Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

A new recognition of some finite simple groups

Ahmad Khaksari[1]

1. Department of mathematics, Payame noor university, Po.Box:19395-3697, Tehran, Iran.

E-mail: a_khaksari@pnu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
18 January 2021
Received in revised form:
5 May 2021
Accepted:
22 June 2021
Published online:
20 June 2023

Keywords:
element order,
the largest element order,
Stienberg group.

ABSTRACT

Introduction

In this paper G is considered to be a finite group. We denote the set of elements order and the set of prime divisors of order G by $\pi_e(G)$ *and* $\pi(G)$, respectively. The largest element order of G is denoted by k_1(G), and the prime graph of G is denoted by $\Gamma(G)$, where two vertices u and v are adjacent if uv $\in \pi_e(G)$. After classification of finite simple groups, the problem that came to the researchers' attention was the problem of recognizing a group with a specific characteristic. Properties such as elements order, the set of elements with the same order, graphs, etc. In fact we say the group G by property M is recognizable, whenever by isomorphic G be the only group by property M. The other methods are group recognition by using the order of the group and the largest element order. In other words, we say the group G is recognizably by using the order of the G and the largest element order whenever there exists group H so that | G |=|H| and $k_1(G) = k_1$(H) then $G \cong$ H. It is known that some of groups are recognizable by this method. In this paper, we prove that the Stienberg group ${}^3D_4(2^n)$, where $2^{4n} - 2^{2n} + 1$ is a prime number are recognizable by using the order of the group and the largest element order. In other words, we have the following main theorem.

Main Theorem

Let G be a group with the Steinberg group ${}^3D_4(2^n)$, where $2^{4n} - 2^{2n} + 1$ is a prime number such that | G |=|${}^3D_4(2^n)$| and $k_1(G) = k_1({}^3D_4(2^n))$, then $G \cong {}^3D_4(2^n)$.

Material and methods

In this research we prove that Steinberg group ${}^3D_4(2^n)$, where $2^{4n} - 2^{2n} + 1$ is a prime number by using the order of the group and the largest element order. In order to prove the main theorem, we used Lemmas 4.2, 7.2 of the reference [18].

Results and discussion

In this section we prove the main result of this article. For simplicity the Steinberg simple group and prime number are denoted by D and p respectively. As mentioned in the previous section to prove the main result of this article we use the Lemma 4.2 of [18]. We prove p is an isolated vertex of prime graph. Using Lemma 4.2 we prove that G neither a Frobenius nor 2-Frobenius group. And for the case c this Lemma is satisfied. In other words, G has a normal series such that H and G/K and K/H are non-abelian simple groups. Moreover, H is a nilpotent group. Every odd components of prime is an odd component of the prime graph. In the next step, by using Lemma 7.2, since (5, |G|)=1, we consider the groups of this Lemma. We also prove that isomorphism K/H$\ncong$ L_2(q) , L_3(q), $U_3(q)$, $G_2(q)$, $^2G_2(q)$, are a contradiction. Finally we have K/H $\cong$ $^3D_4(2^n)$. The proof be completed.

Conclusion

We conclude that in addition to a previously known criterion(test) for Steinberg groups recognition by their 2-sylow subgroups(ANTHONY HUGHES, CHARACTERIZATION OF $^3D_4$ (q^3), q = 2^n BY ITS SYLOW 2-SUBGROUP, Proceedings of the Conference on Finite Groups,1976, Pages 103-105) and also the same order components (Guiyun Chen, Characterization of $^3D_4(q)$, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 25, pages 389–401,2002). Next, in this paper we can recognize them by the order of the group and the largest element order of the group.

How to cite: Khaksari, A. (2023). A new recognition of some finite simple groups. *Mathematical Researches*, 9 (1), 108-118.

