



Kharazmi University

# Numerical solution of the fractional optimal control problems by using Genocchi hybrid functions fractional operators

Seyed Mehdi Shafiof <sup>1</sup>, Javad Askari <sup>2</sup>, Maryam Shams Solary <sup>3</sup>

1. Department of Mathematics, Payame Noor University, Tehran, Iran.

E-mail: [smshafiof@pnu.ac.ir](mailto:smshafiof@pnu.ac.ir)

2. Department of Electrical and Computer Engineering, Isfahan University of Technology, 8415683111, Isfahan, Iran.

✉E-mail: [j-askari@cc.iut.ac.ir](mailto:j-askari@cc.iut.ac.ir)

3. Department of Mathematics, Payame Noor University, Tehran, Iran.

E-mail: [shamssolary@pnu.ac.ir](mailto:shamssolary@pnu.ac.ir)

---

## Article Info

---

## ABSTRACT

---

### Article type:

Research Article

### Article history:

Received:

19 January 2021

Received in revised form:

27 May 2021

Accepted:

22 June 2021

Published online:

20 June 2023

### Keywords:

Fractional optimal control,  
Hybrid functions,  
Genocchi polynomials,  
fractional operators,  
Convergence analysis.

### Introduction

In this paper, the application of Genocchi hybrid functions in solving a class of fractional optimal control problems including the initial or boundary conditions of the state variable with different cases of fractional derivative order, is presented. For this purpose, first, the importance of fractional calculus, definitions, and required properties are stated. Then, hybrid functions containing a Combination of Genocchi polynomials with basis Block-pulse functions are introduced. Using the properties of these functions, the two Genocchi hybrid functions fractional operators, including the left Riemann-Liouville fractional integral operator and the left Caputo fractional derivative operator, have been calculated directly and without any approximation. In the following, the direct methods for solving the fractional optimal control problem are expressed. In these methods, calculating the control variable in terms of the state variable, estimating the state variable based on Genocchi hybrid functions, Riemann-Liouville fractional integral operator, and the Legendre-Gaussian formula are used to convert the fractional optimal control problem to the system of algebraic equations. From solving the resulted system, the unknown coefficients of the state variable and consequently the control variable are obtained. In addition, Caputo fractional derivative operator and Lagrange multipliers are used to solve the fractional optimal control problems, including the final fixed boundary points. The error bounds of the function approximation and the fractional operators are calculated. Also, the convergence analysis is presented. Finally, the efficiency and effectiveness of the proposed methods are illustrated by solving some numerical examples, and the obtained results are compared with those reported in related articles.

### Introduction

The various control theories with rich mathematical backgrounds have been widely used in different branches of science, such as spacecraft

---

---

systems, industrial production processes, rocket guidance, and medical applications. On the other hand, optimization is designed to make good use of available resources; therefore, the goal of optimal control is to determine the control signal that makes a process apply in some constraints and at the same time optimizes (minimum or maximum) a performance index. Since optimal control problems occur in many phenomena, it will be useful to use simple and efficient methods to solve such problems. In recent years, there has been significant growth in the expansion and application of fractional calculus. Indeed fractional-order calculus provides more accurate and better models for physical and engineering systems than integer-order calculus. For example, the wave diffusion equations, electrochemistry, gas diffusion process, heat transfer, biomechanics, and telecommunications represent some applications of fractional-order derivatives. Also, in 2020, with the onset of the coronavirus epidemic, for scientific investigation, issues related to the Covid virus 19; the role of using the mask in prevention, lockdown, and vaccination are modeled by fractional-order derivatives. An optimal control problem in which the performance index or differential equations within the constraint system, contain at least one sentence with a fractional-order derivative, is called the fractional optimal control problem. In general, numerical methods to solve optimal control problems are divided into two categories including indirect and direct methods. The indirect methods are based on finding a solution from the necessary optimality conditions, resulted from the calculus of variation and the Pontryagin's minimum principle. These methods lead to a two-point boundary value problem, which can be solved by the well-known numerical methods. Direct methods are according to the discretization of control or state variables and transforming the given problem into a nonlinear optimization problem. In this work, we combine Genocchi polynomials with Block-Pulse functions on the interval  $[0, 1]$ . Then, we use these basis functions for finding an approximate solution of the integer-fractional optimal control problems in the form of direct methods by using Genocchi hybrid functions fractional operators. The fractional optimal control problem in three different cases containing the fractional-order derivative and the initial or boundary conditions are discussed.

### **Material and methods**

In this paper, the exact formula for the Riemann-Liouville fractional integral operator and Caputo fractional derivative operator for the hybrid functions is derived by Laplace transform and fractional calculus properties. We consider three models of fractional optimal control problem due to the fractional derivative order and boundary conditions of the state variable. To solve this problem, in the first case, we approximate the fractional derivative of the state variable in terms of Genocchi hybrid functions. Then using the Riemann-Liouville fractional integral operator, we calculate the state variable and its derivatives with unknown coefficients based on Genocchi hybrid functions using the initial conditions of the problem and the properties of the fractional calculus. Next, we obtain the control variable in terms of the state variable and its derivatives from the constraint equation. By replacing the resulted approximations in the performance index, an unconstrained optimization problem is obtained. Finally, using the Legendre-Gaussian integration and applying the necessary optimality conditions, a system of algebraic equations is derived, from the solution of which unknown coefficients are obtained. In the second case, we approximate the integer derivative of the state variable in terms of Genocchi hybrid functions and repeat the other steps. For the third case, another direct method based on Caputo fractional derivative operator and Lagrange multipliers is introduced. Also, the error

---

---

estimates for the hybrid functions and fractional operators are obtained. The convergence of the direct method in solving the fractional optimal control problems is generally investigated.

### Results and discussion

We solve some test problems by using present methods to demonstrate the efficiency, accuracy and the simplicity of the proposed methods. The first example, which is an initial value problem, is solved by the Riemann-Liouville fractional integral operator method. In the second example, the problem involves a state variable with the initial and final boundary points, the Caputo fractional derivative operator method is used. In the third example, the Riemann-Liouville fractional integral operator method is used with initial state approximation.

Also, we compare our numerical results with shifted orthonormal Jacobi polynomials method, Homotopy perturbation method, Variational iteration method, direct method based on the Clenshaw-Curtis formula, Taylor polynomials method, spectral method based on the second kind Chebyshev polynomials, operational matrix based on Boubaker wavelet, Bernoulli hybrid functions. The comparison shows the more accuracy of proposed methods in comparison with mentioned methods.

### Conclusion

The following results are obtained from this research.

- Genocchi hybrid functions are simple basis functions to approximate the unknown functions. Also, hybrid functions are a powerful mathematical tool to obtain the numerical solution of various kinds of fractional optimal control problems.
- The main characteristic of proposed direct method is that it reduces fractional optimal control problems to a system of algebraic equations by using Genocchi hybrid functions fractional operators.
- We show that if the number of basis hybrid functions is increased, the approximation functions in this method are convergent.
- The obtained numerical results are compared with the exact solutions and some of the ones available to display the accuracy and proficiency of the proposed method. As can be seen, with a few numbers of the hybrid basis functions, satisfactory results are obtained.
- We present a new method to obtain the fractional operators for the hybrid of Genocchi polynomials and Block-Pulse functions directly and without any approximation. The accuracy of these operators is effective in increasing the accuracy of the proposed methods for solving fractional optimal control problems.

---

**How to cite:** Shafiof, S.M., Askari, J., Shams Solary, M. (2023). Numerical solution of the fractional optimal control problems by using Genocchi hybrid functions fractional operators. *Mathematical Researches*, 9 (1), 131-163.



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---



Kharazmi University

## حل عددی مسائل کنترل بهینه کسری با استفاده از عملگرهای کسری توابع ترکیبی گنوجی

سید مهدی شفیعی اف<sup>۱</sup>، جواد عسکری<sup>۲</sup>✉، مریم شمس سولاری<sup>۲</sup>

۱. گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. رایانامه: [smshafiof@pnu.ac.ir](mailto:smshafiof@pnu.ac.ir)

۲. نویسنده مسئول، دانشکده برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۸۴۱۵۶۸۳۱۱۱، اصفهان، ایران. رایانامه: [j-askari@cc.iut.ac.ir](mailto:j-askari@cc.iut.ac.ir)

۳. گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. رایانامه: [shamssolary@pnu.ac.ir](mailto:shamssolary@pnu.ac.ir)

### چکیده

### اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

در این مقاله، کاربرد توابع ترکیبی گنوجی در حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری با حالت‌های مختلف مرتبه مشتق کسری شامل شرایط اولیه یا مرزی متغیر وضعیت ارائه شده است. بدین منظور، در ابتدا اهمیت حسابان کسری، تعاریف و خواص مورد نیاز بیان می‌شود. سپس، توابع ترکیبی شامل چندجمله‌ای‌های گنوجی با توابع پایه‌ای بلاک پالس معرفی می‌گردد. با استفاده از خواص این توابع و بدون تقریب زدن، دو عملگر کسری توابع ترکیبی گنوجی شامل عملگر انتگرال کسری چپ ریمان-لیوویل و عملگر مشتق کسری چپ کاپوتو به صورت مستقیم محاسبه شده است. در ادامه، روش‌های حل مسأله کنترل بهینه کسری اختیار شده در قالب روش‌های مستقیم بیان می‌شود. در این روش‌ها با محاسبه متغیر کنترل برحسب متغیر وضعیت، تقریب متغیر وضعیت بر اساس توابع ترکیبی گنوجی، استفاده از عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل محاسبه شده و تقریب شاخص عملکرد با استفاده از فرمول لژاندر-گاوس، مسأله کنترل بهینه کسری به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌گردد. از حل دستگاه حاصل، ضرایب مجهول متغیر وضعیت و در نتیجه متغیر کنترل به دست می‌آیند. علاوه بر این، برای حل مسائل شامل نقطه‌ی مرزی نهایی ثابت، عملگر مشتق کسری کاپوتو و ضرب‌کننده‌های لاگرانژ به کار می‌روند. کران خطاهای تقریب تابع و عملگرهای کسری، محاسبه شده و آنالیز همگرایی ارائه می‌شود. در پایان، کارایی و مؤثر بودن روش‌های پیشنهادی با حل چند مثال عددی بیان و نتایج حاصله با نتایج گزارش شده در مقالات مرتبط مقایسه شده است.

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۰/۳۰

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۳/۰۶

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۴/۰۱

تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۰۳/۳۰

### واژه‌های کلیدی:

کنترل بهینه کسری، توابع ترکیبی، چندجمله‌ای‌های گنوجی، عملگرهای کسری، آنالیز همگرایی.

استناد: شفیعی اف، سیدمهدی؛ عسکری، جواد؛ شمس سولاری، مریم؛ (۱۴۰۲). حل عددی مسائل کنترل بهینه کسری با استفاده از عملگرهای کسری توابع ترکیبی گنوجی. پژوهش‌های ریاضی، ۹ (۱)، ۱۶۳-۱۳۱.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

## مقدمه

نظریه‌های مختلف کنترل با پیشینه‌ی غنی ریاضی، کاربرد وسیعی در شاخه‌های گوناگون علوم مانند سیستم‌های فضاپیما، فرایندهای تولید و صنعت، هدایت موشک و کاربردهای پزشکی داشته است. از طرف دیگر بهینه‌سازی به منظور استفاده مفید از منابع موجود طراحی شده است؛ لذا هدف کنترل بهینه، تعیین سیگنال کنترلی است که باعث شود یک فرایند در برخی محدودیت‌ها صدق کرده و در عین حال یک شاخص عملکرد، بهینه (حداقل یا حداکثر) شود. از آنجا که مسائل کنترل بهینه در بسیاری از پدیده‌ها ظاهر می‌شوند، بنابراین به کارگیری روش‌های ساده و کارآمد برای حل این گونه مسائل سودمند خواهد بود [۱]، [۲].

از سوی دیگر در سال‌های اخیر رشد قابل توجهی در گسترش و کاربرد حسابان کسری وجود داشته است. این رشد به دلیل این است که حسابان مرتبه کسری نسبت به حسابان مرتبه صحیح، مدل‌های دقیق‌تر و بهتری برای سیستم‌های فیزیکی و مهندسی ایجاد می‌کنند؛ به عنوان مثال معادلات پخش موج، الکتروشیمی، فرایند پخش گاز، انتقال گرما، بیومکانیک و مخابرات بیانگر برخی از کاربردهای مشتقات مرتبه کسری است [۳]، [۴]. همچنین، در سال ۲۰۲۰ با آغاز همه‌گیری ویروس کرونا، جهت بررسی علمی، مسائل مربوط به ویروس کووید ۱۹؛ مانند نحوه انتشار، نقش پوشیدن ماسک در پیشگیری، قرنطینه و واکسیناسیون به وسیله مشتقات مرتبه کسری مدل‌سازی شده‌اند [۵]–[۷].

