

Application of Piecewise-Collocation Method for Solving a Heat Equation with Temperature-Boundary Specification

Saeed Pishbin¹ , Parviz Darania^{*2}  

1. Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Urmia University, Urmia, P. O. Box 165, Iran.. E-mail: s.pishbin@urmia.ac.ir

2. Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Urmia University, Urmia, P. O. Box 165, Iran.  E-mail: p.darania@urmia.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:

Received: 20 June 2021
Received in revised form:
22 August 2021
Accepted:
28 September 2021
Published online: 3 December 2023

Keywords:

Heat equation,
Integral equations
with weakly
singular kernel,
Piecewise
polynomial
collocation
method.

ABSTRACT

Introduction

There are many initial boundary value problems for which the domain varies with time. For example, when a conductor melts and the liquid is drained away and the solidification temperature is reached, the temperature remains fixed for some time due to latent heat. After no more latent heat is available the solid continues to cool in regular manner. The heat conduction problem within the remaining solid involves the heat equation in a domain that is physically changing with time [2]. This physical change can be represented by the following heat equation with initial and temperature-boundary specification:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & s_1(t) < x < s_2(t), \\ u(x, 0) = f(x), & a < x < b, \\ u(s_1(t), t) = g(t), & 0 < t \leq T, \\ u(s_2(t), t) = h(t), & 0 < t \leq T, \\ s_1(0) = a, \\ s_2(0) = b, \end{cases} \quad (1)$$

Using Laplace transforms [2], the initial-boundary value problem (1) can be transformed into the following system of Volterra integral equations with weakly singular kernels:

$$\begin{cases} g(t) = v(s_1(t), t) + \frac{1}{2} \phi_1(t) + \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(s_1(t) - s_1(\theta), t - \theta) \phi_1(\theta) d\theta \\ \quad + \int_0^t K(s_1(t) - s_2(\theta), t - \theta) \phi_2(\theta) d\theta, \\ h(t) = v(s_2(t), t) + \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(s_2(t) - s_1(\theta), t - \theta) \phi_1(\theta) d\theta \\ \quad + \int_0^t K(s_2(t) - s_2(\theta), t - \theta) \phi_2(\theta) d\theta, \end{cases}$$

where

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad v(x, t) = \int_a^b K(x - \varepsilon, t) f(\varepsilon) d\varepsilon.$$

The solution of the problem (1) can be obtained through

$$u(x, t) = v(x, t) + \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x - s_1(\vartheta), t - \vartheta) \phi_1(\vartheta) d\vartheta + \int_0^t K(x - s_2(\vartheta), t - \vartheta) \phi_2(\vartheta) d\vartheta, \quad (3)$$

Note that system (2) is a coupled system of Volterra integral equations of the first and second kind which is called integral algebraic equation (**IAEs**) with weakly singular kernels. Some authors have investigated weakly singular IAEs theoretically and numerically (for further details see [1,4,6]).

Stability of the mixed Volterra system

In this section, for investigating the stability issue of the system (2), we introduce the index as a measure of the sensitivity of the solutions to perturbations in the equations. This index which will be called the perturbation index, is a main factor in the numerical solution of **IAEs** as well as **DAEs** (see, e.g [5]) and play key roll in determining the impact of roundoff errors.

Now, we considering the perturbed system of (2) as

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\phi}_1(t) = 2(g(t) - v(s_1(t), t)) - 2 \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(s_1(t) - s_1(\vartheta), t - \vartheta) \hat{\phi}_1(\vartheta) d\vartheta \\ \quad - 2 \int_0^t K(s_1(t) - s_2(\vartheta), t - \vartheta) \hat{\phi}_2(\vartheta) d\vartheta + \delta_1(t), \\ \\ 0 = -h(t) + v(s_2(t), t) + \\ \quad \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(s_2(t) - s_1(\vartheta), t - \vartheta) \hat{\phi}_1(\vartheta) d\vartheta \\ \quad + \int_0^t K(s_2(t) - s_2(\vartheta), t - \vartheta) \hat{\phi}_2(\vartheta) d\vartheta + \delta_2(t), \end{array} \right.$$

using some theorems about the classical theory of Volterra integral equations with weakly singular kernels and the generalization of Gronwall's inequality yield

$$\begin{aligned} \|\hat{X}(t) - X(t)\|_{L^\infty} &\leq C \|D\|_{L^\infty} \\ &\leq C (\|\delta_1(t)\|_{L^\infty} + \|\delta'_2(t)\|_{L^\infty}), \end{aligned} \quad (5)$$

where C is a constant and

$$X(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix}, \quad \hat{X}(t) = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1(t) \\ \hat{\phi}_2(t) \end{pmatrix}.$$

Similarly to the definition of the perturbation index for **DAEs** (see, Definition 1.1 from [5]) and equation (5), we can conclude that the perturbation index of the mixed system (IAEs) (2) is one.

Discontinuous piecewise collocation method

The main purpose of this section is to provide a numerical approach for system (2) based on a spectral approach. We apply the following coordinate and variable transformations to change the system (2) into a new mixed system defined on the standard interval [-1, 1] which the solution of the

new system possesses better regularity. Without loss of generality, we let $T=1$. Using

$$t = u^2, \quad u = \sqrt{t}, \quad \vartheta = s^2, \quad s = \sqrt{\vartheta},$$

and

$$\eta = 2s - 1, \quad -1 \leq \eta \leq \tau,$$

$$\tau = 2u - 1, \quad -1 \leq \tau \leq 1,$$

rewrite the weakly singular system (2) as follows:

$$A(\tau)\tilde{X}(\tau) = \tilde{G}(\tau) + \int_{-1}^{\tau} \rho_{\frac{1}{2}}(\tau - \eta)\tilde{K}(\tau, \eta)\tilde{X}(\eta)d\eta, \quad \tau \in [-1, 1], \quad (6)$$

where

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

is a singular matrix and

$$\tilde{G}(\tau) = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)^T, \quad \tilde{X}(\tau) = (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)^T, \quad \rho_{\frac{1}{2}}(\tau - \eta) = (\tau - \eta)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\tilde{K}(\tau, \eta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \tilde{K}_{11}\left(\frac{1}{2}(\tau+1), \frac{1}{2}(\eta+1)\right) & \tilde{K}_{12}\left(\frac{1}{2}(\tau+1), \frac{1}{2}(\eta+1)\right) \\ \tilde{K}_{21}\left(\frac{1}{2}(\tau+1), \frac{1}{2}(\eta+1)\right) & \tilde{K}_{22}\left(\frac{1}{2}(\tau+1), \frac{1}{2}(\eta+1)\right) \end{pmatrix}.$$