Publisher: Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

مشخصۀ جدید بعضی ازگروه‌های سادۀ متناهی

احمد خاکساری[1]

۱. نویسندۀ مسئول، گروه آموزشی ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی:۱۹۳۹۵-۳۶۹۷، تهران، ایران. رایانامه: a_khaksari@pnu.ac.ir

اطلاعات مقاله **چکیده**

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۰/۲۹
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۲/۱۵
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۴/۰۱
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۰۳/۳۰

واژه‌های کلیدی:
مرتبۀ عناصر،
بزرگ‌ترین مرتبۀ عناصر،
گروه‌های استینبرگ.

بعد از رده‌بندی گروه‌های سادۀ متناهی، یکی از مسائل مهمی که مورد بحث محققیان قرارگرفت، مسئلۀ شناسایی یک گروه با یک ویژگی خاص است، در واقع گروه G با خاصیت M قابل شناسایی است؛ هرگاه گروه G تحت یک‌ریختی تنها گروهی با خاصیت M باشد. تا کنون روش‌های زیادی برای شناسایی گروه‌ها ، توسط محققان ارائه شده است. به عنوان مثال: شناسایی با استفاده از مرتبۀ عناصر، تعداد عناصر هم‌مرتبه، بزرگ‌ترین مرتبۀعناصر، انواع مختلف گراف‌ها و... مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله، ثابت می‌کنیم که گروه‌های استینبرگ $^3D_4(2^n)$که درآن $2^{4n}-2^{2n}+1$ عددی اول است، با استفاده از مرتبۀ گروه و بزرگ‌ترین مرتبۀ عناصرگروه، قابل شناسایی است.

استناد: خاکساری، احمد؛ (۱۴۰۲). مشخصۀ جدید بعضی ازگروه¬های سادۀ متناهی. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۱)، ۱۱۸-۱۰۸.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه:

در سرأسر این مقاله، فرض می‌کنیم که G یک گروه متناهی باشد؛ در این صورت مجموعهٔ مقسوم علیه‌های اول مرتبهٔ گروه G را با نماد $\pi(G)$، مجموعهٔ مرتبهٔ عناصر آن را با $\pi_e(G)$ و بزرگ‌ترین مرتبهٔ عناصر G را با $k_1(G)$ نشان می‌دهیم؛ یک گروه متناهی G را K_n-گروه می‌نامیم، هرگاه مرتبهٔ $\pi(G)$، n باشد. گراف اول یک گروه مانند G را که با نماد $\Gamma(G)$ نشان می‌دهیم، گرافی تعریف می‌کنند که $\pi(G)$ مجموعهٔ رئوس آن و دو رأس p و q مجاورند؛ اگر و تنها اگر $pq \in \pi_e(G)$. تعداد مؤلفه‌های هم‌بندی گراف اول گروه G را با $t(G)$ و هر مؤلفهٔ هم‌بندی را با π_i، $i = 1, 2, 3, \dots, t(G)$ نشان بدهیم. در حالتی که مرتبهٔ G زوج باشد، ما همیشه فرض می‌کنیم: $2 \in \pi_1$.

یکی از این روش‌های شناسایی گروه‌ها که در این مقاله مورد بحث است، شناسایی گروه با استفاده از بزرگ‌ترین مرتبهٔ عناصر و مرتبهٔ گروه می‌باشد؛ در این زمینه هی[1] وچن[2] ، در سال ۲۰۱۱ در [۸]، ثابت کردند که گروه‌های $L_2(q)$ با استفاده از مرتبهٔ گروه و بزرگ‌ترین عضو $\pi_e(G)$ یعنی $k_1(G)$، دومین عنصر بزرگ $\pi_e(G)$ که با نماد $k_2(G)$ نمایش می‌دهیم و سومین عنصر بزرگ $\pi_e(G)$ که با $k_3(G)$ نشان می‌دهیم، قابل شناسایی هستند. هم چنین شناسایی‌های دیگری با استفاده از همین روش در [۳، ۴، ۷ ، ۹ ،۱۰، ۱۱ ،۱۲ , ۱۷] ، می‌توان دید که در آنها K_3-گروه‌های ساده، K_4-گروه‌های ساده، گروه‌های سادهٔ پراکنده، گروه‌های خطی $L_2(q)$ و $L_3(q)$ که در آن $q \leq 8$، گروه‌های یکانی خاص تصویری $U_3(q)$ که در آن $q \leq 11$، گروه های خطی عام تصویری $PGL_2(q)$، K_4–گروه‌های ساده از نوع $L_2(p)$ که p عددی اول و $2^n - 1$ اول نیست، و گروه‌های سوزوکی $Sz(q)$ با استفاده از مرتبهٔ گروه و $k_1(G)$ انجام شده است. در این مقاله، ما نشان می‌دهیم که گروه‌های استینبرگ $^3D_4(2^n)$ که در آن $2^{4n} - 2^{2n} + 1$ عددی اول است به طور منحصر به فردی با استفاده از مرتبهٔ گروه و $k_1(G)$ قابل شناسایی است.