تعاریف بسیاری در مورد مشتق و انتگرال مرتبه کسری ارائه شده است. در این خصوص، تعاریف ریمان-لیوویل<sup>۱</sup> و کاپوتو<sup>۲</sup> از کاربرد بیشتری برخوردارند [۸]. یک مسأله کنترل بهینه که شاخص عملکرد یا معادلات دیفرانسیل موجود در محدودیت‌های سیستم یا هر دو شامل حداقل یک جمله با مشتق مرتبه کسری باشد، مسأله کنترل بهینه کسری نامیده می‌شود. در حالت کلی روش‌های عددی برای حل مسائل کنترل بهینه به دو دسته‌ی روش‌های غیرمستقیم و روش‌های مستقیم تقسیم می‌شوند. اساس روش غیرمستقیم مبتنی بر یافتن جواب بر مبنای شرایط لازم بهینگی است که پس از تشکیل تابع همیلتونی، با استفاده از حساب تغییرات و اصل ماکسیمم پونتریاگین به دست می‌آیند. در روش مستقیم، ایده اصلی بر مبنای تقریب متغیرهای کنترل، وضعیت یا هر دو و تبدیل مسأله کنترل بهینه به یک مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی است [۹]، [۱۰].

توابع ترکیبی یک گزینه‌ی مناسب در تقریب توابع می‌باشد. این توابع از ترکیب توابع پایه‌ای قطعه‌ای ثابت؛ مانند توابع والش<sup>۳</sup>، توابع بلاک پالس<sup>۴</sup> و توابع پایه‌ای پیوسته؛ مانند چندجمله‌ای‌های لژاندر<sup>۵</sup>، چیبیشف<sup>۶</sup> حاصل می‌شوند. ایده استفاده از توابع ترکیبی به این صورت است که بازه‌ی مسأله را به تعدادی زیربازه تقسیم کرده و چندجمله‌ای‌ها را به هر کدام از زیربازه‌ها انتقال می‌دهیم. در زمینه‌ی ساخت و کاربرد توابع ترکیبی می‌توان به مراجع [۱۱]–[۱۴] اشاره کرد.

کاربرد چندجمله‌ای‌های گنوجی<sup>۷</sup> در تقریب توابع، موضوع نسبتاً جدیدی می‌باشد. برخی از ویژگی‌ها و مزیت‌های این چندجمله‌ای‌ها عبارتند از:

ضرایب چندجمله‌ای‌های گنوجی اعداد صحیح می‌باشند که در کاهش خطای محاسباتی تأثیرگذار است. تعداد جملات چندجمله‌ای‌های گنوجی نسبت به سایر چندجمله‌ای‌ها کمتر می‌باشد، به طوری که  $G_6(t)$  چهار جمله دارد در حالی که

<sup>۱</sup> Riemann-Liouville<sup>۲</sup> Caputo<sup>۳</sup> Walsh functions<sup>۴</sup> Block pulse functions<sup>۵</sup> Legendre polynomials<sup>۶</sup> Chebyshev polynomials<sup>۷</sup> Genocchi polynomials

چندجمله‌ای‌های برنولی<sup>۱</sup>  $\beta_6(t)$  پنج جمله دارد. همچنین چندجمله‌ای‌های چبیشف انتقال یافته  $T_6(t)$ ، چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته  $L_6(t)$  و چندجمله‌ای‌های لاگرانژ<sup>۲</sup>  $L_6(t)$  دارای هفت جمله می‌باشند که این روند صعودی با افزایش مرتبه چندجمله‌ای‌ها بیشتر می‌شود [۱۵]. همچنین خواص و روابط بین چندجمله‌ای‌های گنوجی به‌گونه‌ای است که محاسبه عملگرهای مشتق و انتگرال کسری توابع ترکیبی گنوجی را به‌صورت مستقیم و بدون تقریب میسر می‌سازد.

برای نخستین بار، اگر اوال با استفاده از حساب تغییرات کسری و روش ضرب‌کننده‌های لاگرانژ، فرمول‌بندی مسائل کنترل بهینه کسری را بر حسب مفهوم ریمان-لیوویل ارائه نمود که پیاده‌سازی شرایط لازم بهینگی در نهایت منجر به مسأله مقدار مرزی مرتبه کسری گشت [۱۶]. لطفی و همکارانش [۱۷] برای حل دسته‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری از طریق پایه‌های متعامد لژاندر، روش مستقیم عددی را ارائه دادند. نعمتی [۱۸] یک روش بر مبنای تقریب چندجمله‌ای‌های برنستاین و روش ریتز معرفی کرده است. در [۱۹] از ماتریس عملیاتی انتگرال کسری چندجمله‌ای‌های گنوجی استفاده شده است. در [۲۰]، روشی مبتنی بر توابع کلاهی بهبود یافته برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری ارائه شده است. ربیعی و همکارانش [۲۱] از توابع لژاندر کسری برای حل مسائل کنترل بهینه کسری با محدودیت دینامیکی شامل معادلات انتگرال-دیفرانسیل استفاده کرده‌اند. رخشان و عفتی [۲۲] روشی غیرمستقیم مبتنی بر معادلات اویلر-لاگرانژ برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری پیشنهاد کرده‌اند. مشایخی [۲۳] از توابع ترکیبی برنولی برای حل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری بهره گرفته که فقط برای مسائل دارای مقادیر اولیه به‌کار رفته است.

در این مقاله، مسأله کنترل بهینه کسری با شاخص عملکرد زیر را در نظر می‌گیریم [۲۴]:

$$\min J = \int_0^1 f(t, x(t), u(t)) dt, \quad (1)$$

محدودیت مسأله با معادله دیفرانسیل مرتبه صحیح-کسری زیر بیان می‌شود:

$$K_1 \dot{x}(t) + K_2 {}_0^C D_t^\alpha x(t) = g(t, x(t)) + b(t)u(t), \quad (2)$$

حالت‌های مختلف مرتبه مشتق کسری و شروط اولیه یا مرزی مسأله برابر است با:

• حالت اول:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad \text{و} \quad 1 < \alpha \leq 2. \quad (3)$$

• حالت دوم:

$$x(0) = x_0, \quad \text{و} \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (4)$$

• حالت سوم:

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1, \quad \text{و} \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (5)$$

که در آن توابع  $f(t, x(t), u(t))$ ،  $g(t, x(t))$  و  $b(t)$  هموار هستند. تابع  $b(t)$  مخالف صفر،  $K_1$  و  $K_2$  اعداد اسکالر و  $x_0$ ،  $\dot{x}_0$  و  $x_1$  مقادیر ثابت و معلوم می‌باشند. همچنین مشتق کسری از نوع کاپوتو است.

<sup>۱</sup> Bernoulli polynomials

<sup>۲</sup> Lgrange polynomials

برای حل این مسأله در حالت اول، در ابتدا مشتق کسری متغیر وضعیت را بر حسب توابع ترکیبی گنوجی تقریب می‌زنیم، سپس با استفاده از عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل، شرایط اولیه مسأله و خواص حسابان کسری، متغیر وضعیت و سایر مشتقات آن را بر مبنای توابع ترکیبی گنوجی با ضرایب مجهول محاسبه می‌کنیم. در ادامه، متغیر کنترل را بر حسب متغیر وضعیت و مشتقات آن، از معادله محدودیت سیستم به دست می‌آوریم. با جای گذاری تقریب‌های حاصله در شاخص عملکرد، یک مسأله بهینه‌سازی نامقید نتیجه می‌گردد. در پایان با استفاده از انتگرال گیری لژاندر-گاوس و اعمال شرایط لازم بهینگی، یک دستگاه معادلات جبری حاصل می‌شود که از حل آن ضرایب مجهول به دست می‌آیند. در حالت دوم، مشتق صحیح متغیر وضعیت را بر حسب توابع ترکیبی گنوجی تقریب زده و سایر مراحل را تکرار می‌کنیم. برای حالت سوم، روش مستقیم دیگری مبتنی بر عملگر مشتق کسری کاپوتو و ضرب‌کننده‌های لاگرانژ معرفی می‌شود. در مقایسه با مراجع مطرح شده، ویژگی‌های روش‌های پیشنهادی عبارتند از: در حالت‌های مختلف مرتبه کسری مشتق و شرایط اولیه و نهایی متغیر وضعیت کاربرد دارند؛ عملگرهای مشتق و انتگرال کسری توابع ترکیبی اختیار شده به صورت مستقیم و بدون تقریب محاسبه می‌شوند؛ با به کارگیری تعداد اندکی از توابع ترکیبی، جواب‌های به دست آمده از دقت مناسبی برخوردار هستند.

این مقاله بدین صورت سازمان یافته است: در بخش اول تعاریف و روابط مقدماتی مورد نیاز بیان می‌گردد. عملگرهای انتگرال کسری ریمان-لیوویل و مشتق کسری کاپوتو توابع ترکیبی گنوجی در بخش دوم محاسبه می‌شوند. در بخش سوم روش‌های عددی حل مسائل کنترل بهینه کسری معرفی می‌شود. کران خطاهای تقریب تابع و عملگرهای کسری محاسبه شده و آنالیز همگرایی حل مسأله در بخش چهارم ارائه می‌گردد. در بخش پنجم تعدادی مثال جهت نشان دادن دقت و مؤثر بودن روش‌های معرفی شده، حل شده است. در پایان، خلاصه‌ی مباحث و نتیجه‌گیری مطرح می‌شود.

## تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این بخش، برخی از تعاریف مشتق و انتگرال مرتبه کسری و روابط مورد نیاز ارائه می‌گردد. فرض می‌کنیم  $f: [a, b] \rightarrow R$  یک تابع،  $\alpha > 0$  مرتبه مشتق و انتگرال کسری و  $m = [\alpha] + 1$  که  $[\ ]$  نمایشگر جزء صحیح می‌باشد. همچنین  $\Gamma(\alpha)$  تابع گاما است.

**تعریف ۱.** انتگرال کسری چپ ریمان-لیوویل از مرتبه  $\alpha$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۵]:

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (۶)$$

**تعریف ۲.** مشتق کسری چپ کاپوتو از مرتبه  $\alpha$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۵]:

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau. \quad (۷)$$

برخی از خواص انتگرال کسری ریمان-لیوویل و مشتق کسری کاپوتو عبارتند از [۸]، [۲۵] و [۲۶]:

$${}_a^C D_t^\alpha {}_a^I_t^\alpha f(t) = f(t). \quad (۸)$$

(۹)

$${}_a^I_t^\alpha {}_a^C D_t^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) \frac{(t-a)^i}{i!}.$$

$${}_0^C D_t^\alpha t^r = \begin{cases} 0, & r \in N_0, r < m, N_0 = N \cup \{0\}, \\ \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1-\alpha)} t^{r-\alpha}, & r \in N_0, r \geq m \text{ یا } r \notin N, r > m. \end{cases} \quad (۱۰)$$

$${}_a^C D_t^Z f(t) = f^{(Z)}(t), \quad Z \in N_0. \quad (۱۱)$$

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^I_t^{m-\alpha} f^{(m)}(t). \quad (۱۲)$$

$${}_a^I_t^\alpha {}_a^I_t^\beta f(t) = {}_a^I_t^{\alpha+\beta} f(t). \quad (۱۳)$$

مشتق کاپوتو و انتگرال ریمان-لیوویل عملگرهای خطی هستند. همچنین مشتق کاپوتو عدد ثابت برابر صفر است [۲۶].  
تعریف ۳. تابع پله‌ای واحد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u_r(t) = \begin{cases} 1 & t \geq r, \\ 0 & t < r. \end{cases} \quad (۱۴)$$

قضیه ۱. قضیه دوم انتقال) اگر  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ، تبدیل لاپلاس تابع  $f(t)$  باشد، آن گاه:

$$\mathcal{L}\{u_r(t)f(t-r)\} = e^{-rs}\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

□

اثبات. [۲۷].

با استفاده از انتگرال تلفیقی<sup>۱</sup>، انتگرال ریمان-لیوویل و مشتق کاپوتو را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$${}_0^I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * f(t), \quad {}_0^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} t^{m-\alpha-1} * f^{(m)}(t). \quad (۱۵)$$

چندجمله‌ای‌های گنوجی

تعریف ۴. چندجمله‌ای‌های گنوجی  $G_n(x)$  به وسیله‌ی تابع مولد  $Q(x, t)$  به صورت [۱۹]، [۲۸]، [۲۹]:

$$Q(x, t) = \frac{2te^{xt}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \frac{t^n}{n!},$$

تعریف می‌شود که در آن

(۱۶)

<sup>۱</sup> Convolution integral

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g_{n-k} x^k,$$

از:  $g_k = 2\alpha_k - 2^{k+1}\alpha_k$  عدد گنوچی و  $\alpha_k$  عدد برنولی می‌باشند. برخی از خواص چندجمله‌ای‌های گنوچی عبارتند از:

$$\frac{d^k}{dt^k} G_n(x) = \frac{n!}{(n-k)!} G_{n-k}(x), \quad n > k. \quad (17)$$

$$G_n(1+x) = -G_n(x) + 2nx^{n-1}. \quad (18)$$

$$G_n(1-x) = (-1)^{n+1} G_n(x). \quad (19)$$

### ترکیب چندجمله‌ای‌های گنوچی و توابع بلاک پالس

توابع ترکیبی گنوچی  $q_{nm}(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $m = 1, \dots, M$  در بازه  $[0, 1]$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$q_{nm}(t) = \begin{cases} G_m(Nt - n + 1), & t \in \left[\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}\right), \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (20)$$

که  $m$  و  $n$  به ترتیب مرتبه چندجمله‌ای‌های گنوچی و توابع بلاک پالس می‌باشند.