We consider the subdivision I_N of interval $[-1, 1]$ defined by $\tau_n = -1 + nh, (n = 0, \dots, N)$ where the stepsize is given by $h = \frac{2}{N}$. Let $c_k (k = 1, \dots, m)$ be the zeros of the ultraspherical polynomial P_m^β . We give the collocation points in each subinterval $\omega_n = [\tau_n, \tau_{n+1}]$ as follows

$$\tau_{n,k} = \frac{\tau_{n+1} + \tau_n}{2} + \frac{\tau_{n+1} - \tau_n}{2} c_k,$$

Since $\tilde{U} = \tilde{U}_n|_{\omega_n} \in \Pi_{m-1}$ (Π_{m-1} denotes the set of all real polynomials of degree not exceeding $m-1$), it holds for $v \in (-1, 1]$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_n\left(\frac{\tau_{n+1} + \tau_n}{2} + \frac{h}{2}v\right) &= \sum_{k=1}^m L_k(v)Y_{n,k}, & Y_{n,k} \\ &= \tilde{U}_n(\tau_{n,k}), & (7) \end{aligned}$$

where L_k are the interpolating Lagrange polynomial based on the points c_k . Substituting collocation points $\tau_{n,k}$ and (7) into (6), we obtain

$$\begin{aligned} & A(\tau_{n,k})Y_{n,k} \\ &= \tilde{G}(\tau_{n,k}) \\ &+ \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m \tilde{K}(\tau_{n,k}, \tau_{i,j}) \left(\int_{-1}^1 \rho_{\frac{1}{2}}\left(\tau_{n,k} - \left(\hat{\tau}_i + \frac{h}{2}v\right)\right) L_j(v) dv \right) Y_{i,j} + \\ & \frac{h}{2} \sum_{j=1}^m \tilde{K}(\tau_{n,k}, \tau_{n,j}) \left(\int_{-1}^{c_k} \rho_{\frac{1}{2}}\left(\tau_{n,k} - \left(\hat{\tau}_n + \frac{h}{2}v\right)\right) L_j(v) dv \right) Y_{n,j}, \quad (8) \end{aligned}$$

solving this algebraic system, approximate solution of system (6) is determined at the collocation points and also at the arbitrary points in the interval $[-1,1]$ by equation (7). For the mere purpose of checking the validity of the numerical procedure, we consider two specific problems with known exact solutions and compute the numerical results by Mathematica software.

How to cite: Pishbin, Saeed., Darania, Parviz., (2023). Application of Piecewise-Collocation Method for Solving a Heat Equation with Temperature-Boundary Specification. *Mathematical Researches*, 9 (2), 75 - 92.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

روش هم محلی تکه‌ای برای مطالعه جواب‌های عددی معادله گرما با شرایط مرزی ویژه

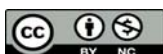
سعید پیش بین^۱، پرویز دارانیا^۲ ✉

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران. رایانامه: s.pishbin@urmia.ac.ir

۲. گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران. ✉ رایانامه: p.darania@urmia.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	در این مقاله برخی از نتایج عددی مربوط به معادله گرما که دامنه آن به‌طور فیزیکی با زمان تغییر می‌کند را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. ابتدا مسئله مقدارمرزی را با استفاده از تبدیلات لاپلاس به دستگاهی مرکب از معادلات انتگرالی نوع اول و دوم با هسته‌های منفرد ضعیف تبدیل خواهیم نمود و سپس با معرفی یک تقریب عددی مناسب بر اساس روش هم محلی تکه‌ای بر مبنای جمله‌ایهای متعامد ابرکروی، جواب‌های دستگاه مرکب حاصل را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. در دستگاه مرکب حاصل شده همواری هسته و توابع معلوم منجر به ناهمواری جواب معادله در نقطه ابتدای بازه انتگرال‌گیری می‌شود که برای فائق آمدن به این مشکل در استفاده از چند جمله‌ایهای متعامد ابرکروی، از تبدیلات مناسب استفاده می‌کنیم. با استفاده از مفهوم اندیس اختلال، پایداری دستگاه مرکب را مورد تحلیل و بررسی قراردادده و در نهایت کارایی روش عددی پیشنهاد شده با استفاده از چند مثال آزمون می‌شود.
واژه‌های کلیدی: معادله گرما، معادلات انتگرال منفرد ضعیف، روش هم محلی تکه‌ای.	

استناد: پیش بین، سعید؛ دارانیا، پرویز (۱۴۰۲). روش هم محلی تکه‌ای برای مطالعه جواب‌های عددی معادله گرما با شرایط مرزی ویژه. پژوهش‌های ریاضی، ۹ (۲)، ۷۵ - ۹۲.



۱. مقدمه

برخی مسائل مقدار مرزی دارای دامنه تعریف متغیر و وابسته به زمان می‌باشند. به عنوان مثال زمانی که ماده هادی (فلز یا هر آلیاژ دیگر) ذوب شده و مایع سرازیر می‌شود، دما به علت گرمای نهان ماده مذاباز لحظه شروع انجماد تا پایان آن، برای مدتی ثابت مانده و سپس کاهش می‌یابد. مدل ریاضی این نوع مسائل انتقال گرما به همراه فرایند تبدیل به حالت جامد، معادله گرمایی را شامل می‌شود که دامنه آن به‌طور فیزیکی با زمان تغییر می‌کند [4,15]. مدل ریاضی این تغییرات فیزیکی را می‌توان با استفاده از مسئله مقدار مرزی

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & s_1(t) < x < s_2(t), \\ u(x, 0) = f(x), & a < x < b, \\ u(s_1(t), t) = g(t), & 0 < t \leq T, \\ u(s_2(t), t) = h(t), & 0 < t \leq T, \\ s_1(0) = a, \\ s_2(0) = b, \end{cases} \quad (1)$$

بیان نمود به طوری که f, g, h توابع پیوسته‌ای می‌باشند. این دسته از مسائل می‌توانند مسائل استیفن یک فازی، دو فازی و سه فازی را شامل شوند [8,11]. با استفاده از تبدیل لاپلاس (صفحه ۷۹ [4]) مسئله مقدار مرزی (۱) می‌تواند به دستگاه معادله انتگرال زیر تبدیل شود:

$$\begin{cases} g(t) = v(s_1(t), t) + \frac{1}{2}\phi_1(t) + \\ \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(s_1(t) - s_1(\theta), t - \theta)\phi_1(\theta)d\theta \\ + \int_0^t K(s_1(t) - s_2(\theta), t - \theta)\phi_2(\theta)d\theta, \\ h(t) = v(s_2(t), t) + \\ \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(s_2(t) - s_1(\theta), t - \theta)\phi_1(\theta)d\theta \\ + \int_0^t K(s_2(t) - s_2(\theta), t - \theta)\phi_2(\theta)d\theta, \end{cases} \quad (2)$$