قضیهٔ اصلی این مقاله:

قضیهٔ اصلی: فرض کنیم G یک گروه و $D = {}^3D_4(2^n)$ به طوری که $2^{4n} - 2^{2n} + 1$ عددی اول است. در این صورت $k_1(G) = k_1(D)$ و $|G| = |D|$ اگر و تنها اگر $G \cong D$.

۲. تعاریف وقضایای مقدماتی:

در این بخش، تعدادی لم و تعریف راکه در اثبات قضیهٔ اصلی از آنها استفاده می‌کنیم ، بیان می‌کنیم.

لم ۲. ۱ ([۶]). فرض می‌کنیم G یک گروه فروبنیوس با هستهٔ K و متمم H باشد ، آن‌گاه:

۱) $t(G) = 2$، $\pi(K)$ و $\pi(H)$ مؤلفه‌های هم‌بند $\Gamma(G)$ هستند.

۲) $|H|$ عدد $|K| - 1$ را عاد می‌کند.

۳) K پوچ توان است.

تعریف ۲. ۲ . یک گروه G ، ۲-فروبنیوس می‌گوییم ، هرگاه دارای یک سری نرمال مانند $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ باشد؛ به طوری که $\frac{G}{H}$ و K گروه های فروبنیوس با هستهٔ $\frac{K}{H}$ و H باشند.

[1] He
[2] Chen

لم۲.۳ (**[۲]**). فرض کنیم: G گروه ۲-فروبنیوس از مرتبهٔ زوج باشد، در این صورت:

۱) $t(G)=2$ ، $\pi\left(\frac{K}{H}\right)=\pi_2$ و $\pi(H)\cup\pi\left(\frac{G}{H}\right)=\pi_1$.

۲) $\frac{G}{K}$ و $\frac{K}{H}$ گروه‌های دوری هستند و مرتبهٔ ی G/K ، مرتبهٔ $\mathrm{Aut}(\frac{K}{H})$ را عاد می‌کند.

لم۲.۴ (**[۱۸]**). فرض می‌کنیم: G یک گروه متناهی با $t(G)\geq 2$ باشد؛ در این صورت یکی از شرایط زیر برقرار است:

۱) G یک گروه فروبنیوس است.

۲) G یک گروه ۲-فروبنیوس است.

۳) G دارای یک سری نرمال $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$ است؛ به طوری که H و G/K، π_1-گروه و $\frac{K}{H}$ یک گروه ساده ی غیر آبلی است و H پوچ توان است و $|G/K|$ عدد $\left|Out(\frac{K}{H})\right|$ را عاد می‌کند. بعلاوه هر مؤلفه فرد از گراف اول G، یک مؤلفه فرد از گراف اول $\frac{K}{H}$ است.

لم۲ . ۵ (**[۱۵]**). فرض کنید: p و q دو عدد اول m و n دو عدد طبیعی باشند، به طوری که $p^m-q^n=1$؛ در این صورت یکی از شرایط زیر برقرار است:

۱) اگر $m=1$ باشد، آن‌گاه $p=2^{2^t}+1$ که $t\geq 0$ یک عدد صحیح است؛

۲) اگر $\mathrm{n}=1$ باشد، آن‌گاه $q=2^{p_0}-1$ که $p_0\geq 0$ یک عدد اول است؛

۳) اگر $m,n>1$ باشند، آن‌گاه $(p,q,m,n)=(3,2,2,3)$.