### تقریب تابع با توابع ترکیبی گنوچی

فرض می‌کنیم  $H = L^2[0, 1]$  و  $\{q_{11}(t), q_{21}(t), \dots, q_{NM}(t)\} \subset H$  مجموعه‌ی توابع ترکیبی گنوچی باشد و

$$Y = \text{span}\{q_{11}(t), q_{21}(t), \dots, q_{N1}(t), q_{12}(t), \dots, q_{N2}(t), \dots, q_{1M}(t), \dots, q_{NM}(t)\},$$

$Y$  یک فضای برداری متناهی‌البعده و زیرفضای بسته‌ی فضای هیلبرت  $H$  می‌باشد، بنابراین یک زیرفضای کامل است؛ از این‌رو برای تابع دلخواه  $f$  در  $H$ ، یک بهترین تقریب منحصر به فرد روی فضای  $Y$ ، نظیر  $f_{NM} \in Y$  وجود دارد به طوری که [۳۰]:

$$\forall y \in Y, \|f - f_{NM}\| \leq \|f - y\|,$$

چون  $f_{NM} \in Y$  ضرایب یکتای  $d_{11}, d_{21}, \dots, d_{NM}$  وجود خواهند داشت که

$$f \simeq f_{NM} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M d_{nm} q_{nm}(t) = \Phi^T Q(t), \quad (21)$$

که در آن

$$\Phi^T = [d_{11}, d_{21}, \dots, d_{N1}, d_{12}, \dots, d_{N2}, \dots, d_{1M}, \dots, d_{NM}], \quad (22)$$

$$Q(t) = [q_{11}(t), q_{21}(t), \dots, q_{N1}(t), q_{12}(t), \dots, q_{N2}(t), \dots, q_{1M}(t), \dots, q_{NM}(t)]. \quad (23)$$

به ترتیب بیانگر بردار ضرایب و توابع ترکیبی گنوجی می‌باشند. ضرایب (۲۲) از رابطه

$$\Phi = \Psi^{-1}(f, Q), \Psi = \langle Q, Q \rangle$$

به دست می‌آیند که در آن  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  نشان دهنده ضرب درونی بر روی فضای  $H = L^2[0,1]$  می‌باشد.

### عملگرهای انتگرال کسری ریمان-لیوویل و مشتق کسری کاپوتو توابع ترکیبی

اولین گام در کاربرد روش‌های عددی ارائه شده در حل مسائل کنترل بهینه کسری، محاسبه عملگرهای انتگرال و مشتق کسری توابع ترکیبی می‌باشد. در بعضی از مقالات مانند [۳۱]، ابتدا ماتریس‌های عملیاتی مشتق و انتگرال کسری توابع بلاک پالس را محاسبه می‌کنند. سپس توابع ترکیبی را بر حسب توابع بلاک پالس دوباره تقریب می‌زنند. در نهایت با استفاده از این تقریب‌ها و ماتریس‌های عملیاتی مشتق و انتگرال کسری توابع بلاک پالس، ماتریس‌های عملیاتی مشتق و انتگرال کسری توابع ترکیبی را به صورت تقریبی به دست می‌آورند. با روش‌های پیشنهاد شده در بخش‌های آتی، عملگرهای انتگرال و مشتق کسری توابع ترکیبی به طور مستقیم و بدون هیچ تقریب و خطایی محاسبه می‌شوند.

### عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل توابع ترکیبی گنوجی

عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل توابع ترکیبی گنوجی را با  $J^\alpha$  نمایش می‌دهیم. توابع ترکیبی (۲۰) را با استفاده از تابع پله‌ای واحد (۱۴)، می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{aligned} q_{nm}(t) &= \left( u_{n-1}(t) - u_n(t) \right) G_m(Nt - n + 1) \\ &= u_{n-1}(t) G_m \left( N \left( t - \frac{n-1}{N} \right) \right) - u_n(t) G_m \left( 1 + N \left( t - \frac{n}{N} \right) \right), \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه ۱، توابع گنوجی (۱۶)، توابع ترکیبی گنوجی (۲۰) و خاصیت (۱۸)، تبدیل لاپلاس توابع ترکیبی گنوجی به صورت زیر به دست می‌آید:

(۲۴)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{q_{nm}(t)\} &= \mathcal{L} \left\{ u_{n-1}(t) G_m \left( N \left( t - \frac{n-1}{N} \right) \right) \right\} - \mathcal{L} \left\{ u_n(t) G_m \left( 1 + N \left( t - \frac{n}{N} \right) \right) \right\} \\ &= e^{-\frac{n-1}{N}s} \mathcal{L}\{G_m(Nt)\} - e^{-\frac{n}{N}s} \mathcal{L}\{G_m(1 + Nt)\} \\ &= e^{-\frac{n-1}{N}s} \mathcal{L}[G_m(Nt)] - e^{-\frac{n}{N}s} \mathcal{L}[-G_m(Nt) + 2mN^{m-1}t^{m-1}] \\ &= \left( e^{-\frac{n-1}{N}s} + e^{-\frac{n}{N}s} \right) \mathcal{L}[G_m(Nt)] - 2mN^{m-1}e^{-\frac{n}{N}s} \mathcal{L}[t^{m-1}] \\ &= \left( e^{-\frac{n-1}{N}s} + e^{-\frac{n}{N}s} \right) \mathcal{L} \left[ \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} g_{m-k} N^k t^k \right] - 2mN^{m-1}e^{-\frac{n}{N}s} \mathcal{L}[t^{m-1}] \end{aligned}$$

$$= \left( e^{-\frac{n-1}{N}s} + e^{-\frac{n}{N}s} \right) \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} g_{m-k} N^k \frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}} - 2mN^{m-1} e^{-\frac{n}{N}s} \frac{\Gamma(m)}{s^m}.$$

با استفاده از روابط (۱۵) و (۲۴)، تبدیل لاپلاس انتگرال کسری ریمان-لیوویل توابع ترکیبی گنوجی را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{J^\alpha(q_{nm}(t))\} &= \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * q_{nm}(t) \right\} = \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}\{q_{nm}(t)\} \\ &= \left( e^{-\frac{n-1}{N}s} + e^{-\frac{n}{N}s} \right) \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} g_{m-k} N^k \frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+\alpha+1}} - 2mN^{m-1} e^{-\frac{n}{N}s} \frac{\Gamma(m)}{s^{m+\alpha}}. \end{aligned}$$

با محاسبه وارون تبدیل لاپلاس معادله (۲۵)، داریم:

(۲۶)

$$\begin{aligned} J^\alpha(q_{nm}(t)) &= u_{\frac{n-1}{N}}(t) \left( \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} g_{m-k} N^k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \left(t - \frac{n-1}{N}\right)^{k+\alpha} \right) \\ &+ u_{\frac{n}{N}}(t) \left( \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} g_{m-k} N^k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \left(t - \frac{n}{N}\right)^{k+\alpha} - 2mN^{m-1} \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m+\alpha)} \left(t - \frac{n}{N}\right)^{m+\alpha-1} \right), \end{aligned}$$

با توجه به معادله (۲۶)، عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل توابع ترکیبی گنوجی به صورت

(۲۷)

$$J^\alpha(q_{nm}(t)) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \frac{n-1}{N}\right), \\ K_{nm}(t), & t \in \left[\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}\right), \\ K_{nm}(t) + H_{nm}(t), & t \in \left[\frac{n}{N}, 1\right), \end{cases}$$

قابل بیان هست که در آن:

$$\begin{aligned} K_{nm}(t) &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} g_{m-k} N^k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \left(t - \frac{n-1}{N}\right)^{k+\alpha}, \\ H_{nm}(t) &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} g_{m-k} N^k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \left(t - \frac{n}{N}\right)^{k+\alpha} - 2mN^{m-1} \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m+\alpha)} \left(t - \frac{n}{N}\right)^{m+\alpha-1}. \end{aligned}$$

### عملگر مشتق کسری کاپوتو توابع ترکیبی گنوجی

عملگر مشتق کسری کاپوتو توابع ترکیبی گنوجی را با  $D^\alpha$  نشان می‌دهیم. در گام نخست، قرار می‌دهیم:

$$t \in \left[ \frac{n-1}{N}, \frac{n}{N} \right) \text{ و } i = [\alpha] + 1$$

با استفاده از معادلات (۷)، (۱۵) و (۲۰)، مشتق کسری کاپوتو توابع ترکیبی گنوجی را بدین صورت می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha q_{nm}(t) &= D^\alpha q_{nm}(t) = \frac{1}{\Gamma(i-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{i-\alpha-1} q_{nm}^{(i)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(i-\alpha)} \int_0^t (\tau)^{i-\alpha-1} q_{nm}^{(i)}(t-\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(i-\alpha)} \int_0^{t-\frac{n-1}{N}} \tau^{i-\alpha-1} G_m^{(i)}(N(t-\tau) - n + 1) d\tau, \end{aligned}$$

در این روابط  $m \geq i$  فرض می‌شود؛ در غیر این صورت  $D^\alpha q_{nm}(t) = 0$  می‌باشد. با به کار بردن روابط (۷)، (۱۰)، (۱۵)، (۱۶) و تغییر متغیر  $T = t - \frac{n-1}{N}$  در معادله (۲۸)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} D^\alpha q_{nm}(t) &= \frac{1}{\Gamma(i-\alpha)} \int_0^{t-\frac{n-1}{N}} \tau^{i-\alpha-1} G_m^{(i)} \left( N \left( \left( t - \frac{n-1}{N} \right) - \tau \right) \right) d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma(i-\alpha)} \int_0^T \tau^{i-\alpha-1} G_m^{(i)}(N(T-\tau)) d\tau = {}_0^C D_T^\alpha G_m(NT) \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} N^k g_{m-k} {}_0^C D_T^\alpha (T^k) = \begin{cases} 0, & k < i \\ \sum_{k=i}^m \binom{m}{k} N^k g_{m-k} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} T^{k-\alpha}, & k \geq i \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & k < i \\ \sum_{k=i}^m \binom{m}{k} N^k g_{m-k} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \left( t - \frac{n-1}{N} \right)^{k-\alpha}, & k \geq i. \end{cases} \end{aligned}$$

برای  $t \in \left[ \frac{n}{N}, 1 \right)$  با استفاده از معادلات (۷)، (۱۵) و (۲۰)، قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} D^\alpha q_{nm}(t) &= \frac{1}{\Gamma(i-\alpha)} \int_0^t (\tau)^{i-\alpha-1} q_{nm}^{(i)}(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(i-\alpha)} \int_{t-\frac{n}{N}}^{t-\frac{n-1}{N}} \tau^{i-\alpha-1} G_m^{(i)}(N(t-\tau) - n + 1) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(i-\alpha)} \left( \int_0^{t-\frac{n-1}{N}} \tau^{i-\alpha-1} G_m^{(i)}(N(t-\tau) - n + 1) d\tau \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t-\frac{n}{N}} \tau^{i-\alpha-1} G_m^{(i)}(N(t-\tau) - n + 1) d\tau \right), \end{aligned}$$

(۳۰)

انتگرال اول در رابطه (۳۰) معادل رابطه (۲۹) می‌باشد. برای محاسبه انتگرال دوم با استفاده از معادلات (۱۷) و (۱۹)، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\Gamma(i-\alpha)} \int_0^{t-\frac{n}{N}} \tau^{i-\alpha-1} G_m^{(i)}(N(t-\tau) - n + 1) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(i-\alpha)} \frac{m! N^i}{(m-i)!} \int_0^{t-\frac{n}{N}} \tau^{i-\alpha-1} G_{m-i}(1 - (-N(t-\tau) + n)) d\tau \\
 &= \frac{(-1)^{m-i+1}}{\Gamma(i-\alpha)} \frac{m! N^i}{(m-i)!} \int_0^{t-\frac{n}{N}} \tau^{i-\alpha-1} G_{m-i} \left( -N \left( \left( t - \frac{n}{N} \right) - \tau \right) \right) d\tau \\
 &= \frac{(-1)^{m+1}}{\Gamma(i-\alpha)} \int_0^{t-\frac{n}{N}} \tau^{i-\alpha-1} G_m^{(i)} \left( -N \left( \left( t - \frac{n}{N} \right) - \tau \right) \right) d\tau.
 \end{aligned}
 \tag{۳۱}$$

با به کار بردن روندی مشابه رابطه (۲۹) و تغییر متغیر  $Z = t - \frac{n}{N}$ ، معادله (۳۱) به

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{m+1} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-N)^k g_{m-k} {}_0^C D_Z^\alpha (Z^k) \\
 &= \begin{cases} 0, & k < i \\ (-1)^{m+1} \sum_{k=i}^m \binom{m}{k} (-N)^k g_{m-k} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} Z^{k-\alpha}, & k \geq i \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0, & k < i \\ (-1)^{m+1} \sum_{k=i}^m \binom{m}{k} (-N)^k g_{m-k} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \left( t - \frac{n}{N} \right)^{k-\alpha}, & k \geq i. \end{cases}
 \end{aligned}$$

تبدیل می‌شود. بنابراین

$$D^\alpha q_{nm}(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[ 0, \frac{n-1}{N} \right), \\ Z_{nm}(t), & t \in \left[ \frac{n-1}{N}, \frac{n}{N} \right), \\ Z_{nm}(t) - P_{nm}(t), & t \in \left[ \frac{n}{N}, 1 \right]. \end{cases}
 \tag{۳۳}$$

که در آن،  $Z_{nm}(t)$  و  $P_{nm}(t)$  با معادلات (۲۹) و (۳۲) مشخص می‌شوند.