که در آن

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

$$v(x, t) = \int_a^b K(x - \varepsilon, t)f(\varepsilon)d\varepsilon.$$

مسئله (۱) دارای جوابی بفرم

$$u(x, t) = v(x, t) + \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x - s_1(\vartheta), t - \vartheta) \phi_1(\vartheta) d\vartheta + \int_0^t K(x - s_2(\vartheta), t - \vartheta) \phi_2(\vartheta) d\vartheta, \quad (3)$$

می باشد. لازم به یادآوری است که دستگاه (۲)، دستگاهی مرکب از معادلات انتگرال ولترای نوع اول و دوم با هسته منفرد ضعیف می باشد که به معادلات جبری-انتگرال (IAEs) با هسته منفرد ضعیف معروف است. وجود و یکتایی جواب دستگاههای مرکب منفرد ضعیف در [2] بررسی شده است. همچنین برانر در [1] حل پذیری و درجه همواری جواب این دستگاههای مرکب را با توجه به شرایط جواب معادلات انتگرال نوع اول و دوم مورد مطالعه قرار داده است. برای جزئیات بیشتر در مورد معادلات جبری-انتگرال می توان به منابع [3,6,9,13,14] مراجعه کرد. در این مقاله روش هم محلی تکه ای بر اساس چند جمله ایهای ابر کروی متعامد برای حل عددی دستگاه (۲) در نظر گرفته می شود. برای بدست آوردن درجه همواری بهتر جواب دستگاه، با استفاده از یک تبدیل مناسب دستگاه مورد نظر به یک دستگاه جدید با جواب هموارتر تبدیل می شود.

این مقاله به صورت زیر بخش بندی می شود: در بخش دو، پایداری دستگاه مرکب را با در نظر گرفتن تاثیر اختلال در معادلات مورد بررسی قرار می دهیم. در بخش سه، روش هم محلی تکه ای برای تقریب جواب در بازه $[-1,1]$ توسیع داده و نتایج عددی با ارایه برخی مثال ها را در بخش ۴ ارایه خواهیم داد.

۲. پایداری دستگاه ولترای مرکب

در این بخش مفهومی بنام اندیس، که نشانگر میزان حساسیت جواب های دستگاه (۲)، هنگام ایجاد اختلال در معادلات می باشد را برای آنالیز پایداری معرفی می نماییم. این نوع اندیس که به اندیس اختلال نیز معروف است یک عامل اساسی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل و جبری-انتگرال [7,10,11] بوده و نقشی اساسی در تاثیر خطای ناشی از گرد کردن ایفا می کند.

حال دستگاه اختلال یافته (۲) را به صورت

$$\begin{cases} \hat{\phi}_1(t) = 2(g(t) - v(s_1(t), t)) - 2 \\ \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(s_1(t) - s_1(\vartheta), t - \vartheta) \hat{\phi}_1(\vartheta) d\vartheta \\ - 2 \int_0^t K(s_1(t) - s_2(\vartheta), t - \vartheta) \hat{\phi}_2(\vartheta) d\vartheta + \delta_1(t), \\ 0 = -h(t) + v(s_2(t), t) + \\ \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(s_2(t) - s_1(\vartheta), t - \vartheta) \hat{\phi}_1(\vartheta) d\vartheta \\ + \int_0^t K(s_2(t) - s_2(\vartheta), t - \vartheta) \hat{\phi}_2(\vartheta) d\vartheta + \delta_2(t), \end{cases} \quad (4)$$

در نظر بگیرید. از طرفی دیگر، بنابه روابط

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{-x}{2t\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

و

$$e^{-\frac{x^2}{4t}} \leq \frac{4t}{x^2},$$

داریم

$$\frac{\partial K}{\partial x} \approx \frac{-1}{x\sqrt{\pi t}}. \quad (5)$$

با استفاده از رابطه (۵)، دستگاه (۴) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1(t) &= 2(g(t) - v(s_1(t), t)) + 2 \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\vartheta}} \frac{1}{(s_1(t) - s_1(\vartheta))\sqrt{\pi}} \hat{\phi}_1(\vartheta) d\vartheta \\ &\quad - \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\vartheta}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(s_1(t)-s_2(\vartheta))^2}{4(t-\vartheta)}} \hat{\phi}_2(\vartheta) d\vartheta + \delta_1(t), \\ 0 &= -h(t) + v(s_2(t), t) - \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\vartheta}} \frac{1}{(s_2(t) - s_1(\vartheta))\sqrt{\pi}} \hat{\phi}_1(\vartheta) d\vartheta \\ &\quad + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\vartheta}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{(s_1(t)-s_2(\vartheta))^2}{4(t-\vartheta)}} \hat{\phi}_2(\vartheta) d\vartheta + \delta_2(t), \end{aligned} \quad (6)$$

با توجه به اینکه هسته انتگرال معادله دوم در دستگاه (۶) کراندار نمی‌باشد لذا نمی‌توان از آن برای بدست آوردن یک معادله انتگرال با هسته کراندار، مشتق گرفت برای این منظور، ابتدا با ضرب طرفین معادله فوق در عامل

$$\frac{dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}},$$

و سپس انتگرال گیری از ۰ تا t (برای جزئیات بیشتر به قضایای کلاسیک معادلات ولترای منفرد ضعیف در صفحه ۳۳۵ مرجع [۱] مراجعه کنید) و انجام برخی محاسبات و ساده سازی آنها خواهیم داشت

$$0 = \int_0^t F_{21}(t, \vartheta) \hat{\phi}_1(\vartheta) + \int_0^t F_{22}(t, \vartheta) \hat{\phi}_2(\vartheta) d\vartheta + \Gamma_{\frac{1}{2}}(f_2 + \delta_2), \quad (7)$$

که در آن

$$F_{21}(t, \vartheta) = \int_0^1 \frac{\hat{K}_{21}(\vartheta + (t-\vartheta)u, \vartheta)}{\sqrt{u(1-u)}} du, \quad F_{22}(t, \vartheta) = \int_0^1 \frac{\hat{K}_{22}(\vartheta + (t-\vartheta)u, \vartheta)}{\sqrt{u(1-u)}} du,$$