لم۲. ۶ (**[۱۹]**). فرض کنید: l,k,q اعداد طبیعی باشند. در این صورت:

۱) $\left(q^k-1,q^l-1\right)=q^{(k,l)}-1$

۲) $\left(q^k+1,q^l+1\right)=\begin{cases} q^{(k,l)}+1 & \text{اگرهردوعدد } \frac{l}{(k,l)} \text{ و } \frac{k}{(k,l)} \text{فرد باشند} \\ (2,q+1) & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

۳) $\left(q^k-1,q^l+1\right)=\begin{cases} q^{(k,l)}+1 & \text{اگر } \frac{l}{(k,l)} \text{فرد و } \frac{k}{(k,l)} \text{ زوج باشند} \\ (2,q+1) & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

درحالت خاص، برای هر $k\geq 1$ و $q\ \geq\ 2$ داریم $(q^k-1,q^k+1)\leq 2$.

لم۲.۷(**[۱۸]**) فرض کنید: G یک گروه سادهٔ غیر آبلی باشد، به طوری که $(5,|G|)=1$ است، در این صورت گروه G با یکی از گروه‌های زیر یک ریخت است:

۱) $L_n(q')$ به طوری که $n=2,3$ و $q'\equiv\pm 2(mod\ 5)$؛

۲) $G_2(q')$ به طوری که $q'\equiv\pm 2(\mathrm{mod}\ 5)$؛

۳) $U_3(q')$ به طوری که $q'\equiv\pm 2(\mathrm{mod}\ 5)$؛

۴) ${}^3D_4(q')$ به طوری که $q'\equiv\pm 2(mod\ 5)$؛

۵) ${}^2G_2(q')$ به طوری که $q'\equiv\pm 2(\mathrm{mod}\ 5)$.

۳. اثبات قضیهٔ اصلی:

در این بخش ثابت می‌کنیم که گروه‌های استینبرگ $^3D_4(2^n)$ وقتی q^4-q^2+1 عددی اول است ($q=2^n$) با استفاده از مرتبهٔ گروه و مرتبهٔ بزرگ‌ترین عضو $\pi_e(G)$ قابل شناسایی است.

در ادامه، برای راحتی کار عدد اول q^4-q^2+1 را با p نشان می‌دهیم. بدیهی است که اگر $G\cong D$ آن‌گاه $k_1(G)=k_1(D)$ و $|D|=|G|$. حال ثابت می‌کنیم که شرط کافی برقرار است؛ یعنی اگر $k_1(G)=k_1(D)$ و $|D|=|G|$ آن‌گاه $G\cong D$. ابتدا بنا به [۱۳] داریم $k_1(D)=(q^3-1)(q+1)$. نشان می‌دهیم که p رأس تنها در $\Gamma(G)$ است. برای این منظور فرض می‌کنیم: p رأس تنها نباشد؛ بنابراین عدد طبیعی مانند t وجود دارد، به طوری که $tp\in\pi_e(G)$. در نتیجه:

$$tp\geq 2p=2(q^4-q^2+1)>(q^3-1)(q+1)؛$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$tp>k_1(G)=(q^3-1)(q+1)$$

که یک تناقض است؛ پس $t(G)\geq 2$. اینک فرض لم ۲ .۴ برای گروه G برقرار است؛ نشان می‌دهیم که شروط ۱ و۲ لم برقرار نیست و با استفاده از شرط سوم یک ریختی را نشان خواهیم داد.

لم ۳ .۲. G یک گروه فروبنیوس نیست.

برهان: فرض کنیم G گروه فروبنیوس با هسته K و متمم H باشد در این صورت بنابر لم (۲ .۱)، داریم: $t(G)=2$ و $\pi(H)$ و $\pi(K)$ مجموعه ی رئوس مؤلفه های هم بندی $\Gamma(G)$ هستند. حال از این که p رأس تنهای $\Gamma(G)$ است، دو حالت زیر را در نظرمی گیریم:

i) $|H|=\frac{|G|}{p}$ و $|K|=p$.

ii) $|K|=\frac{|G|}{p}$ و $|H|=p$.