## روش‌های حل عددی مسأله کنترل بهینه کسری

از معایب روش‌های غیرمستقیم، می‌توان به پیچیدگی محاسباتی تعیین شرایط لازم بهینه‌گی به صورت تحلیلی اشاره نمود، همچنین این شرایط تنها برای مشتقات مرتبه کسری  $0 \leq \alpha \leq 1$  قابل محاسبه می‌باشند. افزون بر این، شعاع همگرایی این روش‌ها کوچک می‌باشد که روش‌ها را نیازمند حدس اولیه دقیق نزدیک به جواب بهینه می‌سازد. اضافه شدن متغیر

حالت کمکی در شرایط لازم بهینگی، مشکل انتخاب حدس اولیه دقیق برای این متغیر را نیز در پی دارد. همچنین انتخاب نامناسب حدس اولیه ممکن است به واگرایی روش منجر شود [۱۶]، [۳۲]. از این رو در بخش حاضر، دو روش مستقیم مبتنی بر عملگرهای انتگرال و مشتق کسری توابع ترکیبی گنوجی معرفی می‌کنیم. برای حل مسأله مطروحه در معادلات (۱) و (۲) در حالت‌های اول و دوم از عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل  $J^\alpha$  و در حالت سوم از عملگر مشتق کسری کاپوتو  $D^\alpha$  استفاده می‌شود.

### روش مستقیم بر اساس عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل $J^\alpha$

در این بخش، یک روش مستقیم بر مبنای تقریب توابع ترکیبی گنوجی و عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل جهت حل مسأله کنترل بهینه کسری با شاخص عملکرد (۱) و محدودیت (۲) در شرایط اولیه حالت اول ارائه می‌دهیم. برای حل این مسأله، در ابتدا مشتق کسری متغیر وضعیت را با توابع پایه ترکیبی گنوجی به صورت

$${}^C_0 D_t^\alpha x(t) = \Phi^T Q(t) \quad (34)$$

بسط می‌دهیم که در این رابطه،  $Q(t)$  بردار توابع ترکیبی گنوجی (۲۳) و  $\Phi$  بردار ضرایب مجهول (۲۲) می‌باشد. با اعمال عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل (۲۷) در طرفین رابطه (۳۴)، استفاده از خاصیت (۹) و شرایط اولیه (۳) داریم:

$$x(t) = \Phi^T J^\alpha Q(t) + t\dot{x}(0) + x(0), \quad (35)$$

با مشتق‌گیری از طرفین رابطه (۳۵) و با استفاده از معادلات (۸)، (۱۱) و (۱۳)، خواهیم داشت:

$$\dot{x}(t) = \Phi^T J^{\alpha-1} Q(t) + \dot{x}(0). \quad (36)$$

متغیر کنترل را از محدودیت (۲) به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$u(t) = \frac{1}{b(t)} (K_1 \dot{x}(t) + K_2 {}^C_0 D_t^\alpha x(t) - g(t, x(t))). \quad (37)$$

جای‌گذاری روابط (۳۴) تا (۳۶) در معادله (۳۷)، به دست می‌دهد:

$$(38)$$

$$u(t) = \frac{1}{b(t)} (K_1 (\Phi^T J^{\alpha-1} Q(t) + \dot{x}(0)) + K_2 (\Phi^T Q(t)) - g(t, \Phi^T J^\alpha Q(t) + t\dot{x}(0) + x(0))).$$

با جانشینی معادلات (۳۵) و (۳۸) در شاخص عملکرد (۱)، مسأله بهینه‌سازی نامقید

$$(39)$$

$$\min J(\Phi) = \int_0^1 f \left( t, \Phi^T J^\alpha Q(t) + t\dot{x}(0) + x(0), \frac{1}{b(t)} (K_1 (\Phi^T J^{\alpha-1} Q(t) + \dot{x}(0)) + K_2 (\Phi^T Q(t)) - g(t, \Phi^T J^\alpha Q(t) + t\dot{x}(0) + x(0))) \right) dt.$$

حاصل می‌شود که با بازنویسی آن، داریم:

$$J(\Phi) = \int_0^1 \eta(t, \Phi) dt, \quad (40)$$

که در این رابطه

(۴۱)

$$\eta(t, \Phi) = f\left(t, \Phi^T J^\alpha Q(t) + t\dot{x}(0) + x(0), \frac{1}{b(t)}(K_1(\Phi^T J^{\alpha-1} Q(t) + \dot{x}(0)) + K_2(\Phi^T Q(t)) + K_2(\Phi^T Q(t)) - g(t, \Phi^T J^\alpha Q(t) + t\dot{x}(0) + x(0))\right).$$

انتگرال (۴۰) را با استفاده از فرمول لژاندر-گاووس<sup>۱۱</sup> بدین صورت محاسبه می‌کنیم [۳۳]:

(۴۲)

$$J(\Phi) \approx \frac{1}{2} \sum_{j=0}^h w_j \eta\left(\frac{\tau_j + 1}{2}, \Phi\right),$$

که در آن  $\{\tau_j\}_{j=0}^h$  نقاط لژاندر-گاووس شامل  $h + 1$  ریشه حقیقی و متمایز چندجمله‌ای‌های لژاندر از مرتبه  $h + 1$  هستند و  $\{w_j\}_{j=0}^h$  وزن‌های متناظر مشهور به اعداد کریستوفل<sup>۱۲</sup> می‌باشند. بردار مجهول  $\Phi$  از حل دستگاه معادلات جبری زیر به دست می‌آید:

(۴۳)

$$\frac{\partial J(\Phi)}{\partial d_{ij}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M.$$

تذکره ۱. اگر در حالت اول،  $\dot{x}(0)$  نامعلوم و مقدار  $x(1)$  مشخص باشد آن‌گاه  $\dot{x}(0)$  با استفاده از رابطه (۳۴)، عملگر  $J^\alpha$  و جای‌گذاری مقادیر  $m = 2$ ،  $t = 1$  و  $a = 0$  در معادله (۹)، بدین صورت تقریب می‌شود:

$$\dot{x}(0) = x(1) - \Phi^T J^\alpha Q(1) - x(0). \quad (۴۴)$$

تذکره ۲. در روند حل مسأله کنترل بهینه با استفاده از عملگر  $J^\alpha$  در حالت دوم، در ابتدا مشتق مرتبه اول متغیر وضعیت به صورت

$$\dot{x}(t) = \Phi^T Q(t), \quad (۴۵)$$

در نظر گرفته می‌شود. سپس با اعمال عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل در معادله (۴۵) و بر مبنای روابط (۹)، (۱۱) و شرط اولیه (۴)، متغیر وضعیت برابر است با:

$$x(t) = \Phi^T J^1 Q(t) + x(0). \quad (۴۶)$$

با گرفتن مشتق کسری کاپوتو از طرفین معادله (۴۶) و بر اساس معادلات (۸) و (۱۳)، به دست می‌آوریم:

$${}^C_0 D_t^\alpha x(t) = \Phi^T J^{1-\alpha} Q(t). \quad (۴۷)$$

<sup>11</sup>Legendre-Gauss quadrature formula

<sup>12</sup>Christoffel numbers

سایر مراحل معادل روابط (۳۷) تا (۴۳) در حالت اول می‌باشد.

### روش مستقیم بر اساس عملگر مشتق کسری کاپوتو $D^\alpha$

در این بخش، روند حل مسأله کنترل بهینه (۱) و (۲) در شرایط مرزی حالت سوم بر مبنای عملگر مشتق کسری کاپوتو  $D^\alpha$  بیان می‌شود. متغیر وضعیت را با استفاده از توابع ترکیبی گنوجی و عملگر مشتق کسری کاپوتو (۳۳) و رابطه (۱۱)، به صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$x(t) = \Phi^T Q(t), \quad \dot{x}(t) = \Phi^T D^1 Q(t), \quad {}_0^C D_t^\alpha x(t) = \Phi^T D^\alpha Q(t), \quad (48)$$

که در آن،  $Q(t)$  بردار توابع ترکیبی گنوجی (۲۳) و  $\Phi$  بردار ضرایب مجهول (۲۲) می‌باشند. با جای گذاری معادلات (۴۸) در رابطه (۳۷)، متغیر کنترل به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$u(t) = \frac{1}{b(t)} \left( K_1 (\Phi^T D^1 Q(t)) + K_2 (\Phi^T D^\alpha Q(t)) - g(t, \Phi^T Q(t)) \right). \quad (49)$$

تقریب‌های (۴۸) و (۴۹) را در شاخص عملکرد (۱) جایگزین می‌کنیم:

$$J = \int_0^1 f \left( t, \Phi^T Q(t), \frac{1}{b(t)} \left( K_1 (\Phi^T D^1 Q(t)) + K_2 (\Phi^T D^\alpha Q(t)) - g(t, \Phi^T Q(t)) \right) \right) dt. \quad (50)$$

با استفاده از شرایط مرزی (۵) و تقریب وضعیت (۴۸)، شاخص عملکرد افزونه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J^* = J + \lambda_0 (x(0) - \Phi^T Q(0)) + \lambda_1 (x(1) - \Phi^T Q(1)), \quad (51)$$

که  $\lambda_0$  و  $\lambda_1$  ضرب‌کننده‌های لاگرانژ می‌باشند. در ابتدا  $J$  را با استفاده از فرمول لژاندر-گاووس (۴۲) محاسبه می‌کنیم، سپس شرایط لازم بهینگی برای  $J^*$  از روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial J^*}{\partial d_{ij}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M, \quad \frac{\partial J^*}{\partial \lambda_k} = 0, \quad k = 0, 1. \quad (52)$$

ضرایب مجهول و به تبع آن متغیرهای وضعیت و کنترل از حل دستگاه معادلات جبری (۵۲) به دست می‌آیند.

### کران خطا و آنالیز همگرایی

کران خطاهای تقریب تابع با توابع ترکیبی گنوجی، عملگر مشتق کسری کاپوتو  $D^\alpha$ ، عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل  $J^\alpha$  و آنالیز همگرایی روش مستقیم در این بخش بررسی می‌شود.

## کران خطای تقریب تابع

قضیه ۲. فرض می‌کنیم تابع  $f: [0, t_f] \rightarrow R$ ، مرتبه مشتق پذیر پیوسته و  $f_{NM} = \Phi^T Q(t)$  بهترین تقریب تابع  $f(t)$  به وسیله توابع ترکیبی گنوجی باشد. در این صورت کران بالای خطای تقریب تابع توسط توابع ترکیبی گنوجی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\|f - f_{NM}\|_2 \leq \frac{L t_f^{M+\frac{3}{2}}}{(M+1)! N^{M+1} 2^{2M+1}}, \quad (53)$$

که در رابطه (۵۳)،  $L = \sup |f^{(M+1)}(t)|$ ،  $t \in [0, t_f]$  می‌باشد.

