Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Fundamental groupoid and Whisker topology

Ali Pakdaman[1] ✉, **Fereshteh Shahini**[2]

1. Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Golestan University, Gorgan, Iran.
   ✉E-mail: a.pakdaman@gu.ac.ir
2. Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Golestan University, Gorgan, Iran.
   E-mail: freshte.shahini@gmail.com

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
27 September 2020
Received in revised form:
1 May 2021
Accepted:
11 July 2021
Published online:
20 June 2023

Keywords:
Fundamental groupoid,
Whisker topology,
Topological groupoid.

ABSTRACT

Introduction

Algebraic structures on topological spaces can't distinguish all the non-homeomorphic spaces. Recently, by equipping some of these algebraic structures with topology, one can separate the non-homeomorphic spaces with the same algebraic structures. Particularly, the fundamental group is equipped by the various types of topologies which some of them make it a topological group and some of them don't. Virk and Zastrow has studied the generalizations of the existing topologies on the fundamentalgroup to the universal path spacew ith a proper comparison. If we remove the condition $\alpha(0) = x_0$ from the definition of the universal path space, we obtain an object that have been discussed in mathematical literatures under the name " fundamental groupoid". Indeed, fundamental groupoid denoted by πX, is the category of homotopy classes of paths in X as the morphisms and has the set X as the objects set. For any $x, y \in X$, the set $\pi X(x, y)$ is the set of homotopy classes of paths in X from x to y. We can consider the object group at x, $\pi X(x)$, as the well-known fundamental group $\pi_1(X, x)$.

In order to answer the question how these topologies can be generalized on the fundamental groupoids, the authors has introduced the Lasso topology on the fundamental groupoid of a locally path connected space in which makes it a topological groupoid. A topological groupoid is a groupoid G together with topologies on G and G_0 such that the structure maps are continuous.

R. Brown and G. Danesh-Naruie were the first and only ones to take this step. They have defined a topology on a quotient of the fundamental groupoid such that it became

a topological groupoid when the given space X is locally path connected and semilocally simply connected.

Here, we introduce whisker topology on the fundamental groupoid of a locally path connected space X in which it's basis is known and by some assumptions, we can consider it as a generalization of the whisker topology on the fundamental group.

Material and methods

For a given topological space (X,τ), let $[\alpha] \in \pi X(x,y)$where , $x,y \in X$. If $V,\ W$ are open neighborhoods of x, y, respectively, one can define

$N([\alpha],V,W) := \{[\beta] \in \pi X |\ \beta \simeq \gamma * \alpha * \lambda, \gamma(I) \subseteq V, \lambda(I) \subseteq W\}$,

where $\gamma(1) = \alpha(0) = x$ and $\alpha(1) = \lambda(0) = y$.

Theorem: The family

$\{N([\alpha],V,W); [\alpha] \in \pi X(x,y), x \in V \in \tau, y \in W \in \tau\}$

forms a basis for a topology on fundamental groupoid.

The topology that is generated by this basis, is called Whisker topology.

Conclusion

Based on the results that we presented in this paper:

If X is a small loop transfer space;

The multiplication map $m: \pi^{wh}X \times \pi^{wh}X \to \pi^{wh}X$ is continuous.

The fundamental groupoid with the Whisker topology is a topological groupoid.

The inherited topology from fundamental groupoid $\pi^{wh}X$ on the object group $\pi^{wh}X(x)$ equals to the Whisker topology on $\pi_1(X,x)$.

How to cite: Pakdaman, A., Shahini, F. (2023). Fundamental groupoid and Whisker topology. *Mathematical Researches*, 9 (1), 55-71.

 Publisher: Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Kharazmi University

گروه‌وار بنیادین و توپولوژی ویسکر

علی پاکدامن[1]✉، فرشته شاهینی[2]

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه گلستان، گرگان، ایران. رایانامه: a.pakdaman@gu.ac.ir
۲. گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه گلستان، گرگان، ایران. رایانامه: freshte.shahini@gmail.com

اطلاعات مقاله	چکیده

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۷/۰۶
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۲/۱۱
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۴/۲۰
تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۰۳/۳۰

واژه‌های کلیدی:
گروه‌وار بنیادین،
توپولوژی ویسکر،
گروه‌وار توپولوژیکی.

این مقاله به معرفی توپولوژی ویسکر بر گروه‌وار بنیادین و ارتباط این توپولوژی با توپولوژی ویسکر بر گروه بنیادین می‌پردازد. همچنین شرایطی را ارائه خواهد داد که از گروه‌وار بنیادین یک گروه‌وار توپولوژیکی به دست آید.