فرض کنیم : حالت(i) برقرار باشد، در این صورت بنابر لم (۲ .۱)، $\frac{|G|}{p}\,|\,p-1$؛ بنابراین $|G|\leq p(p-1)$ که یک تناقض است.

حال فرض می کنیم حالت (ii) برقرار باشد؛ در این صورت داریم $p|\frac{|G|}{p}-1$، در نتیجه خواهیم داشت:

$$(q^4-q^2+1)|\frac{q^{12}(q^8+q^4+1)(q^6-1)(q^3-1)}{q^4-q^2+1}-1،$$

با ساده کردن عبارت بالا داریم:

$$(q^4-q^2+1)|\frac{(q^{29}-q^{26}+q^{25}-q^{23}+q^{21}+q^{20}-q^{19}-q^{18}+q^{16}-q^{15}+q^{12})}{q^4-q^2+1}؛$$

بنابراین

$$(q^4-q^2+1)|(q^{25}+q^{23}-q^{22}+q^{21}-q^{20}-q^{19}-q^{18}-q^{17}+q^{16}-q^{15}+q^{14}+q^{12}-1)$$

و در نهایت بعد از ساده کردن عبارت بالا داریم $(q^4-q^2+1)|(5q^3+4q^2+5q)$، که این یک تناقض است؛ بنابراین G یک گروه فروبنیوس نیست.

لم ۳ . ۳. G یک گروه ۲ - فروبنیوس نیست.

برهان: فرض کنیم G یک گروه ۲ – فروبنیوس باشد. بنا به لم (۳.۲)، G دارای یک سری نرمال $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ است؛ به طوری که $\frac{G}{H}$ و K گروههای فروبنیوس با هسته‌های $\frac{K}{H}$ و H و هم چنین داریم:

$$\pi(H)\cup\pi(\frac{G}{K}) = \pi_1 \text{، } \pi(\frac{K}{H})=\pi_2 \text{ و } \left|\frac{G}{K}\right|\,||\mathrm{Aut}(\frac{K}{H})| .$$

حال از این که p یک رأس تنها در $\Gamma(G)$ است، $\pi_2 = \{p\}$ و $\left|\frac{K}{H}\right| = p$. با توجه به این که $p = q^4 - q^2 + 1$ و

$$|G/K|||Aut(\frac{K}{H})|$$

نتیجه می‌شود: $\left|\frac{G}{K}\right|\,|p-1$. واضح است که $q^4 - q^2 + 1 = \frac{q^{12}-1}{(q^6-1)(q^2+1)}$. از طرفی بنابه لم ۳ از [۱۶] داریم

$$(\frac{q^{12}-1}{q^6-1}, q^6-1)=(2, q^6-1) =1\text{؛}$$

که نتیجه می‌شود $(q^4 - q^2 , 2(q^6-1)-1) = 1$. از این که $\left|\frac{G}{K}\right|\,|p-1$ داریم $|H|\,|2(q^6-1)-1$. با توجه به این که H پوچ توان است؛ $\frac{K}{H} \rtimes H_t$ گروهی فروبنیوس با هستهٔ H_t و متمم $\frac{K}{H}$ است؛ به طوری که t برابر است با $2(q^6-1)-1$. بنا به لم (۱.۲) $|K/H|||H_t|-1$؛ پس داریم:

$$(q^4 - q^2 + 1)|(2(q^6-1)-2)$$

که این یک تناقض است؛ بنابراین G یک گروه ۲ - فروبنیوس نیست.

لم ۳ .۴. G با D یک‌ریخت است.