اثبات. بازه  $[0, t_f]$  را به زیربازه‌های زیر افراز می‌کنیم:

$$\left[ \frac{n-1}{N} t_f, \frac{n}{N} t_f \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots, N.$$

فرض می‌کنیم در هر زیربازه، تابع  $f$  با استفاده از توابع ترکیبی گنوجی  $\Phi_{nM}^T Q_{nM}(t)$  از درجه حداکثر  $M$  با حداقل خطا تقریب می‌شود، که در آن

$$Q_{nM}(t) = [q_{n1}(t), q_{n2}(t), \dots, q_{nM}(t)], \quad \Phi_{nM} = [d_{n1}(t), d_{n2}(t), \dots, d_{nM}(t)], \quad n = 1, 2, 3, \dots, N.$$

$f^*$  را چند جمله‌ای درون‌یاب تابع  $f$  در نقاط  $t_i$ ،  $i = 0, 1, \dots, M$  در نظر می‌گیریم. که این نقاط ریشه‌های چند جمله‌ای چبیشف انتقال یافته مرتبه  $(M+1)$  در زیربازه  $\left[ \frac{n-1}{N} t_f, \frac{n}{N} t_f \right]$  هستند. کران خطای درون‌یابی چبیشف در هر زیربازه برابر است با [۳۳]:

$$|f(t) - f^*(t)| \leq \frac{\sup_{t \in \left[ \frac{n-1}{N} t_f, \frac{n}{N} t_f \right]} |f^{(M+1)}(t)| t_f^{M+1}}{(M+1)! N^{(M+1)} 2^{(2M+1)}},$$

طبق تعریف نرم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \|f - f_{NM}\|_2^2 &= \|f - \Phi^T Q(t)\|_2^2 = \int_0^{t_f} (f(t) - \Phi^T Q(t))^2 dt \\ &= \sum_{n=1}^N \int_{\frac{n-1}{N} t_f}^{\frac{n}{N} t_f} (f(t) - \Phi_{nM}^T Q_{nM}(t))^2 dt \leq \sum_{n=1}^N \int_{\frac{n-1}{N} t_f}^{\frac{n}{N} t_f} (f(t) - f^*(t))^2 dt \end{aligned} \quad (54)$$

$$\leq \sum_{n=1}^N \int_{\frac{n-1}{N}t_f}^{\frac{n}{N}t_f} \left( \frac{\sup_{t \in [\frac{n-1}{N}t_f, \frac{n}{N}t_f]} |f^{(M+1)}(t)|}{(M+1)! N^{(M+1)} 2^{2M+1}} t_f^{M+1} \right)^2 dt \leq \frac{L^2 t_f^{2M+3}}{((M+1)!)^2 N^{2M+2} 2^{4M+2}}.$$

با محاسبه جذر از رابطه (۵۴)، کران خطای (۵۳) حاصل می‌شود. این قضیه نشان می‌دهد، هنگامی که مرتبه تقریب توابع ترکیبی،  $M$  و  $N$  افزایش می‌یابد، خطای تقریب به صفر میل می‌کند، به عبارتی دیگر  $f_{NM} \rightarrow f$  هنگامی که  $M \rightarrow \infty$  یا  $N \rightarrow \infty$ . □

### کران خطای عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل $J^\alpha$

قضیه ۳. تابع  $f(t) \in C^{(M+1)}[0,1]$  را در نظر می‌گیریم، برای  $\alpha > 0$ ، کران خطای عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\|J^\alpha f(t) - J^\alpha f_{NM}(t)\|_2 \leq \frac{L}{\Gamma(\alpha+1)(M+1)! N^{M+1} 2^{2M+1}}. \quad (55)$$

اثبات. با استفاده از روابط (۶)، (۱۵) و بر اساس نامساوی زیر مشهور به نامساوی یانگ [۳۴]، داریم:

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p,$$

$$\|J^\alpha f(t) - J^\alpha f_{NM}(t)\|_2^2 = \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t)^{\alpha-1} * (f(t) - f_{NM}(t)) \right\|_2^2$$

$$\left( \int_0^1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t)^{\alpha-1} dt \right)^2 \times \|f(t) - f_{NM}(t)\|_2^2 \leq \left( \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \right)^2 \|f(t) - f_{NM}(t)\|_2^2,$$

با استفاده از کران بالای خطای تقریب تابع (۵۳)، خواهیم داشت:

$$\left( \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \right)^2 \|f(t) - f_{NM}(t)\|_2^2 \leq \frac{L^2}{(\Gamma(\alpha+1))^2 ((M+1)!)^2 N^{(2M+2)} 2^{4M+2}}.$$

با محاسبه جذر، رابطه (۵۵) نتیجه می‌شود. □

### کران خطای عملگر مشتق کسری کاپوتو $D^\alpha$

قضیه ۴. فرض می‌کنیم  $f(t) \in C^{(M+1)}[0,1]$  و  $i-1 < \alpha \leq i$  باشد. کران خطای عملگر مشتق کسری کاپوتو از رابطه زیر به دست می‌آید:

(۵۶)

$$\|D^\alpha f(t) - D^\alpha f_{NM}(t)\|_2 \leq \frac{LCM^{2i-1}}{\Gamma(i-\alpha+1)(M-1)! N^{M+1} 2^{2M+1}}.$$

اثبات. در ابتدا نامساوی مارکوف را بیان می‌کنیم [۳۵]:

اگر  $\emptyset$  یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر  $N$  و مرتبه مشتق  $r \geq 1$  باشد آن‌گاه یک پارامتر ثابت مثبت  $c$  مستقل از  $N$  وجود دارد به طوری که

$$\|\emptyset^{(r)}\|_p \leq cN^{2r} \|\emptyset\|_p, \quad 2 \leq p \leq \infty.$$

از تعریف مشتق کسری (۷)، خاصیت انتگرال تلفیقی (۱۵) و نامساوی یانگ، داریم:

$$\begin{aligned} \|D^\alpha f(t) - D^\alpha f_{NM}(t)\|_2^2 &= \left\| \frac{1}{\Gamma(i-\alpha)} (t)^{i-\alpha-1} * (f(t) - f_{NM}(t))^{(i)} \right\|_2^2 \\ &\leq \left( \int_0^1 \frac{1}{\Gamma(i-\alpha)} (t)^{i-\alpha-1} dt \right)^2 \|f(t)^{(i)} - f_{NM}(t)^{(i)}\|_2^2, \end{aligned}$$

با استفاده از نامساوی مارکوف و رابطه (۵۳)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \|D^\alpha f(t) - D^\alpha f_{NM}(t)\|_2^2 &\leq \frac{c^2 M^{4i}}{(\Gamma(i-\alpha+1))^2} \|f(t) - f_{NM}(t)\|_2^2 \\ &\leq \frac{c^2 M^{4i} L^2}{(\Gamma(i-\alpha+1))^2 ((M+1)!)^2 N^{(2M+2)} 2^{4M+2}} \\ &\leq \frac{c^2 M^{4i-2} L^2}{(\Gamma(i-\alpha+1))^2 ((M-1)!)^2 N^{(2M+2)} 2^{4M+2}}. \end{aligned}$$

با محاسبه جذر، رابطه (۵۶) نتیجه می‌شود.

□

### آنالیز همگرایی روش مستقیم

در این بخش در حالت کلی همگرایی توابع ترکیبی در حل مسأله کنترل بهینه کسری مطروحه را بر اساس عملگر مشتق کسری کاپوتو و با توجه به مراتب تقریب  $N$  و  $M$  مورد بررسی قرار می‌دهیم. چون طبق رابطه (۴۹) متغیر کنترل بر حسب متغیر وضعیت محاسبه می‌گردد، بنابراین فرض می‌کنیم، شاخص عملکرد تنها به متغیر وضعیت، وابسته است. متغیر وضعیت و شاخص عملکرد (۱) را بدین صورت در نظر می‌گیریم:

(۵۷)

$$x(t) \approx x_{NM}(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M d_{nm} q_{nm}(t) = \sum_{m=1}^M d_{1m} q_{1m}(t) + \sum_{m=1}^M d_{2m} q_{2m}(t) \\ + \dots + \sum_{m=1}^M d_{Nm} q_{Nm}(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_N(t) = \sum_{n=1}^N x_n(t),$$

که  $x_n(t)$  برابر است با:

(۵۸)

$$x_n(t) = \sum_{m=1}^M d_{nm} q_{nm}(t), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad \frac{n-1}{N} \leq t < \frac{n}{N}.$$

با استفاده از تعریف توابع ترکیبی داریم:

(۵۹)

$$J[x] = \int_0^1 f(t, x(t)) dt = \int_0^{\frac{1}{N}} f(t, x(t)) dt + \int_{\frac{1}{N}}^{\frac{2}{N}} f(t, x(t)) dt + \dots + \int_{\frac{N-1}{N}}^1 f(t, x(t)) dt \\ \approx \int_0^{\frac{1}{N}} f(t, x_1(t)) dt + \int_{\frac{1}{N}}^{\frac{2}{N}} f(t, x_2(t)) dt + \dots + \int_{\frac{N-1}{N}}^1 f(t, x_N(t)) dt \\ = \sum_{n=1}^N \int_{\frac{n-1}{N}}^{\frac{n}{N}} f(t, x_n(t)) dt = \sum_{n=1}^N J_n[x_n],$$

که در آن

$$J_n[x_n] = \int_{\frac{n-1}{N}}^{\frac{n}{N}} f(t, x_n(t)) dt, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

اگر  $i = [\alpha] + 1$  باشد، آن‌گاه فضای باناخ  $(C^i[0,1], \|\cdot\|_i)$  را با نرم تعریف شده در زیر در نظر می‌گیریم:

$$\|x\|_i = \|x\|_\infty + \|\dot{x}\|_\infty + \dots + \|x^{(i)}\|_\infty. \quad (۶۰)$$

فرض می‌کنیم:

(۶۱)

$$E[t_0, t_f] = \{h(t) \in C^i[t_0, t_f]: h^k(t_0) = \gamma_0^k, \quad h^k(t_f) = \gamma_f^k, k = 0, 1, \dots, i-1\}.$$

که  $\gamma_0^k$  و  $\gamma_f^k$  مقادیر ثابت و معلوم هستند.  $F_{nm} \left[ \frac{n-1}{N}, \frac{n}{N} \right]$  را بدین صورت در نظر می‌گیریم:

$$F_{nm} \left[ \frac{n-1}{N}, \frac{n}{N} \right] = E \left[ \frac{n-1}{N}, \frac{n}{N} \right] \cap \text{span}\{q_{n1}(t), q_{n2}(t), \dots, q_{nM}(t)\}. \quad (۶۲)$$

واضح است که  $F_{nm} \left[ \frac{n-1}{N}, \frac{n}{N} \right]$  یک زیر فضای متریک  $E \left[ \frac{n-1}{N}, \frac{n}{N} \right]$  می‌باشد. فرض می‌کنیم:

$$F[0,1] = \cup_{n=1}^N F_{nm} \left[ \frac{n-1}{N}, \frac{n}{N} \right]. \quad (۶۳)$$

لم ۱. فرض می‌کنیم  $f(t) \in E[t_0, t_f]$ . دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌های  $\{S_i(t)\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq E[t_0, t_f]$  وجود دارد به طوری که با توجه به نرم  $\|\cdot\|_i$ ، این دنباله به  $f$  همگراست.

اثبات. به [۳۶] مراجعه شود.  $\square$

لم ۲. تابع  $J: C^i[0,1] \rightarrow R$  داده شده در رابطه (۱) در فضای باناخ  $(C^i[0,1], \|\cdot\|_i)$  پیوسته است.

اثبات. با استفاده از تعریف مشتق کسری کاپوتو از مرتبه  $\alpha$  ( $i = [\alpha] + 1$ ) در رابطه (۷) و با گرفتن نرم بی‌نهایت از طرفین این رابطه، به دست می‌آوریم:

$$\|{}_0^C D_t^\alpha x(t)\|_\infty \leq \frac{\|x^{(i)}\|_\infty}{\Gamma(i-\alpha+1)}. \quad (۶۴)$$

$\varepsilon > 0$  را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. فرض می‌کنیم  $x(t) \in C^i[0,1]$  و  $\delta > 0$  اختیاری باشد. اکنون تابع

$y(t) \in C^i[0,1]$  را در نظر می‌گیریم، به نحوی که

(۶۵)

$$\|x - y\|_i = \sum_{k=0}^i \|x^{(k)} - y^{(k)}\|_\infty < \delta.$$

از روابط (۶۴) و (۶۵)، نتیجه می‌گیریم:

$$\|{}_0^C D_t^\alpha x(t) - {}_0^C D_t^\alpha y(t)\|_\infty \leq \frac{\|x^{(i)} - y^{(i)}\|_\infty}{\Gamma(i-\alpha+1)} \leq \frac{\delta}{\Gamma(i-\alpha+1)}.$$

بنابر فرض مسأله کنترل بهینه کسری،  $f$  تابعی پیوسته است، بنابراین به ازای مقادیر کوچک  $\delta > 0$  داریم:

$$\left\| f\left(t, x(t), \frac{1}{b(t)}(K_1 \dot{x}(t) + K_2 {}_0^C D_t^\alpha x(t) - g(t, x(t)))\right) - f\left(t, y(t), \frac{1}{b(t)}(K_1 \dot{y}(t) + K_2 {}_0^C D_t^\alpha y(t) - g(t, y(t)))\right) \right\|_\infty < \varepsilon,$$

به شرطی که

$$\|x - y\|_i < \delta.$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$\square |J[x] - J[y]| < \varepsilon.$$

از لم ۲ می‌توان نتیجه گرفت که تابع  $J: C^i\left[\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}\right] \rightarrow R$  در فضای  $(C^i\left[\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}\right], \|\cdot\|_i)$  پیوسته است.

