. Iorgulescu, Classes of pseudo-BCK algebras, part I. Multiple-Valued Logic Soft Comput. **12** (2006), 71-130.

38. P. Jipsen and C. Tsinakis, A survey of residuated lattices, In: Ordered Algebraic Structures, (J.Martinez, ed) Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002, 19-56.

39. W. Krull, Axiomatische Begrundung der all gemeinen Ideal theorie, Sitzungsberichteder Physikalisch Medizinischen Societatder Erlangen, **56** (1924), 47-63.

40. M. Kondo and W. A. Dudek, Filter theory of BL-algebras, Soft. Comput. **12** (2008), 419-423.

41. M. Kondo, Characterization of extended filters in residuated lattices. Soft Comput **18** (2014), 427-432.

42. M. Kondo, Generalized state operators on residuated lattices, Soft Computing (2016) 1-9.

43. M. Kondo and M. F. Kawaguchi, Some properties of generalized state operators on Residuated lattices, 2016 IEEE 46th International Symposium on Multiple-Valued Logic, 162-166.

44. F. Kopka, F. Chovanec and D-Posets, Math.Slovaca, **44** (1994). 21-34.

45. T. Kowalski and H. Ono, Residuated lattices: an algebraic glimpse at logics without contraction, Japan Advanced Institute of Science and Technology, 2001.

46. J. Kuhr, Pseudo BL-algebras and DR-monoids, Math. Bohemica, **128** (2003), 199-208.

47. J. Kuhr and D. Mundici, De Finetti theorem and Borel states in $[0,1]$-valued algebraic logic, International Journal of Approximate Reasoning, **46** (2007), 605-616.

48. J. Kuhr, Pseudo BL-algebras and $DR\ell$-monoids, Mathematica Bohemica, **128**(2) (2003), 199-208.

49. L. Leustean, Baer extensions of BL-algebras, Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing, **12** No. 3-4 (2006), 321-336.

50. L. Lianzhen and L. Kaitai, Boolean filters and positive implicative filters of residuated lattices, Information Sciences, **177** (2007), 5725-5738.

51. M. Mandelker, Relative annihilators in lattices, Duke Math. J. **37** (1970), 377-386.

52. D. Mundici, Averaging the truth value in Lukasiewicz sentential logic, Studia Logica, **55** (1995) 113-127.

53. M. Okada and K. Terui, The finite model property for various fragments of intuitionistic linear logic, Journal of Symbolic Logic, **64** (1999), 790-802.

54. H. Ono, Substructural logics and residuated lattices-an introduction, 50 Years of StudiaLogica, Trednds in Logic, Kluwer Academic Publisher, **21** (2003), 193-228.

55. J. Pavelka, On fuzzy logic II. Enriched residuated lattices and semantics of propositional calculi, Zeitschrift fur mathematischeLogik und Grundlagen der Mathematik, **25** (1979), 119-134.

56. D. Piciu, Algebras of Fuzzy Logic, Ed. Universitaria, Craiova, 2007.

57. J.Rachunek and D. Salounova, Filter Theory of Bounded Residuated Lattice Ordered Monoids, Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing, **16** (2010), 449-465.

58. S. Rasouli and A. Radfar, PMTL filters, Rl filters and PBL filters in Residuated lattices, Journal of Multiple Valued Logic and Soft Computing **29**(6) (2017), 551-576.

59. S. Rasouli and Z. Zarin, On residuated lattices with left and right internal state, Fuzzy Sets and Systems, **373** (2019), 37-61.

60. S. Rasouli, Generalized co-annihilators in residuated lattices, Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series, **45** (2018), 190-207.

61. S. Rasouli and A. Dehghani, The hull-kernel topology on prime filters in residuated lattices, Soft Computing, **25**(16) (2021), 10519-10541.

62. S. Rasouli, Rickart residuated lattices, Soft Computing **25**(22) (2021), 13823-13840.

63. S. Rasouli and A. Dehghani, On Gelfand residuated lattices, Soft Computing **27**(5) (2023), 2147-2158.

64. S. Rasouli, Generalized stone residuated lattices, Algebraic Structures and Their Applications **8**(1) (2021), 75-87.

65. S. Rasouli, Quasi-complemented residuated lattices, Soft Computing, **24**(9) (2020), 6591- 6602.

66. S. Rasouli, Galois connection of stabilizers in residuated lattices, Filomat **34**(4) (2020), 1223-1239.

67. S. Rasouli, The going-up and going-down theorems in residuated lattices, Soft Computing, **23**(17) (2019), 7621-7635.

68. B. Riecan, On the probability on BL-algebras, Acta. Math. (Nitra) **4** (2002), 313.

69. T. P. Speed, Some remarks on a class of distributive lattices, Jour. Aust. Math. Soc., **9** (1969), 289-296.

70. B. Stanely and H. P. Sankappanavar, A course in universal algebra, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1981.

71. M. Taheri, F. Khaksar Haghani and S. Rasouli. Simple, local and subdirectly irreducible state residuated lattices, Revista de la Unión Matemática Argentina, **62**(2) (2021), 365-383.

72. M. Taheri, F. Khaksar Haghani and S. Rasouli, Some classical theorems in state residuated lattices, Algebraic Structures and Their Applications, **8** (1) (2021), 99-116.

73. M. Ward and R. P. Dilworth, Residuated Lattices, Proceedings of the National Academy of Sciences, **24** (1938), 162-164.