برهان: ابتدا بنابر لم (۲ . ۴)، $t(G) \geq 2$؛ بنابراین G در یکی از شرایط لم (۲ .۴) صدق می‌کند؛ حال با توجه به لم‌های (۲.۳) و (۳ .۳)، G در شرط ۳ از لم (۲ .۴) صدق می‌کند؛ در نتیجه: G دارای یک سری نرمال مانند

$$1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$$

است؛ به طوری که H و G/K یک π_1–گروه و $\frac{K}{H}$ یک گروه سادهٔ ناآبلی، H پوچ توان و مرتبهٔ $\frac{G}{K}$ مرتبهٔ $Out(\frac{K}{H})$ را عاد می‌کند؛ بعلاوه هر مؤلفهٔ مرتبهٔ فرد از G یک مؤلفهٔ مرتبهٔ فرد از $\frac{K}{H}$ است. از این‌که p رأس تنهای $\Gamma(\mathrm{G})$ است داریم $p|\left|\frac{K}{H}\right|$ و $t(\frac{K}{H}) \geq 2$. از طرف دیگر بنا به لم (۲ .۷)، $5 \nmid |G|$. از طرفی می‌دانیم که $\left|\frac{K}{H}\right|\,||G|$ ، در نتیجه $5 \nmid \left|\frac{K}{H}\right|$ بنابراین گروه $\frac{K}{H}$ با یکی از گروه‌های لم (۲ .۷) یک‌ریخت است. ابتدا توجه می‌کنیم که برای گروه‌های $^3D_4(2^n)$ داریم:

$$|^3D_4(2^n| = q^{12}(q^8+q^4+1)(q^6-1)(q^3-1) \text{ و } k_1(^3D_4(2^n)) = q^4+q^3-q-1.$$

اکنون حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول): اگر $\frac{K}{H} \cong G_2(q')$ که در آن $q' \equiv \pm 2(mod\ 5)$، آنگاه بنابر [۱۳] داریم:

$$k_1(G_2(q')) = q'^2 + q' + 1.$$

چون $k_1\left(G_2(q')\right) = k_1(G)$، بنابراین خواهیم داشت: $q^4 + q^3 - q - 1 = q'^2 + q' + 1$؛ در نتیجه:

$$q'^2 + q' = q^4 + q^3 - q - 2.$$

اینک با جای‌گذاری مقدار q به رابطهٔ زیر می رسیم:

$$q'(q'+1)=2^{4n}+2^{2n}-2^{n}-2=2(2^{4n-1}+2^{3n-1}-2^{n-1}-1)$$

ازطرف دیگر چون $(q',q'+1)=1$، $q'=2$ یا $q'+1=2^{4n-1}+2^{3n-1}-2^{n-1}-1$؛ درنتیجه، معادله‌های $q^4+q^3-q=8$ و $2^{4n-1}+2^{3n-1}-2^{n-1}=4$ ب] دست می‌آیند؛ به وضوح می‌بینیم که هیچ کدام جوابی ندارد؛ بنابراین به تناقض می‌رسیم.

حالت دوم) اگر $\frac{K}{H}\cong {}^2G_2(q')$ که در آن $q'=3^{2m+1}$، آن گاه بنابر [۱۳]، داریم:

$$k_1({}^2\mathrm{G}_2(q'))=q'+\sqrt{3q'}+1.$$

با برابر قرار دادن بزرگ‌ترین مرتبهٔ عناصر دوگروه داریم: $q^4+q^3-q-1=\quad q'+\sqrt{3q'}+1$؛ بنابراین

$$2^{4n}+2^{3n}-2^{n}-2=3^{m+1}(3^{m}+1).$$

حال با جای‌گذاری مقدار $q'=3^{2m+1}$ درعبارت قبلی رابطهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

$$2(2^{4n-1}+2^{3n-1}-2^{n-1}-1)=3^{m+1}(3^{m}+1).$$

از طرف دیگر از این که $(3^{m+1},(3^{m}+1))=1$، داریم:

$$(2^{4n-1}+2^{2n-1}-2^{n-1}-1)=3^{m+1} \text{ و } 2=3^{m}+1$$

که هردو حالت به تناقض می رسیم. به عنوان مثال اگر $3^{m}+1=2$ آن گاه $3^{m}=1$ درنتیجه $m=0$ و $q'=3$؛ بنابراین داریم: $2^{4n-1}+2^{2n-1}-2^{n-1}=4$ که این یک تناقض است.