قضیه ۵. فرض می‌کنیم  $\mu_{nm}$  مینیمم  $J$  در  $F_{nm}\left[\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}\right]$  و  $\mu_n$  مینیمم  $J$  در  $C^i\left[\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}\right]$  باشند و  $\varepsilon > 0$  داده شده است. در این صورت  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_{nm} = \mu_n$ .

اثبات. فرض می‌کنیم  $\varepsilon > 0$  مفروض و  $x_n(t) \in C^i \left[ \frac{n-1}{N}, \frac{n}{N} \right]$  تابعی است که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$J[x_n] < \mu_n + \varepsilon,$$

مطابق نتیجه لم ۲،  $J$  در فضای باناخ  $(C^i \left[ \frac{n-1}{N}, \frac{n}{N} \right], \|\cdot\|_i)$  پیوسته است. بنابراین تابعی مانند

مطابق لم ۱ به ازای مقادیر به اندازه کافی بزرگ  $m$ ،  $\xi_n \in F_{nm} \left[ \frac{n-1}{N}, \frac{n}{N} \right]$  وجود دارد به طوری که  $|J[\bar{x}_n] - J[x_n]| < \varepsilon$  به شرطی که  $\|\bar{x}_n - x_n\| < \delta$ . مطابق  $\|\xi_n - x_n\|_i < \delta$  اگر تابع  $J[\xi_n]$  را با  $\mu_{nm}$  نمایش دهیم، سپس خواهیم داشت:

$$\mu_n \leq \mu_{nm} = |J[\xi_n] - J[x_n]| + |J[x_n]| \leq |J[\xi_n] - J[x_n]| + |J[x_n]| \leq \mu_n + 2\varepsilon.$$

چون  $\varepsilon$  اختیاری است، نتیجه می‌گیریم:

$$\square \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_{nm} = \mu_n. \quad (۶۶)$$

قضیه ۶. تابع باقیمانده را به صورت  $\Delta J = \left| \sum_{n=1}^N J_n[x_n] - J[x] \right|$  در نظر می‌گیریم، به طوری که  $x_n \in F_{nm} \left[ \frac{n-1}{N}, \frac{n}{N} \right]$  و  $x \in E[0,1]$  باشند.

۱- اگر  $\mu$  مینیمم  $\Delta J$  در  $E[0,1]$  باشد، آن‌گاه به شرطی که  $N$  ثابت باشد، داریم:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \mu = 0.$$

اثبات. با استفاده از قضیه ۵ و رابطه (۶۶)، خواهیم داشت:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \mu \leq \lim_{M \rightarrow \infty} (|\mu_{1M} - \mu_1| + |\mu_{2M} - \mu_2| + \dots + |\mu_{NM} - \mu_N|) = 0.$$

۲- اگر  $\mu$  مینیمم  $\Delta J$  در  $E[0,1]$  باشد، آن‌گاه به شرطی که  $M$  ثابت باشد، داریم:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu = 0.$$

اثبات. با استفاده از رابطه (۶۶) داریم:

$$\mu \leq \sum_{n=1}^N \int_{\frac{n-1}{N}}^{\frac{n}{N}} |f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))| dt = \sum_{n=1}^N \int_{\left[ \frac{n-1}{N}, \frac{n}{N} \right]} |f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))| dt,$$

هنگامی که  $N \rightarrow \infty$  خواهیم داشت:

$$\square \lim_{N \rightarrow \infty} d_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{N} - \frac{n-1}{N} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{N} \right| = 0.$$

مثال‌های عددی

در این بخش روش‌های معرفی شده را برای حل تعدادی از مسائل کنترل بهینه کسری به کار می‌گیریم. جهت نمایش کارایی و دقت روش‌های پیشنهادی، نتایج به دست آمده را با جواب‌های دقیق در صورت وجود یا نتایج گزارش شده در مراجع [۳۷]-[۴۴] مقایسه می‌کنیم. مثال اول که یک مسأله‌ی مقدار اولیه است با روش عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل  $J^\alpha$  حل شده است. در مثال دوم که مسأله شامل متغیر وضعیت با نقاط مرزی اولیه و نهایی است از روش عملگر مشتق کسری کاپوتو  $D^\alpha$  استفاده می‌شود. در مثال سوم، روش عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل  $J^\alpha$  با تقریب  $x'(0)$  به کار رفته است. در حل این مثال‌ها از نرم‌افزار متلب R2017a استفاده شده است.

**مثال ۱.** مسأله کنترل بهینه کسری متغیر با زمان زیر را بررسی می‌کنیم [۳۷]، [۳۸] و [۳۹]:

$$\min J = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2(t) + u^2(t)) dt,$$

با محدودیت و شرط اولیه

$${}_0^C D_t^\alpha x(t) = tx(t) + u(t), \quad x(0) = 1.$$

این مسأله فاقد جواب دقیق می‌باشد. برای حل آن از روش مستقیم عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل  $J^\alpha$  استفاده می‌کنیم. بدین منظور برای  $N = 1, M = 5$  داریم:

$${}_0^C D_t^\alpha x(t) = \Phi^T Q(t) = d_{11}q_{11}(t) + d_{12}q_{12}(t) + \dots + d_{15}q_{15}(t), \quad (۶۷)$$

$$x(t) = \Phi^T J^\alpha Q(t) + x(0) = d_{11}J^\alpha q_{11}(t) + d_{12}J^\alpha q_{12}(t) + \dots + d_{15}J^\alpha q_{15}(t) + 1, \quad (۶۸)$$

متغیر کنترل از روی معادله محدودیت به صورت زیر بیان می‌شود:

$$u(t) = {}_0^C D_t^\alpha x(t) - tx(t), \quad (۶۹)$$

**جدول ۱. مقایسه مقادیر تقریبی شاخص عملکرد در مثال ۱.**

$\alpha$	روش $J^\alpha$ $N = 1, M = 5$	[۳۹] $N = 40$	[۳۸] $r = 3, n = 5$	[۳۷] $N = 8$
1	0.48426	0.48426	0.48427	0.48426
0/99	0.48346	0.48346	0.48347	0.48346
0/9	0.47588	0.47593	0.47605	0.47588
0/8	0.46698	0.46722	0.46722	0.46697

با جای گذاری روابط (۶۷) تا (۶۹) در شاخص عملکرد، محاسبه عددی انتگرال با فرمول لژاندر-گاووس و حل عددی دستگاه معادلات جبری حاصل از مشتقات  $J$ ، ضرایب مجهول تعیین می‌گردد. در جدول ۱ مقادیر بهینه شاخص عملکرد حاصل از روش پیشنهادی با نتایج به دست آمده از روش مستقیم چند جمله‌ای‌های ژاکوبی [۳۷]، روش ترکیبی آشفستگی هموتوبی و گسسته‌سازی [۳۸] و روش تکرار تغییرات [۳۹] مقایسه شده است. که نشان از توانایی و دقت روش پیشنهادی

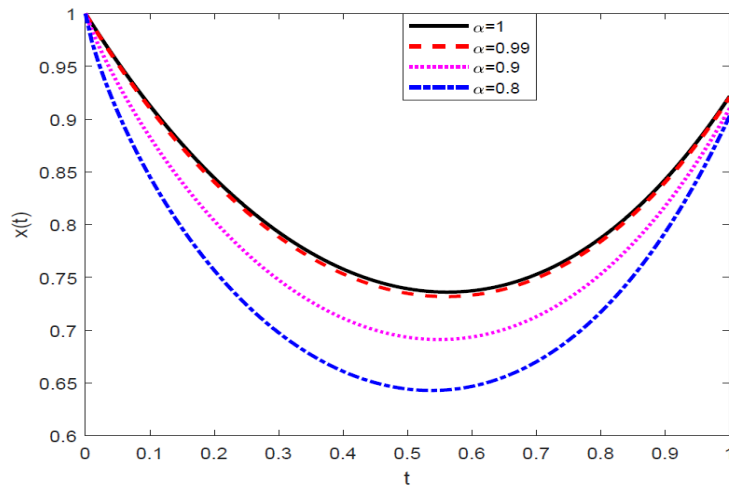
در مقایسه با روش‌های مذکور با تعداد جملات پایه کمتر دارد. در شکل‌های ۱ و ۲ جواب‌های تقریبی متغیرهای وضعیت و کنترل برای مقادیر مختلف مرتبه‌ی مشتق کسری رسم شده است.

**مثال ۲.** مسأله کنترل بهینه کسری زیر را تحت محدودیت و شرایط مرزی داده شده در نظر می‌گیریم [۴۰]، [۴۱]:

$$\min J = \int_0^1 (u(t) - x(t))^2 dt,$$

$$\dot{x}(t) + {}_0^C D_t^\alpha x(t) = u(t) - x(t) + \frac{6t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} + t^3, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = \frac{6}{\Gamma(\alpha+4)}.$$

جواب دقیق این مسأله می‌باشد.  $J = 0$  و  $x(t) = u(t) = \frac{6t^{\alpha+3}}{\Gamma(\alpha+4)}$ .



شکل ۱. جواب‌های تقریبی متغیر وضعیت به ازای مقادیر مختلف  $\alpha$  در مثال ۱.

از روش مستقیم بر اساس عملگر مشتق کسری کاپوتو  $D^\alpha$ ، این مسأله را حل می‌کنیم. با استفاده از تقریب توابع ترکیبی گنوجی در رابطه (۴۸)، متغیر وضعیت و مشتقات آن چنین تعریف می‌شود:

$$x(t) = \Phi^T Q(t), \quad \dot{x}(t) = \Phi^T D^1 Q(t), \quad {}_0^C D_t^\alpha x(t) = \Phi^T D^\alpha Q(t), \quad (70)$$

متغیر کنترل از معادله محدودیت به صورت زیر به دست می‌آید:

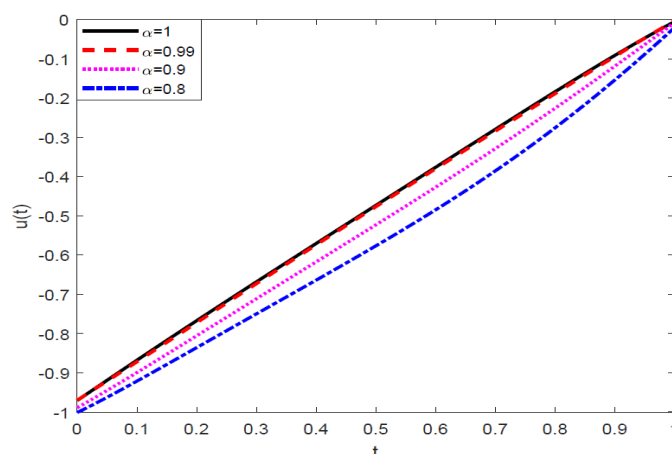
$$u(t) = \Phi^T D^1 Q(t) + \Phi^T D^\alpha Q(t) + \Phi^T Q(t) - \frac{6t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} - t^3, \quad (71)$$

با جای گذاری روابط (۷۰) و (۷۱) در شاخص عملکرد، معادله زیر را طبق رابطه (۵۱) خواهیم داشت:

$$(72)$$

$$J^* = \int_0^1 \left( \Phi^T D^1 Q(t) + \Phi^T D^\alpha Q(t) - \frac{6t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} - t^3 \right)^2 dt + \lambda_0 (-\Phi^T Q(0)) + \lambda_1 \left( \frac{6}{\Gamma(\alpha+4)} - \Phi^T Q(1) \right).$$

با تشکیل دستگاه معادلات جبری (۵۲) و حل آن ضرایب مجهول تعیین می‌شوند. مقایسه بین مقادیر شاخص عملکرد و حداکثر خطای مطلق متغیرهای وضعیت و کنترل در  $\alpha = 0.5$ ، حاصل از روش پیشنهادی  $D^\alpha$  با نتایج به دست آمده از حل این مسأله با روش چندجمله‌ای‌های تیلور [۴۰] و روش فرمول کلین-شاو-کورتیس و چندجمله‌ای‌های کسری لاگرانژ [۴۱] در جدول ۲ ارائه شده است. با توجه به جواب دقیق  $J = 0$ ، این نتایج بیانگر خطای کمتر روش پیشنهادی  $D^\alpha$  در مقایسه با روش‌های مذکور می‌باشد. ذکر این نکته ضروری است که چندجمله‌ای‌های گنوجی از  $n = 1$  شروع شده  $(G_0(t) = 0)$ .



شکل ۲. جواب‌های تقریبی متغیر کنترل به ازای مقادیر مختلف  $\alpha$  در مثال ۱.