و

$$\hat{K}_{21}(t, \vartheta) = \frac{-1}{(s_2(t) - s_1(\vartheta))\sqrt{\pi}}, \quad \hat{K}_{22}(t, \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{\frac{-(s_1(t)-s_2(\vartheta))^2}{4(t-\vartheta)}},$$

$$f_2 = -h(t) + v(s_2(t), t),$$

$$\Gamma_{\frac{1}{2}}(f_2 + \delta_2) = \int_0^t (t - \vartheta)^{\frac{-1}{2}} (f_2(\vartheta) + \delta_2(\vartheta)) d\vartheta. \quad (8)$$

حال با مشتق گیری از معادله (۷) نسبت به t داریم

$$0 = F_{21}(t, t)\hat{\Phi}_1(t) + F_{22}(t, t)\hat{\Phi}_2(t) + \int_0^t \frac{\partial F_{21}(t, \vartheta)}{\partial t} \hat{\Phi}_1(\vartheta) d\vartheta + \int_0^t \frac{\partial F_{22}(t, \vartheta)}{\partial t} \hat{\Phi}_2(\vartheta) d\vartheta$$

$$+ \Gamma'_{\frac{1}{2}}(f_2 + \delta_2), \quad (9)$$

به طوری که

$$F_{2j} = \frac{1}{\pi} \hat{K}_{21}(t, t), \quad j = 1, 2.$$

با استفاده از انتگرال گیری جز به جز داریم

$$\Gamma'_{\frac{1}{2}}(f_2 + \delta_2) = t^{\frac{-1}{2}}(f_2(0) + \delta_2(0)) + \int_0^t (t - \vartheta)^{\frac{-1}{2}} (f'_2(\vartheta) + \delta'_2(\vartheta)) d\vartheta.$$

حال با جایگذاری $\hat{\Phi}_1(t)$ از معادله اول دستگاه اختلال یافته (۶) در معادله (۸) به رابطه

$$\hat{\Phi}_2(t) = \frac{-1}{F_{22}(t, t)} \left(\int_0^t \left((t - \vartheta)^{\frac{-1}{2}} \hat{K}_{11}(t, \vartheta) F_{21}(t, t) + \frac{\partial F_{21}(t, \vartheta)}{\partial t} \right) \hat{\Phi}_1(\vartheta) d\vartheta + \int_0^t \left((t - \vartheta)^{\frac{-1}{2}} \hat{K}_{12}(t, \vartheta) F_{21}(t, t) + \frac{\partial F_{22}(t, \vartheta)}{\partial t} \right) \hat{\Phi}_2(\vartheta) d\vartheta \right.$$

$$\left. + F_{21}(t, t)(f_1(t) + \delta_1(t)) + \Gamma'_{\frac{1}{2}}(f_2 + \delta_2) \right) \quad (10)$$

می رسمیم که در آن

$$\hat{K}_{11}(t, \vartheta) = \frac{2}{(s_2(t) - s_1(\vartheta))\sqrt{\pi}}, \quad \hat{K}_{22}(t, \vartheta) = \frac{-1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{-(s_1(t)-s_2(\vartheta))^2}{4(t-\vartheta)}},$$

$$f_1 = 2(g(t) - v(s_1(t), t)).$$

فرم ماتریسی معادله (۱۰) و معادله اول دستگاه (۶) را به صورت زیر باز نویسی می کنیم

$$\hat{X}(t) = \int_0^t (t - \vartheta)^{\frac{-1}{2}} K(t, \vartheta) \hat{X}(\vartheta) d\vartheta + G(t), \quad (11)$$

که در آن

$$K(t, \vartheta) = \begin{pmatrix} \hat{K}_{11}(t, \vartheta) & \hat{K}_{12}(t, \vartheta) \\ \frac{\hat{K}_{11}(t, \vartheta)F_{21}(t, t) + (t-\vartheta)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial F_{21}(t, \vartheta)}{\partial t}}{-F_{22}(t, t)} & \frac{\hat{K}_{12}(t, \vartheta)F_{21}(t, t) + (t-\vartheta)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial F_{22}(t, \vartheta)}{\partial t}}{-F_{22}(t, t)} \end{pmatrix},$$

۹

$$\hat{X}(t) = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1(t) \\ \hat{\phi}_2(t) \end{pmatrix}, \quad G(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) + \delta_1(t) \\ \frac{-1}{F_{22}(t,t)} (F_{21}(t,t)(f_1(t) + \delta_1(t)) + \Gamma'_{\frac{1}{2}}(f_2 + \delta_2)) \end{pmatrix}.$$

برای دستگاه (۲) ابتدا فرایندی مشابه بالا در بدست آوردن نمایش ماتریسی (۱۱) را در نظر گرفته و سپس دستگاه حاصل را از دستگاه (۱۱) کم می کنیم لذا بعد از انجام محاسبات و ساده سازی آنها، خواهیم داشت

$$\hat{X}(t) - X(t) = \int_0^t (t - \vartheta)^{\frac{-1}{2}} K(t, \vartheta) (\hat{X}(\vartheta) - X(\vartheta)) d\vartheta + D(t), \quad (12)$$

به طوری که

$$\hat{X}(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix}, \quad D(t) = \begin{pmatrix} \delta_1(t) \\ \frac{-1}{F_{22}(t,t)} (F_{21}(t,t)(\delta_1(t)) + \Gamma'_{\frac{1}{2}}(\delta_2)) \end{pmatrix}.$$

حال نامساوی گرونوال تعمیم یافته [5] را برای بیان نتیجه این بخش می آوریم.

لم ۱. فرض کنید

$$\vartheta(t) \leq w_*(t) + w(t) \int_0^t \varphi(t, s) \vartheta(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

به طوری که توابع $\varphi w, \varphi w_*$ و $\varphi \vartheta$ به طور موضعی در بازه $[0, T]$ انتگرال پذیر و همه آنها نامنفی می باشند. آنگاه

$$\vartheta(t) \leq w_*(t) + w(t) \left(\exp \int_0^t \varphi(t, s) w(s) ds \right) \left(\int_0^t \varphi(t, s) w_*(s) ds \right).$$

بنابراین رابطه (۱۱) داریم

$$|\hat{X}(t) - X(t)| \leq \Lambda \int_0^t (t - \vartheta)^{\frac{-1}{2}} |\hat{X}(\vartheta) - X(\vartheta)| d\vartheta + |D(t)|, \quad (13)$$

بطوری که $\Lambda = \max_{0 \leq \vartheta \leq t \leq T} |K(t, \vartheta)|$ با استفاده از لم ۱ در نامساوی (۱۳) خواهیم داشت

$$|\hat{X}(t) - X(t)| \leq C \int_0^t (t - \vartheta)^{\frac{-1}{2}} |D(\vartheta)| d\vartheta + |D(t)|, \quad (14)$$

به طوری که C ثابت می باشد. حال با توجه به روابط (۱۲) و (۱۴) داریم

$$\|\hat{X}(t) - X(t)\|_{L^\infty} \leq C \|D\|_{L^\infty} \leq C (\|\delta_1(t)\|_{L^\infty} + \|\delta'_2(t)\|_{L^\infty}).$$

مشابه باتعریف اندیس اختلال مربوط به معادلات دیفرانسیل جبری (برای جزئیات به [7] مراجعه کنید) می توان نتیجه گرفت که که اندیس اختلال مربوط به دستگاه مرکب (۲) برابر یک است.