حالت سوم) اگر $\frac{K}{H}\cong L_2(q')$ که در آن $q'\equiv\pm2(\mathrm{mod}\ 5)$ و $q'=p'^{m}$، آن‌گاه بنابر [۱۳]، داریم:

$$k_1\left(\mathrm{L}_2(q')\right)=q' \text{ یا } q'+1.$$

ابتدا فرض می‌کنیم: $k_1\left(L_2(q')\right)=q'$، بنابراین $q^4+q^3-q-1=q'$؛ در این صورت خواهیم داشت: $|G|\nmid|L_2(q')|$ که این یک تناقض است. اگر $q^4+q^3-q-1=q'+1$، آن گاه

$$q^4+q^3-q-2=q'.$$

باردیگر از این که $|G|\nmid|L_2(q')|$، به یک تناقض می رسیم.

حالت چهارم) اگر $\frac{K}{H}\cong L_3(q')$ که در آن $q'\equiv\pm2(\mathrm{mod}\ 5)$، آن‌گاه بنا به [۱۳] داریم:

$$k_1(L_3(q'))=q'^2+q'+1 \text{ یا } (q'^2+q'+1)/3.$$

ابتدا فرض کنید: $q^4+q^3-q-1=q'^2+q'+1$. آن‌گاه با ساده کردن دو طرف تساوی داریم:

$$q'^2+q'=q^4+q^3-q-2;$$

بنابراین داریم: $q'(q'+1)=2(2^{4n-1}+2^{3n-1}-2^{n-1}-1)$. حال از این که $(q',q'+1)=1$ داریم:

$$q'=2 \text{ یا } q'+1=2^{4n-1}+2^{3n-1}-2^{n-1}-1.$$

بنابراین معادله‌های $8 = q^4 + q^3 - q$ و $4 = 2^{4n-1} + 2^{3n-1} - 2^{n-1}$ را به دست می‌آوریم که به وضوح هیچ کدام جوابی ندارند؛ بنابراین به تناقض می‌رسیم.

اینک اگر داشته باشیم $q^4 + q^3 - q - 1 = (q'^2 + q' + 1)/3$ آن‌گاه

$3q^4 + 3q^3 - 3q - 4 = q'(q' + 1)$.

به آسانی می‌توانیم، ببینیم که این معادلهٔ جوابی ندارد.

حالت پنجم) اگر $\frac{K}{H} \cong U_3(q')$ که درآن $q' \equiv \pm 2 (\mathrm{mod}\ 5)$، آن گاه بنا به ، داریم:

$k_1\left(U_3(q')\right) = q'^2 + q'$ یا $(q'^2 + q')/3$.

اگر $q^4 + q^3 - q - 1 = q'^2 + q'$ آنگاه $q^4 + q^3 - q - 2 = q'^2 + q'$ -1؛ بنابراین

$q^4 + q^3 - q - 1 = q'(q' + 1)$.

با ساده کردن رابطهٔ بالا داریم؛ $(q-1)(q^3 + 2q^2 + 2q + 1) = q'(q' + 1)$. چون

$(q', q' + 1) = 1$؛

بنابراین $q' = (q-1)$ و $(q' + 1) = q^3 + 2q^2 + 2q + 1$ که به وضوح این یک تناقض است.

اگر $q^4 + q^3 - q - 1 = (q'^2 + q')/3$ آن‌گاه $3q^4 + 3q^3 - 3q - 3 = q'^2 + q'$. اینک داریم:

$q'(q' + 1) = 3(q^4 + q^3 - q - 1)$،

با توجه به این که $(q', q' + 1) = 1$ داریم: $q' = 3$ و $q^4 + q^3 - q - 1 = (q' + 1)$؛ در نتیجه:

$q^4 + q^3 - q = 5$.