در حالی که سایر چندجمله‌ای‌ها از  $n = 0$  شروع می‌شوند، به عبارتی دیگر در مرتبه تقریب مساوی، توان  $t$  در چندجمله‌ای‌های گنوجی یک درجه از توان  $t$  در چندجمله‌ای‌های پایه دیگر کمتر می‌باشد، بنابراین مقایسه با روش چندجمله‌ای‌های تیلور [۴۰] در  $N = 5$  به دلیل هم‌توان شدن دو پایه منطقی است [۱۹]. همچنین جدول ۳ خطای مطلق توابع وضعیت و کنترل را در  $\alpha = 0.99$  و  $M = 6$  و  $N = 1$  نمایش می‌دهد. نمودار متغیرهای وضعیت و کنترل به ازای مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $N = 2, M = 4$  در شکل‌های ۳ و ۴ نمایش داده شده است. همچنین نمودار خطاهای مطلق توابع وضعیت و کنترل در  $\alpha = 0.8$  و مقادیر مختلف  $M$  در شکل ۵ رسم شده است.

مثال ۳. می‌خواهیم متغیر کنترل به گونه‌ای تعیین شود که شاخص عملکرد زیر مینیمم شود [۴۲]:

$$\min J = \int_0^1 \left( x^2(t) - 2t^{\frac{3}{2}}x(t) + u^2(t) - \frac{3\sqrt{\pi}}{4}e^{-t}u(t) + e^{-t+t^{\frac{3}{2}}}u(t) + t^3 + \frac{9\pi}{64}e^{-2t} - \frac{3\sqrt{\pi}}{8}e^{-2t+t^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{4}e^{-2t+2t^{\frac{3}{2}}} + e^{2t} \right) dt,$$

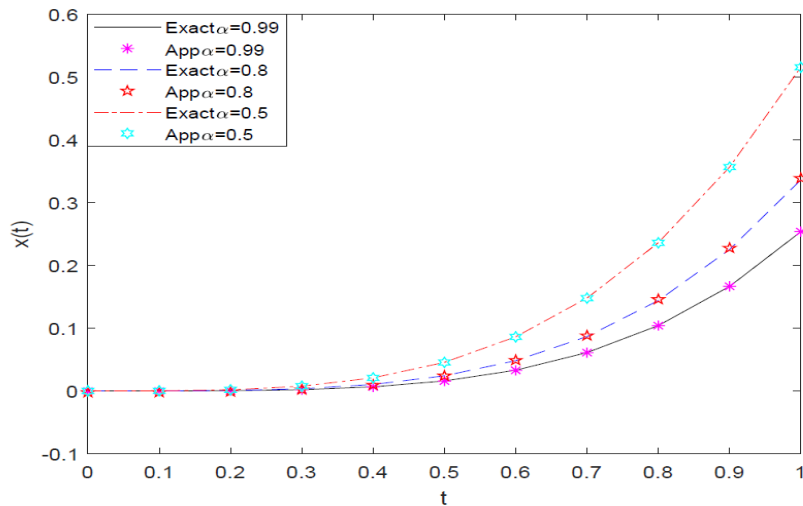
همچنین در محدودیت و شرایط اولیه و نهایی زیر صدق کند.

$${}^C_0D_t^{1.5}x(t) = e^{x(t)} + 2e^t u(t),$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

جواب دقیق این مسأله برابر است با:

$$x(t) = t^{\frac{3}{2}}, \quad u(t) = \frac{1}{2}e^{-t} \left( e^{-t^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \right).$$



شکل ۳. نمودار متغیر وضعیت به ازای مقادیر مختلف  $\alpha$ ,  $N = 2$ ,  $M = 4$  در مثال ۲.

همچنین مقدار شاخص عملکرد بهینه معادل  $J = 3.194528049465325$  می‌باشد. برای حل این مسأله از روش عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل  $J^\alpha$  استفاده می‌کنیم. برای  $N = 1$  و  $M = 2$ ، با توجه به رابطه (۳۴) داریم:

جدول ۲. مقایسه مقادیر بهینه شاخص عملکرد و حداکثر خطای متغیرهای وضعیت و کنترل به ازای  $\alpha = 0.5$  در مثال ۲.

	روش پیشنهادی $D^\alpha$	روش کلین-شاو-کور تیس [۴۱]	روش چندجمله‌ای‌های تیلور [۴۰]
تعداد جملات پایه	$N = 1, M = 6$	$N = 6$	$N = 5$
مقدار شاخص عملکرد	$3.73332 \times 10^{-7}$	$4.699837 \times 10^{-6}$	$4.76968 \times 10^{-5}$
حداکثر خطای مطلق متغیر وضعیت	$1.78656 \times 10^{-4}$	$1.128957 \times 10^{-3}$	-
حداکثر خطای مطلق متغیر کنترل	$1.07455 \times 10^{-3}$	$1.508986 \times 10^{-2}$	-

$${}^C_0D_t^{1.5}x(t) = \Phi^T Q(t) = d_{11}q_{11}(t) + d_{12}q_{12}(t).$$

با توجه به معادله اخیر و شرایط مرزی مسأله، از رابطه (۳۵) متغیر وضعیت مشخص می‌شود:

$$x(t) = \Phi^T J^{1.5} Q(t) + t\dot{x}(0) + x(0) = d_{11} J^{1.5} q_{11}(t) + d_{12} J^{1.5} q_{12}(t) + t\dot{x}(0).$$

چون  $\dot{x}(0)$  نامعلوم است از تقریب (۴۴) استفاده می‌کنیم:

$$x(t) = d_{11} J^{1.5} q_{11}(t) + d_{12} J^{1.5} q_{12}(t) + t(1 - d_{11} J^{1.5} q_{11}(1) - d_{12} J^{1.5} q_{12}(1)).$$

از معادلات حاصل، متغیر کنترل برابر است با:

جدول ۳. خطای مطلق متغیرهای وضعیت و کنترل در  $\alpha = 0.99$  برای مثال ۲.

$t$	$x(t)$	$u(t)$
0	0	$2 \times 10^{-4}$
0.1	$2.3882 \times 10^{-5}$	$5.4067 \times 10^{-4}$
0.2	$4.9838 \times 10^{-5}$	$5.4750 \times 10^{-4}$
0.3	$7.2623 \times 10^{-5}$	$4.7380 \times 10^{-4}$
0.4	$8.9142 \times 10^{-5}$	$3.4346 \times 10^{-4}$
0.5	$9.7265 \times 10^{-5}$	$1.6826 \times 10^{-4}$
0.6	$9.5470 \times 10^{-5}$	$4.1449 \times 10^{-5}$
0.7	$8.2927 \times 10^{-5}$	$2.7021 \times 10^{-4}$
0.8	$5.9825 \times 10^{-5}$	$4.9303 \times 10^{-4}$
0.9	$2.7882 \times 10^{-5}$	$6.7187 \times 10^{-4}$
1	$9.0186 \times 10^{-6}$	$7.5282 \times 10^{-4}$

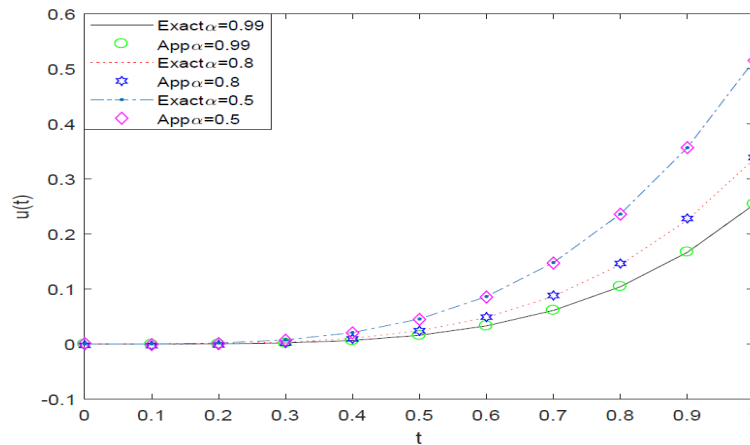
$$u(t) = \frac{1}{2} e^{-t} (d_{11} q_{11}(t) + d_{12} q_{12}(t) - e^{(d_{11} J^{1.5} q_{11}(t) + d_{12} J^{1.5} q_{12}(t) + t(1 - d_{11} J^{1.5} q_{11}(1) - d_{12} J^{1.5} q_{12}(1)))}).$$

با جای گذاری متغیرهای وضعیت و کنترل در شاخص عملکرد و به کار بردن روش معرفی شده، ضرایب مجهول به صورت زیر محاسبه می‌گردند:

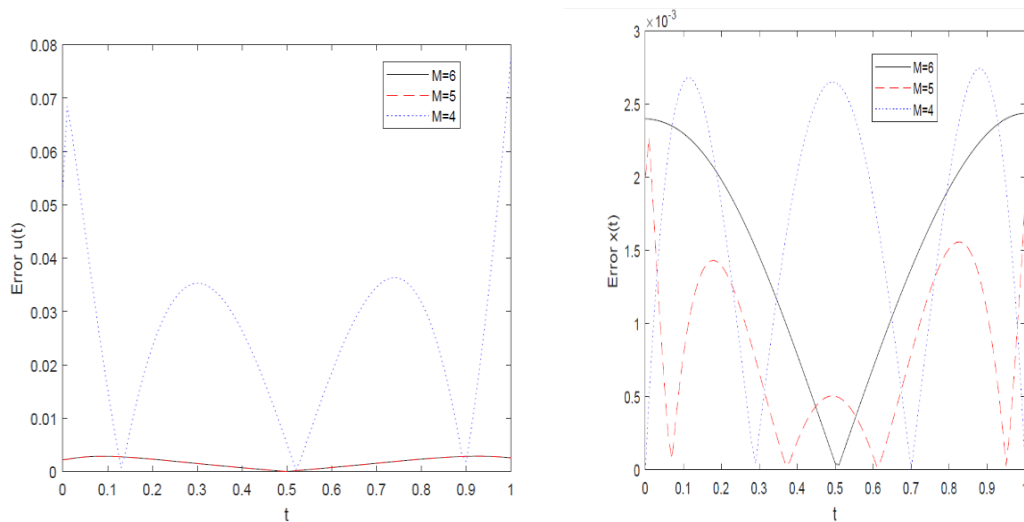
$$d_{11} = 1.329340388, d_{12} = -3.70091505 \times 10^{-33}.$$

مقدار بهینه شاخص عملکرد برابر است با  $J = 3.19452804$ ، که تا هشت رقم اعشار معادل جواب دقیق است. در [۴۲]، با استفاده از ماتریس عملیاتی انتگرال کسری چندجمله‌ای‌های برنولی، مقدار تقریبی شاخص عملکرد،  $J = 3.19453$  و خطاهای مطلق متغیرهای کنترل و وضعیت به ترتیب مضربی از  $10^{-5}$  و  $10^{-4}$  برای تعداد جملات پایه  $n = 7$  به دست آمده است. در حالی که در روش حاضر، حداکثر خطاهای مطلق متغیرهای کنترل و وضعیت به ترتیب  $8.9568 \times 10^{-11}$  و  $1.9962 \times 10^{-11}$  می‌باشد، که نشان می‌دهد روش پیشنهادی مبتنی بر عملگر  $J^\alpha$  و توابع ترکیبی گنوجی، با تعداد جملات پایه کمتر جواب‌های دقیق‌تری نسبت به روش ماتریس عملیاتی انتگرال کسری چندجمله‌ای‌های برنولی در مرجع [۴۲] به دست می‌دهد. با توجه به خصوصیات و ارتباط چندجمله‌ای‌های برنولی و چندجمله‌ای‌های گنوجی که در مرجع [۱۹] بیان شده است، علت حصول جواب دقیق‌تر با توابع ترکیبی گنوجی در مقایسه با چندجمله‌ای‌های برنولی در این مثال، به جهت استفاده از عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل  $J^\alpha$  در روش پیشنهادی که بدون تقریب و خطا محاسبه شده، در برابر استفاده از ماتریس عملیاتی تقریبی انتگرال کسری ریمان-لیوویل در روش [۴۲] می‌باشد. همچنین نمودار جواب‌های دقیق و تقریبی توابع وضعیت و کنترل در شکل ۶ رسم شده است. این مثال

تحت شرایط اولیه متغیر وضعیت در مرجع [۲۳] با روش عددی مبتنی بر عملگر انتگرال کسری توابع ترکیبی برنولی، در مرجع [۴۳] با روش طیفی بر مبنای ماتریس عملیاتی انتگرال کسری چندجمله‌ای‌های چیشیف نوع دوم و در مرجع [۴۴] با روش ماتریس عملیاتی مشتق کسری موجک‌های بوباکر حل شده است. مقصود از شرایط اولیه  $x(0) = 0$  و  $\dot{x}(0) = 0$  و شرایط مرزی  $x(0) = 0$ ،  $x(1) = 1$  می‌باشد. در جدول ۴ خطای مطلق شاخص عملکرد این مسأله، حاصل از روش‌های مذکور تحت شرایط مختلف مقایسه شده است.