۳. روش هم محلی تکه‌ای بر اساس چند جمله‌ای‌های فرا کروی

در این بخش روش هم محلی تکه‌ای را بر اساس چند جمله‌ای‌های متعامد فرا کروی برای حل عددی دستگاه (۲) در نظر می‌گیریم.

همان طور که می‌دانیم دستگاه (۲) یک دستگاه مرکب از معادلات انتگرال نوع اول و دوم با هسته منفرد ضعیف می‌باشد به طوری که همواری هسته و توابع معلوم f_1, f_2 می‌توانند منجر به ناهمواری جواب معادله در نقطه ابتدای بازه انتگرال گیری شوند (برای جزئیات بیشتر به قضایای (۶,۱,۶)، (۶,۱,۴)، و (۸,۱,۸) از [1] مراجعه شود). برای فائق آمدن به این مشکل در استفاده از چند جمله‌ای‌های متعامد ابرکروی، ابتدا تبدیلات

$$t = u^2, \quad u = \sqrt{t}, \quad \vartheta = s^2, \quad s = \sqrt{\vartheta}, \quad (15)$$

را برای هموارسازی جواب دستگاه (۲) به کار می‌بریم. در این صورت با استفاده از این تبدیلات داریم:

$$\begin{cases} \check{\Phi}_1(u) = \check{f}_1(u) + \int_0^u (u-s)^{-\frac{1}{2}} (\check{K}_{11}(u,s)\check{\Phi}_1(s) + \check{K}_{12}(u,s)\check{\Phi}_2(s))ds, \\ 0 = \check{f}_1(u) + \int_0^u (u-s)^{-\frac{1}{2}} (\check{K}_{21}(u,s)\check{\Phi}_1(s) + \check{K}_{22}(u,s)\check{\Phi}_2(s))ds, \end{cases} \quad (16)$$

به طوری که

$$\check{\Phi}_i(u) = \Phi_i(u^2), \quad \check{f}_i(u) = f_i(u^2), \quad \check{K}_{ij}(u,s) = 2s(s+u)^{-\frac{1}{2}} \hat{K}_{ij}(u^2, s^2), \quad (i,j=1,2),$$

و $\hat{K}_{ij}$ و f_i در روابط (۸) و (۱۰) تعریف شده‌اند. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض می‌کنیم $T=1$ در این حالت با اعمال تغییر متغیر

$$\eta = 2s - 1, \quad -1 \leq \eta \leq \tau,$$

$$\tau = 2u - 1, \quad -1 \leq \tau \leq 1,$$

دستگاه (۱۶) را بعد از انجام محاسبات و ساده سازی آنها به صورت

$$A(\tau)\tilde{X}(\tau) = \tilde{G}(\tau) + \int_{-1}^{\tau} \rho_{\frac{1}{2}}(\tau-\eta)\tilde{K}(\tau,\eta)\tilde{X}(\eta)d\eta, \quad \tau \in [-1,1], \quad (17)$$

بازنویسی می‌کنیم که در آن

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{G}(\tau) = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)^T, \quad \tilde{X}(\tau) = (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)^T, \quad \rho_{\frac{1}{2}}(\tau-\eta) = (\tau-\eta)^{-\frac{1}{2}}$$

و

$$\tilde{K}(\tau,\eta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \check{K}_{11}\left(\frac{1}{2}(\tau+1), \frac{1}{2}(\eta+1)\right) & \check{K}_{12}\left(\frac{1}{2}(\tau+1), \frac{1}{2}(\eta+1)\right) \\ \check{K}_{21}\left(\frac{1}{2}(\tau+1), \frac{1}{2}(\eta+1)\right) & \check{K}_{22}\left(\frac{1}{2}(\tau+1), \frac{1}{2}(\eta+1)\right) \end{pmatrix}.$$

حال با تعریف افراز I_N برای بازه $[-1, 1]$ و نقاط گره‌ای $\tau_n = -1 + nh$, $(n = 0, \dots, N)$ با طول گام $h = \frac{2}{N}$ فرض کنیم c_k ($k = 1, \dots, m$) ریشه‌های چند جمله‌ای فرا کروی P_m^β باشند (چند جمله‌ایهای فرا کروی حالت خاصی از چند جمله‌ایهای ژاکوبی می‌باشند [12]). نقاط هم‌محلی را در هر زیر بازه $\omega_n = [\tau_n, \tau_{n+1}]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tau_{n,k} = \frac{\tau_{n+1} + \tau_n}{2} + \frac{\tau_{n+1} - \tau_n}{2} c_k,$$

فضای چند جمله‌ای تکه‌ای از درجه m با مرتبه پیوستگی d را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$S_{m+d}^d(I_N) = \{u \in C^d(I), u|_{\sigma_n} \in \Pi_{m+d}, \sigma_n = (t_n, t_{n+1}], 0 \leq n \leq N-1\},$$

که در آن Π_{m+d} مجموعه همه چند جمله‌ایهای حقیقی حداکثر از درجه $m+d$ می‌باشد. به ازای $d=-1$ فضای چند جمله‌ای‌های تکه‌ای $S_{m-1}^{-1}(I_N)$ ممکن است در نقاط داخلی $\tau_1, \dots, \tau_{N-1}$ از افراز I_N ناپیوسته باشد. حال برای تقریب جواب دقیق $\tilde{X}(\tau)$ با استفاده از $\tilde{U} \in S_{m-1}^{-1}(I_N)$ بایستی این تقریب به ازای نقاط هم‌محلی $\tau_{n,k}$ در معادله هم‌محلی

$$A(\tau)\tilde{U}(\tau) = \tilde{G}(\tau) + \int_{-1}^{\tau} \rho_{\frac{1}{2}}(\tau - \eta) \tilde{K}(\tau, \eta) \tilde{U}(\eta) d\eta, \quad \tau \in [-1, 1], \quad (18)$$

صدق نماید.