استناد: پاکدامن، علی؛ شاهینی، فرشته؛ (۱۴۰۲). گروه‌وار بنیادین و توپولوژی ویسکر. *پژوهش‌های ریاضی*، ۹ (۱)، ۷۱-۵۵.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱- مقدمه

برای مطالعهٔ بهتر و دقیق‌تر فضاهای توپولوژیکی، می‌توان ساختارهای جبری به این فضاها نسبت داد به طوری‌که فضاهای همسانریخت[1]، ساختارهای جبری یکریخت داشته باشند. از جمله این ساختارها می‌توان به گروه بنیادین، گروه‌های هموتوپی، گروه‌های همولوژی[2] و کوهمولوژی[3] اشاره داشت. در این بین فضاهایی پیدا می‌شوند که تمامی ساختارهای جبری مربوط به آن‌ها یکریخت بوده و از این‌رو نمی‌توان غیرهمسانریخت بودن آنها را نتیجه گرفت. در سال‌های اخیر با تجهیز این ساختارهای جبری به توپولوژی، تابعگون‌هایی[4] ساخته شده است که می‌توانند چنین فضاهایی را از یکدیگر تمیز دهند. عمده این تحقیقات بر گروه‌های هموتوپی و به‌طور ویژه بر گروه بنیادین[5] انجام شده است[۸،۳،۲].

گروه بنیادین نخستین بار توسط دوگنجی[6] [۷] به توپولوژی مجهز شده است.کار او به دلیل پرداختن به فضاهای به طور موضعی خوب و خاص، به عنوان ابزاری کارا مطرح نشد. اما برای فضاهای با رفتار موضعی پیچیده، توپولوژی‌هایی بر گروه بنیادین معرفی شد که توانستند فضاهای غیرهمسانریخت با گروه بنیادین یکریخت را تشخیص دهند. توپولوژی خارج قسمتی، توپولوژی لاسو[7]، توپولوژی ویسکر[8] و توپولوژی برازاس[9] نمونه های مهم از این توپولوژی‌ها هستند. همواره بزرگترین چالش در مسیر معرفی توپولوژی بر گروه بنیادین پیوسته بودن عمل ضرب بوده است.

گروه‌وار بنیادین یک فضای توپولوژیکی نیز یکی از این ساختارهای جبری است که نخستین بار توسط براون[10] و دانش ناروئی[11] [۶] برای فضاهای همبند مسیری موضعی و همبند ساده نیم موضعی[12] به توپولوژی تجهیز و به یک گروه‌وار توپولوژیکی تبدیل شده است تا بتواند فضاهای پوششی را با استفاده از زیرگروه‌های نرمال از گروه بنیادین طبقه‌بندی نماید. با ظهور زیرگروه‌های جدید از گروه بنیادینِ فضاهای پیچیده موضعی که نقشی اساسی در مطالعه گروه بنیادین توپولوژیکی داشته‌اند، به نظر می‌رسد که بتوان گروه‌وار بنیادین این فضاها را نیز به توپولوژی‌هایی مجهز نمود که از آن‌ها گروه‌وار بنیادین توپولوژیکی ساخت. برای فضای غیرهمبند ساده نیم موضعی X، نویسندگان در تحقیقی [۱۰] با استفاده از زیرگروه‌های اسپنیر[13] از گروه بنیادین، یعنی $\pi_1(\mathfrak{U},x)$ که در آن $\mathfrak{U}$ پوششی باز از X است، توپولوژی لاسو را بر گروه‌وار بنیادین معرفی نموده‌اند که از گروهوار بنیادین یک گروه‌وار توپولوژیکی ساخته و تعمیمی از گروه بنیادین توپولوژیکی با توپولوژی لاسو می باشد. در اینجا، قصد داریم توپولوژی ویسکر را بر گروه‌وار بنیادین معرفی نماییم. برای زیرگروه G از $\pi_1(X,x)$ ساختن نگاشت پوششی $p:\tilde{X}_G\rightarrow X$ به طوری‌که $p_*(\pi_1(\tilde{X}_G,x))=G$ با استفاده از توپولوژی ویسکر انجام می‌گردد [۱۲] و همین موضوع باعث شده که مطالعه توپولوژی ویسکر نقشی مهم در طبقه‌بندی نگاشت‌های پوششی برای فضای $\tilde{X}_G$ داشته باشد. این توپولوژی نخستین بار توسط برودسکی[14] و همکاران [۴] بر گروه بنیادین نهاده شد. گروه بنیادین مجهز به این توپولوژی که با $\pi_1^{wh}(X,x)$ نشان داده می‌شود یک گروه توپولوژیکی نیست زیرا نگاشت ضرب از راست برای $\pi_1^{wh}(X,x)$ لزوما پیوسته نمی‌باشد ([۴، گزاره ۴,۱۰]). گروه‌وار بنیادین نیز با