شکل ۴. نمودار متغیر کنترل به ازای مقادیر مختلف  $\alpha$ ،  $N = 2$ ،  $M = 4$  در مثال ۲.



شکل ۵. نمودار خطاهای مطلق متغیرهای وضعیت و کنترل در  $\alpha = 0.8$  در مثال ۲.

این نتایج نشان می‌دهد که در مساله با شرایط اولیه، روش عملگر انتگرال کسری توابع ترکیبی برنولی نسبت به روش‌های ماتریس عملیاتی منجر به جواب دقیق می‌شود. همچنین روش پیشنهادی عملگر انتگرال کسری توابع ترکیبی گنوجی در مقایسه با روش ماتریس عملیاتی مشتق کسری موجک‌های بوباکر تحت شرایط متفاوت جواب با دقت بیشتر و تعداد جملات پایه

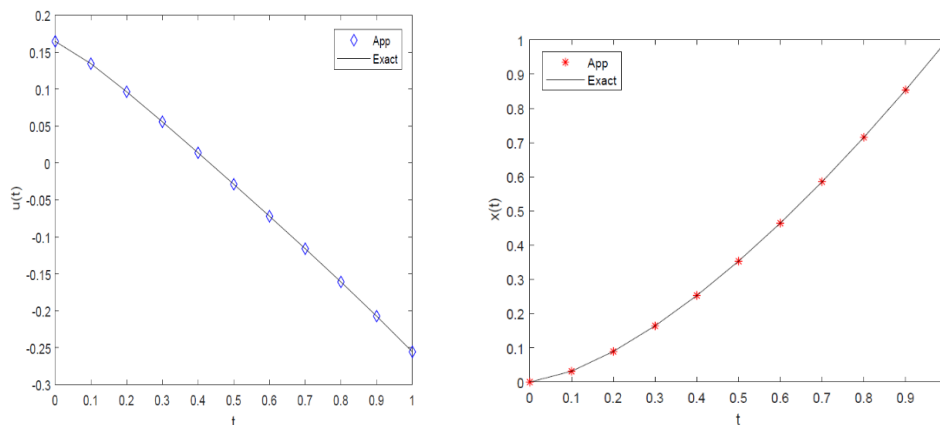
کمتر ارائه می‌دهد. از مقایسه روش‌های مذکور در این مثال، می‌توان نتیجه گرفت که روش عملگر انتگرال کسری تحت شرایط اولیه عملکرد بهتری دارد.

#### جدول ۴. مقایسه خطای مطلق شاخص عملکرد در مثال ۳.

خطای شاخص عملکرد	شرایط مسأله	تعداد توابع پایه	نوع عملگر کسری	روش
0	شرایط اولیه	$N = 1, M = 0$	عملگر انتگرال کسری	توابع ترکیبی برنولی [۲۳]
$9.4653 \times 10^{-9}$	شرایط مرزی	$N = 1, M = 2$	عملگر انتگرال کسری	توابع ترکیبی گنوجی
$1.9505 \times 10^{-6}$	شرایط مرزی	$n = 7$	ماتریس عملیاتی انتگرال کسری	چندجمله‌ای‌های برنولی [۴۲]
$5.3467 \times 10^{-10}$	شرایط اولیه	$N = 7$	ماتریس عملیاتی انتگرال کسری	چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم [۴۳]
$9.5053 \times 10^{-7}$	شرایط اولیه	$K = 2, M = 9$	ماتریس عملیاتی مشتق کسری	موجک‌های بوباگر [۴۴]

#### نتیجه‌گیری

در این مقاله دو روش عددی برای حل مسائل کنترل بهینه کسری بر مبنای عملگرهای کسری توابع ترکیبی گنوجی ارائه شد. همچنین مزایای این چندجمله‌ای‌ها و توابع ترکیبی ارائه گردید. عملگرهای کسری شامل عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل و عملگر مشتق کسری کاپوتو توابع ترکیبی گنوجی بدون تقریب و به صورت مستقیم محاسبه شده است. در ادامه، مسائل کنترل بهینه کسری با استفاده از این عملگرها به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل شده که از حل آن متغیرهای وضعیت و کنترل تعیین می‌شوند. راه‌کارهایی برای حل مسائل شامل نقطه مرزی نهایی مطرح شد. کران بالای خطای تقریب تابع و عملگرهای کسری محاسبه و آنالیز همگرایی، مورد بررسی قرار گرفت. نتایج عددی حاصل از به‌کارگیری روش‌های ارائه شده در حل چند مسأله کنترل بهینه کسری با جواب‌های دقیق در صورت وجود یا جواب‌های گزارش شده در سایر مراجع مرتبط مقایسه گردیده که دقت و کارایی روش‌های پیشنهادی را تایید می‌نماید. همچنین تاثیر شرایط اولیه یا شرایط مرزی و استفاده از عملگر کسری یا ماتریس عملیاتی در روند حل مسأله بررسی شد. سادگی محاسباتی و تعداد اندک جملات پایه‌ی توابع ترکیبی به کار رفته در مسائل حل شده از دیگر ویژگی‌های روش‌های پیشنهادی می‌باشد.



شکل ۶. نمودار جواب‌های دقیق و تقریبی توابع وضعیت و کنترل در مثال ۳

## References

1. Geering H.P., "Optimal Control with Engineering Applications", Springer, (2007).
2. Knowles G., "An Introduction to Applied Optimal Control", Academic Press, New York, (1981).
3. Baleanu D., Diethelm K., Scalas E., Trujillo J., "Fractional Calculus Models and Numerical Methods", World scientific publishing company, New York, (2012).
4. Das S., "Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls", Springer, New York, (2008).
5. Atangana A., "Modelling the spread of COVID-19 with new fractal-fractional operators: Can the lockdown save mankind before vaccination?", Chaos Solitons Fractals, 136 (2020) 109860.
6. Thabet S.T.M., Abdo M.S., Shah K., Abdeljawad T., "Study of transmission dynamics of COVID-19 mathematical model under ABC fractional order derivative", Results in Physics, 19 (2020) 103507.
7. Sweilam N.H., Al-Mekhlafi S.M., Almutairi A., Baleanu D., "Hybrid fractional COVID-19 model with general population mask use: Numerical treatments", Alexandria Engineering Journal, 60(3) (2021) 3219-3232.
8. Samko S.G., Kilbas A., Marchiev O.I., "Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications", Switzerland: Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, (1993).
9. Soradi Zeid S., Effati S., Kamyad A.V., "Approximation methods for solving fractional optimal control problems", Comp. Appl. Math. (2017).

10. Pontryagin L.S., Bolyanskii V., Gamkrelidze R., Mischenko E., "The Mathematical Theory of Optimal Processes", Wiley Interscience, (1962).
11. Dadkhah M., Farahi M.H., Heydari A., "Numerical solution of time delay optimal control problems by hybrid of Block-pulse functions and Bernstein polynomials", IMA J. Math. Control Inform., 35 (2) (2018) 451–477.
12. Marzban H.R., Razzaghi M., "Optimal control linear delay systems via hybrid of Block-Pulse functions and Legendre polynomials", J. Franklin Inst, 341 (2004) 91-102.
13. Mashayekhi S., Ordokhani Y., Razzaghi M., "Hybrid functions approach for optimal control of systems described by integro-differential equations", Appli. Math. Model. 37 (2013) 3355-3368.
14. Mohammadi M., Zakeri A., Karami M., "An approximate solution of bivariate nonlinear Fredholm integral equations using hybrid Block-pulse functions with Chebyshev polynomials", Mathematical Sciences, 15 (2020) 1–9.
15. Dehestani H., Ordokhani Y., Razzaghi M., "A numerical technique for solving various kinds of fractional partial differential equations via Genocchi hybrid functions", RACSAM, 113 (2019) 3297–3321.
16. Agrawal O.P., "A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems", Nonlinear Dyn., 38 (1-4) (2004) 323-337.
17. Lotfi A., Yousefi S.A., Dehghan M., "Numerical solution of a class of fractional optimal control problems via the Legendre orthonormal basis combined with the operational matrix and the Gauss quadrature rule", J. Comput. Appl. Math., 250 (2013) 143-160.
18. Nemati A., "Numerical solution of 2D fractional optimal control problems by the spectral method along with Bernstein operational matrix" Internat. J. Control, (2017).
19. Phang C., Ismail N.F., Isah A., Loh J.R., "A new efficient numerical scheme for solving fractional optimal control problems via a Genocchi operational matrix of integration", J. Vib. Control, 24(14) (2017) 3036–3048.

۲۰. نعمتی سمیه، اردوخانی یداله. حل عددی مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری با استفاده از توابع کلاهی بهبود یافته، پژوهش‌های ریاضی، (۱۳۹۷) ۴(۲) ۲۴۱–۲۵۸.

21. Rabiei K., Ordokhani Y., Babolian E., "Fractional-Order Legendre Functions and Their Application to Solve Fractional Optimal Control of Systems Described by Integro-differential Equations", *Acta Appl Math*, 158 (2018) 87–106.
22. Rakhshan S.A., Effati S., "Fractional optimal control problems with time varying delay: A new delay fractional Euler–Lagrange equations", *J Franklin Inst*, 357(10) (2020) 5954–5988.
23. Mashayekhi S., Razzaghi M., "An approximate method for solving fractional optimal control problems by hybrid functions", *J. Vib. Control*, 24(9) (2018) 1621–1631.
24. Rabiei K., Ordokhani Y., Babolian E., "Numerical solution of 1D and 2D fractional optimal control of system via Bernoulli polynomials", *Int. J. Appl. Comput. Math.*, 4(1) (2018).
25. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J.J., "Theory and Applications of Fractional Differential Equations", Elsevier Science Inc., New York, NY, (2006).
26. Zhou Y., "Basic Theory of Fractional Differential Equations", Wo I. rld Scientific Publishing Co. Pte.Ltd, (2014).
27. Schiff J.L., "The Laplace Transform: Theory and Applications", NY: Springer Science & Business Media, New York, (2013).
28. Isah A., Phang C., "Operational matrix based on Genocchi polynomials for solution of delay differential equations", *Ain Shams Eng.*, 9(4) (2018) 2123–2128.
29. Ryou C.S., "A numerical investigation on the zeros of the Genocchi polynomials", *J. Appl. Math. Comput.*, 22(1-2) (2006) 125–132.
30. Kreyszig E., "Introductory Functional Analysis with Applications", John Wiley & Sons, New York, NY, USA, (1989).
31. Nouri K., Torkzadeh L., Mohammadian S., "Hybrid Legendre functions to solve differential equations with fractional derivatives", *Math Sci*, 12(2) (2018) 129-136.
32. Kirk D.E., "Optimal Control Theory: An Introduction". Dover Publication, New York, (1970).
33. Dahlquist G., Bjoerck A., "Numerical Methods in Scientific Computing", SIAM, (2007).
34. Schatzman M., "Numerical Analysis, a Mathematical Introduction", Oxford University Press, (2002).

35. Canuto C., Quarteroni A., Hussaini M.Y., Zang T.A., "Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2006).
36. Lotfi A., Yousefi S.A., "A numerical technique for solving a class of fractional variational problems", J. Comput. Appl. Math., 237 (2013) 633–64
37. Doha E.H., Bhrawy A.H., Baleanu D., Ezz-Eldien S.S., Hafez R.M., "An efficient numerical scheme based on the shifted orthonormal Jacobi polynomials for solving fractional optimal control problem", Adv Differ Equ., 15 (2015) 1-17.
38. Akbarian T., Keyanpour M., "A new approach to the numerical solution of fractional order optimal control problems", Appl. Appl. Math., 8(2) (2013) 523–534.
39. Alizadeh A., Effati S., "An iterative approach for solving fractional optimal control problems", J. Vib. Control, 24(1) (2016) 18-36.
40. Khan N.A., Razzaq O.A., Hameed T., Ayaz M., "Numerical scheme for global optimization of fractional optimal control problem with boundary conditions", Int J Innov Comput Inf Control, 13 (2017) 1669-1679.
41. Noori Skandari M.H., Habibli M., Nazemi A., "A direct method based on the Clenshaw-Curtis formula for fractional optimal control problems", Math. Control Relat. Fields, 10(1) (2020) 171-187.
42. Behroozifar M., Habibi N., "A numerical approach for solving a class of fractional optimal control problems via operational matrix Bernoulli polynomials", J. Vib. Control, 24(12) (2018) 1-18.
43. Nemati s., "A spectral method based on the second kind Chebyshev polynomials for solving a class of fractional optimal control problems", SCMA, 4 (1) (2016) 15-27.
44. Rabiei K., Ordokhani Y., "A new operational matrix based on Boubaker wavelet for solving optimal control problems of arbitrary order", Transactions of the Institute of Measurement and Control, (2020) 1-13.