چون $\tilde{U}(\tau) = \tilde{U}_n(\tau)|_{\omega_n} \in \Pi_{m-1}$ لذا برای هر $v \in (-1, 1]$ داریم:

$$\tilde{U}_n\left(\frac{\tau_{n+1} + \tau_n}{2} + \frac{h}{2}v\right) = \sum_{k=1}^m L_k(v) Y_{n,k},$$

$$Y_{n,k} = \tilde{U}_n(\tau_{n,k}), \quad (19)$$

که در آن L_k چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ بر اساس نقاط c_k می‌باشد:

$$L_k(v) = \frac{P_m^\beta(v)}{(v - c_k) P_m^{\prime\beta}(v)}, \quad k = 1, \dots, m.$$

حال با جایگذاری نقاط $\tau_{n,k}$ و معادله (۱۹) در معادله (۱۸) داریم:

$$A(\tau_{n,k}) Y_{n,k} = \tilde{G}(\tau_{n,k}) + \int_{-1}^{\tau_{n,k}} \rho_{\frac{1}{2}}(\tau_{n,k} - \eta) \tilde{K}(\tau_{n,k}, \eta) \tilde{U}(\eta) d\eta. \quad (20)$$

با استفاده از تغییر متغیر $\frac{\eta - \hat{\tau}_i}{h} = \frac{\tau_{i+1} + \tau_i}{2}$ که $\frac{v}{2} = \frac{\eta - \hat{\tau}_i}{h}$ ($i = 0, \dots, n$) جمله انتگرالی موجود در معادله (۲۰) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
& \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{-1}^1 \rho_{\frac{1}{2}} \left(\tau_{n,k} - \left(\hat{\tau}_i + \frac{h}{2} v \right) \right) \tilde{K} \left(\tau_{n,k}, \left(\hat{\tau}_i + \frac{h}{2} v \right) \right) \tilde{U} \left(\left(\hat{\tau}_i + \frac{h}{2} v \right) \right) dv \\
& + \frac{h}{2} \int_{-1}^{c_k} \rho_{\frac{1}{2}} \left(\tau_{n,k} - \left(\hat{\tau}_n + \frac{h}{2} v \right) \right) \tilde{K} \left(\tau_{n,k}, \left(\hat{\tau}_n + \frac{h}{2} v \right) \right) \tilde{U} \left(\left(\hat{\tau}_n + \frac{h}{2} v \right) \right) dv.
\end{aligned} \quad (21)$$

با جایگذاری رابطه (۱۹) در معادله (۲۱) داریم:

$$\begin{aligned}
& \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m \left(\int_{-1}^1 \rho_{\frac{1}{2}} \left(\tau_{n,k} - \left(\hat{\tau}_i + \frac{h}{2} v \right) \right) \tilde{K} \left(\tau_{n,k}, \left(\hat{\tau}_i + \frac{h}{2} v \right) \right) L_j(v) dv \right) Y_{i,j} \\
& + \frac{h}{2} \sum_{j=1}^m \left(\int_{-1}^{c_k} \rho_{\frac{1}{2}} \left(\tau_{n,k} - \left(\hat{\tau}_n + \frac{h}{2} v \right) \right) \tilde{K} \left(\tau_{n,k}, \left(\hat{\tau}_n + \frac{h}{2} v \right) \right) L_j(v) dv \right) Y_{n,j}.
\end{aligned} \quad (22)$$

انتگرال‌های موجود در معادله (۲۲) همواره به‌طور تحلیلی قابل محاسبه نیستند، لذا برای محاسبه مقدار آنها، برخی جملات موجود در معادله (۲۲) را مشابه رابطه (۱۹) درونیابی می‌کنیم بنابراین خواهیم داشت

$$\tilde{K} \left(\tau_{n,k}, \left(\hat{\tau}_i + \frac{h}{2} v \right) \right) L_j(v) = \sum_{p=1}^m \tilde{K}(\tau_{n,k}, \tau_{i,p}) L_j(c_p) L_p(v), \quad (23)$$

به طوری که $L_j(c_p) = \begin{cases} 1 & j = p \\ 0 & j \neq p \end{cases}$ حال دستگاه (۲۰) را می‌توان با استفاده از روابط (۲۲) و (۲۳) به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned}
& A(\tau_{n,k}) Y_{n,k} \\
& = \tilde{G}(\tau_{n,k}) \\
& + \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m \tilde{K}(\tau_{n,k}, \tau_{i,j}) \left(\int_{-1}^1 \rho_{\frac{1}{2}} \left(\tau_{n,k} - \left(\hat{\tau}_i + \frac{h}{2} v \right) \right) L_j(v) dv \right) Y_{i,j} + \\
& \frac{h}{2} \sum_{j=1}^m \tilde{K}(\tau_{n,k}, \tau_{n,j}) \left(\int_{-1}^{c_k} \rho_{\frac{1}{2}} \left(\tau_{n,k} - \left(\hat{\tau}_n + \frac{h}{2} v \right) \right) L_j(v) dv \right) Y_{n,j},
\end{aligned} \quad (24)$$

در این صورت انتگرال‌های موجود در دستگاه (۲۴) را می‌توان به‌طور تحلیلی محاسبه نمود. لذا معادله (۲۴) یک دستگاه از معادلات خطی با بردارهای مجهول $Y_{n,k} (n = 0, \dots, N-1, k = 1, \dots, m)$ را نمایش می‌دهد. با حل این دستگاه، جواب تقریبی معادله (۱۸) در نقاط هم‌محلی و در هر نقطه دلخواه موجود در بازه $[-1, 1]$ توسط رابطه (۱۹) بدست می‌آید.

۴. نتایج عددی

در این بخش ضمن اعمال شرایط روی داده‌ها و توابع معلوم در معادله گرما، روش عددی توصیف شده در بخش قبل را برای حل این معادلات بکار می‌بریم. تمام محاسبات توسط نرم افزار ممتیکا انجام گرفته است.