چون $q = 2^n$؛ به وضوح یک تناقض حاصل می‌شود.

بنابراین لم (۲ .۷) نتیجه می‌دهد: $\frac{K}{H} \cong D$ پس $|G| = |D| = \left|\frac{K}{H}\right|$. ازطرفی چون G دارای سری نرمال

$$1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$$

است، خواهیم داشت: $|H| = 1$. چون $p \mid \left|\frac{K}{H}\right|$، پس $p \in \pi_2(D)$ لذا $p = p'$؛ در نتیجه:

$q^4 - q^2 + 1 = q'^4 - q'^2 + 1$.

از طرفی از این که $k_1(G) = k_1(D)$ داریم :

$q^4 + q^2 - q - 1 = q'^4 + q'^2 - q' - 1$؛

در نتیجه: $q = q'$. از طرفی چون $|G| = |D| = |K|$؛ بنابراین $G = K \cong D$.

References

1. Bugeaud Y., Cao Z., Mignotte M., On simple K_4-groups, J. Algebra, 241 (2001) 658-668.
2. Chen G. Y., On the structure of Frobenius groups and 2-Frobenius groups, J. Southwest China Normal University., 20(5)(1995) 485-487.
3. Chen G. Y., He L. G., Xu H. J., A new characterization of sporadic simple groups", Ital. J. Pure Appl. Math., 30 (2013) 373-392.
4. Ebrahimzadeh B., Iranmanesh A., Tehranian A, Parvizi Mosaed H., A characterization of the suzuki groups by order and the largest elements order", Sci. Islam. Repub. Iran., 27(4)(2016) 353-355.
5. Frobenius G., Verallgemeinerung des sylow'schen satzes, Berliner sitz, (1895) 981-993.
6. Gorenstein D., *Finite groups,* Harper and Row, New York (1980).
7. He L. G., Chen G. Y., A new characterization of Simple K_3-groups, Comm. Algebra, 40(10) (2012) 3903-3911.
8. He L. G., Chen G. Y., A new characterization of $L_2(q)$ where $q = p^n < 125$, Ital. J. Pure Appl. Math, 28 (2012) 125-134.
9. He L. G., Chen G. Y., A new characterization of $L_3(q)$ ($q \leq 8$) and $U_3(q)$ ($q \leq 11$), J. Southwest Uni. (Nature Science Edition), 33(10) (2011) 81-87.
10. He L. G and Chen G. Y., A new characterization of simple K_4-groups with type $L_2(p)$, Adv. Math. (China) 43 (5) (2014) 667–670
11. He L. G., Chen G. Y., A new characterization of simple K_4 −groups, J. Math. Res. Appl, 35(4)(2015) 400-406.
12. Jiang Q., Shao C., Characterization of some $L_2(q)$ by largest element orders, Math. Reports, 17(67) (2015) 353-358.
13. Kantor W., Seress A., Large element orders and the characteristic of Lie-type simple groups, J.Algebra, 322 (2009) 802–832

14. Khalili A., Iranmanesh A., A new characterization of linear groups $L_2(p)$, Czechoslovak Math. J, 64(2) (2014) 459-464.

15. Khosravi A., Khosravi B., A new characterization of some alternating and symmetric groups (II)", Houston J. Math, 30(4) (2004)465-478.

16. Kondrat'ev A. S., Prime graph components of finite simple groups, Mathematics of the USSR-Sbornik, 67(1) (1990) 235-247.

17. Li J., Shi W. J., Yu D., A characterization of some $PGL_2(q)$ by maximum element order, Bull. Korean Math. Soc, 52(6) (2015)2025-2034.

18. Shi W. J., A characterization of $U_3(2^n)$by their element orders, J. Southwest-China Normal Univ, 25(4)(2000)353-360.

19. Williams J. S., Prime graph components of finite groups, J. Algebra, 69(2), (1981) 487-513.

20. Zavarnitsine A. V., Recognition of the simple groups $L_3(q)$ by element orders, J. Group Theory, 7(1) (2004) 81-97.