مثال ۱. ابتدا معادله گرما (۱) را با شرایط

$$\begin{cases} s_1(t) = t - 6, & s_2(t) = t + 6 \\ f(x) = x^2, & T = 1, a = -6, b = 6, \\ g(t) = t^2 - 10t + 36, & h(t) = t^2 + 14t + 36. \end{cases}$$

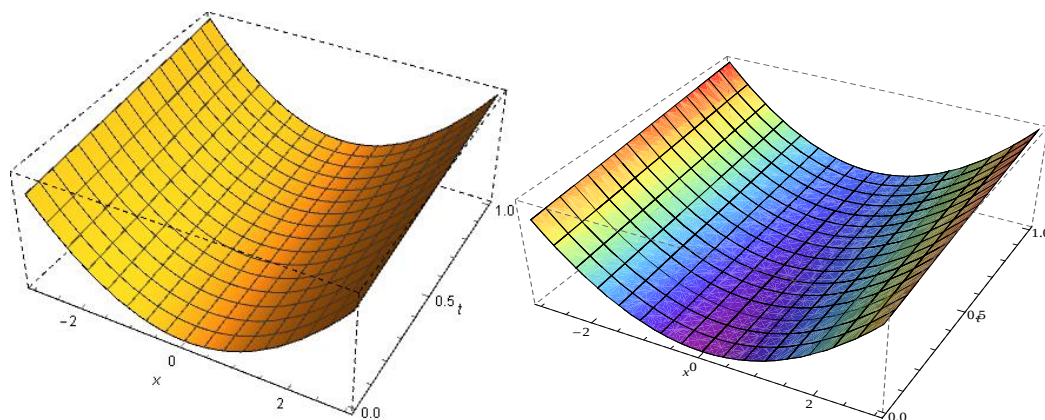
و با جواب دقیق $u(x, t) = x^2 + 2t$ در نظر بگیرید. دستگاه معادلات جبری - انتگرال معادل آن فرم

$$\begin{cases} \phi_1(t) = -2 \left(\int_{-6}^6 K(t-6-\varepsilon, t) \varepsilon^2 d\varepsilon - t^2 + 10t - 36 \right) \\ \quad - 2 \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(t-\vartheta, t-\vartheta) \phi_1(\vartheta) d\vartheta \\ \quad - 2 \int_0^t K(t-\vartheta-12, t-\vartheta) \phi_2(\vartheta) d\vartheta, \\ 0 = \left(\int_{-6}^6 K(t+6-\varepsilon, t) \varepsilon^2 d\varepsilon - t^2 - 14t - 36 \right) \\ \quad + \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(t-\vartheta+12, t-\vartheta) \phi_1(\vartheta) d\vartheta \\ \quad + \int_0^t K(t-\vartheta, t-\vartheta) \phi_2(\vartheta) d\vartheta, \end{cases} \quad (25)$$

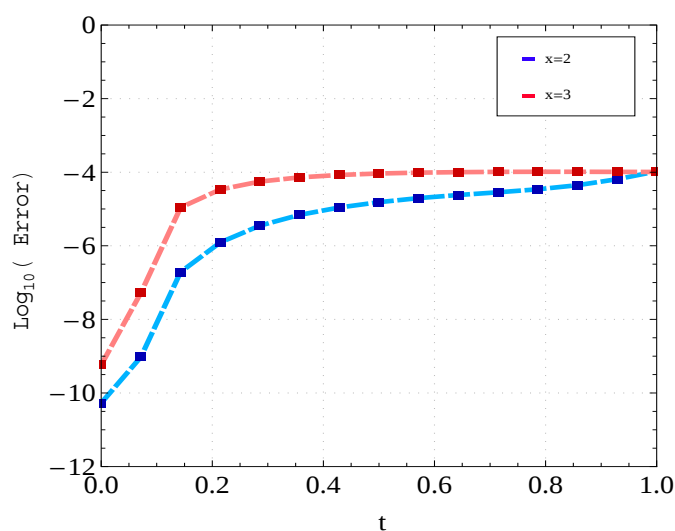
می باشد به طوری که K در رابطه (۲) تعریف شده است. با بکارگیری روش عددی پیشنهاد شده در بخش قبل جواب تقریبی دستگاه فوق به صورت (ϕ_{1N}, ϕ_{2N}) در می آید که با قرار دادن آن در رابطه (۳) جواب تقریبی $u(x, t)$ به صورت

$$\begin{aligned} u_N(x, t) = & \int_{-6}^6 K(t-\varepsilon, t) \varepsilon^2 d\varepsilon + \\ & \int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x-\vartheta+6, t-\vartheta) \phi_{1N}(\vartheta) d\vartheta + \\ & \int_0^t K(x-\vartheta+6, t-\vartheta) \phi_{2N}(\vartheta) d\vartheta, \end{aligned}$$

بدست می آید.



شکل ۱. شکل سمت راست جواب دقیق و شکل سمت چپ جواب تقریبی به ازای $N=32, m=4$ مثال ۱.



شکل ۲. تابع خطا برای مقادیر $N=16, m=3$ در $x=2,3$ در مثال ۱.

حداکثر خطا برای مقادیر مختلف m, N در نقاط گره ای و $x=2,3$ در جدول ۱ گزارش شده است. همچنین تابع خطا برای مقادیر $m=3$ و $N=16$ در نقاط گره ای به ازای $x=2,3$ در شکل ۲ رسم شده است.

مثال ۲. معادله گرما (۱) را با شرایط زیر در نظر بگیرید

$$\begin{cases} s_1(t) = t - 6, & s_2(t) = t + 6 \\ f(x) = \sin x, & T = 1, a = -6, b = 6, \\ g(t) = e^{-t} \sin(t - 6), & h(t) = e^{-t} \sin(t + 6). \end{cases}$$

به طوری که جواب دقیق معادله برابر $u(x, t) = e^{-t} \sin(x)$ می باشد.

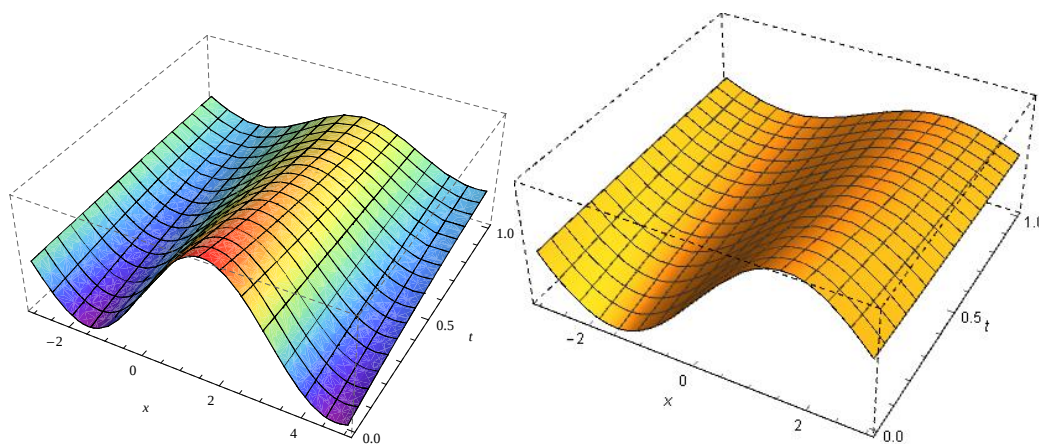
جدول ۲ حداکثر خطا را برای مقادیر مختلف m , N در نقاط گره ای و $x=2,3$ در جدول ۱ گزارش می دهد. همچنین تابع خطا برای $m=3$ و $N=16$ در نقاط گره ای به ازای $x=2,3$ در شکل ۴ رسم شده است. همانطور که در این دو شکل مشاهده می کنید، مقدار خطا برای t های نزدیک صفر، بهتر است. به عبارت دیگر هر چقدر مقدار t از صفر به سمت یک بیشتر می شود، خطای مورد نظر نیز افزایش می یابد که علت این امر می تواند از تقریب هسته در مسئله اصلی ناشی شود.

جدول ۱. ماکزیمم خطا برای مقادیر مختلف m , N در نقاط گره ای و $x=2,3$ در مثال ۲.

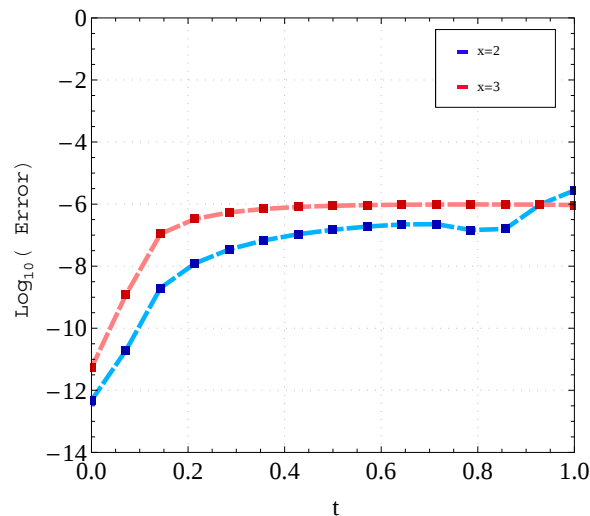
	$\ u - u_N\ _{\infty} \quad x = 2$			$\ u - u_N\ _{\infty} \quad x = 3$		
m	N=8	N=16	N=32	N=8	N=16	N=32
2	۳.۶۳E-۳	۹.۱۲E-۴	2.۵۶E-۴	1.۶۳E-۲	4.41E-3	1.14E-3
3	1.31E-3	3.45E-4	8.84E-5	6.34E-3	1.61E-3	4.07E-4
4	5.39E-4	1.52E-4	3.89E-5	2.72E-3	8.22E-4	1.81E-4

جدول ۲. ماکزیمم خطا برای مقادیر مختلف m , N در نقاط گره ای و $x=2,3$ در مثال ۲.

	$\ u - u_N\ _{\infty} \quad x = 2$			$\ u - u_N\ _{\infty} \quad x = 3$		
m	N=8	N=16	N=32	N=8	N=16	N=32
2	2.48E-5	7.13E-6	2.01E-6	1.28E-4	3.46E-5	8.92E-6
3	1.02E-5	2.67E-6	6.47E-6	4.92E-5	1.25E-5	3.16E-6
4	4.19E-6	1.19E-6	2.80E-7	2.11E-5	6.36E-6	1.42E-6



شکل ۳. شکل سمت راست جواب دقیق و شکل سمت چپ جواب تقریبی به ازای $N=32$, $m=4$ مثال ۲.



شکل ۴. تابع خطا برای مقادیر $m=3$, $N=16$ در $x=2,3$ در مثال ۲.

۵. نتیجه گیری

در این مقاله معادله گرما با دامنه تعریف متغیر مورد مطالعه قرار دادیم. ابتدا این مسئله مقدار مرزی به یک دستگاه مرکب از معادلات انتگرالی نوع اول و دوم تبدیل می شود به طوری که معادله حاصل یک معادله منفرد ضعیف بوده که در ابتداء بازه انتگرال گیری جواب این نوع معادلات ناهموار می باشند. این امر موجب کاهش دقت روش عددی پیشنهاد شده می شود که با معرفی و بکار گیری برخی از تبدیلات، این مشکل را حل نمودیم. همچنین پایداری دستگاه مرکب با استفاده از مفهوم اندیس اختلال به عنوان معیاری برای اندازگیری حساسیت جواب، نسبت به ایجاد اختلال در معادله، مورد بررسی قرار گرفته است.

References

1. H. Brunner, Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations, Cambridge University Press, (2004).
2. H. Brunner and M. V. Bulatov, On singular systems of integral equations with weakly singular kernels, Proceeding 11-th Baikal International school seminar, 4 (1998), 64-67.
3. M. V. Bulatov, P. M. Lima and E. Weinmuller, Existence and uniqueness of solutions to weakly singular integral-algebraic and integro-differential equations, Vienna Technical University, ASC Report No. 21, (2012).
4. R. J. Cannon, The One-Dimensional Heat Equation, Cambridge University Press, 1984.

5. Y. Chen and T. Tang, Convergence analysis of the Jacobi spectral collocation methods for Volterra integralequations with a weakly singular kernel, *Math. Comp.* **79** (2010), 147-167.
6. M. S. Farahani and M. Hadizadeh, Direct regularization for system of integral-algebraic equations of index-1. *Inverse Probl. Sci. Eng.* **26** (2018), 728–743.
7. C. W. Gear, Differential-algebraic equations, indices, and integral-algebraic equations, *SIAM. J.Numer. Anal.* **27** (1990), 1527-1534.
8. .L .NGoldman, *Inverse Stefan Problems Mathematics and It's Applications*, 412, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
9. M. Hadizadeh, F. Ghoreishi, and S. Pishbin, Jacobi spectral solution for integral-algebraic equations of index-2. *Appl. Numer. Math.* **61** (2011), 131–148.
10. .EHairer , CH. Lubich and M. Roche, *The numerical solution of differential-algebraic systems by Runge-Kutta methods*, Lecture Notes in Math. 1409, Springer-Verlag, 1989.
11. .EHairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Second Revised Edition, Springer-Verlag, 1996.
12. J. S. Hesthaven, S. Gottlieb and D. Gottlieb, *Spectral Methods for Time Dependent Problems*, Cambridge University Press, 2007.
13. S. Pishbin, F. Ghoreishi and M. Hadizadeh, A posteriori error estimation for the Legendre collocation method applied to integral-algebraic Volterra equations. *Electron. Trans. Numer. Anal.* **38** (2011), 327–346.
14. S. Pishbin, F. Ghoreishi and M. Hadizadeh, The semi-explicit Volterra integral algebraic equations with weakly singular kernels: the numerical treatments. *J. Comput. Appl. Math.* **245** (2013), 121–132.
15. M. Slodička and H. D. Schepper, Determination of the heat-transfer coefficient during solidification of alloys, *Comput. Methods Appl. Mech.Engrg.* **194** (2005), 491- 498.