1Homeomorphic
2 Homology
3 Cohomology
4 Functor
5 Fundamental group
6 Dugundji
7 Lasso topology
8 Whisker topology
9 Brazas topology
10 Brown
11 Danesh_ Naruie
12 Semilocally simply connected
13 Spanier
14 Brodskiy

توپولوژی ویسکر که بر آن تعریف خواهیم نمود یک گروه‌وار توپولوژیکی نخواهد شد و ما شرایطی را بر فضای X می‌یابیم که گروه‌وار بنیادین فضای X با توپولوژی ویسکر، یعنی $\pi^{wh}X$ یک گروه‌وار توپولوژیکی شود. همچنین، در این مسیر به دنبال مهیا کردن شرایطی بر فضای X هستیم که تحت آن شرایط $\pi^{wh}X(x,x)$ و $\pi_1^{wh}(X,x)$ با هم یکسان باشند.

۲- تعاریف و قضایای مقدماتی

در سراسر این مقاله، بازه‌ی بسته‌ی $[0,1]$ را با I نشان داده و برای فضای توپولوژیکی X نگاشت پیوسته $\alpha: I \to X$ را مسیری از $x_0 = \alpha(0)$ به $x_1 = \alpha(1)$ نامیده و در صورتی‌که $\alpha(0) = \alpha(1)$ باشد، مسیر α را مسیری بسته یا یک طوقه[۱] می‌نامیم. مسیر α^{-1} تعریف شده به صورت $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$ مسیر وارون α از x_1 به x_0 است. برای هر $x \in X$ منظور از C_x مسیر ثابت در X بوده و اگر $\alpha, \beta: I \to X$ دو مسیر باشند که $\alpha(1) = \beta(0)$ آنگاه $\alpha * \beta$ حاصلضرب مسیری آن‌ها است. همچنین، تمامی هموتوپی‌هایی که بین دو مسیر هستند، هموتوپی مسیری نامیده می‌شود.

تعریف ۱. ۱. [۹، بخش ۱,۱] گروه‌وار (G, G_0)، رسته‌ای با مجموعه ریخت‌های G و مجموعه اشیاء G_0 به همراه پنج نگاشت ساختاری زیر است:

- نگاشت مبدا[۲] $S: G \to G_0$
- نگاشت هدف[۳] $T: G \to G_0$
- نگاشت واحد $1: G_0 \to G$ که $1(x) = 1_x$
- نگاشت وارون $i: G \to G$ که $i(a) = a^{-1}$
- نگاشت ضرب $m: G_2 \to G$ که $m(a;b) = ab$ و $G_2 = \{(a;b) \in G \times G | S(b) = T(a)\}$

این نگاشت‌ها در شرایطی که در زیر آمده صدق می‌کنند:

۱) برای هر $(a;b) \in G_2$ داریم $S(ab) = S(a)$ و $T(ab) = T(b)$،

۲) برای هر $a,b,c \in G$ به‌طوری‌که $S(b) = T(a)$ و $S(c) = T(b)$ داریم $a(bc) = (ab)c$،

۳) برای هر $x \in G_0$ داریم $S(1_x) = T(1_x) = x$،

۴) برای هر $a \in G$ داریم $a1_{T(a)} = a$ و $1_{S(a)}a = a$،

۵) هر $a \in G$ دارای یک وارون دوطرفه است به‌طوری‌که $\begin{cases} T(a^{-1}) = S(a),\ S(a^{-1}) = T(a) \\ a^{-1}a = 1_{T(a)},\ aa^{-1} = 1_{S(a)} \end{cases}$

1 Loop
2 Source map
3 Target map

اگر زوج (G, G_0) یک گروه‌وار باشد می‌گوییم G یک گروه‌وار بر G_0 است. ریخت 1_x متناظر با شیء $x \in G_0$ همانی متناظر با x نامیده شده و مجموعه‌ی ریخت‌ها از شیء x به شیء y را با $G(x, y)$ نشان می‌دهیم و در حالت خاص $G(x) := G(x, x)$ را گروه شیء[1] در x می‌نامیم. همچنین مجموعه همه ریخت‌ها با مبدا x را با $G(x, -)$ و مجموعه همه ریخت‌ها با هدف y را با $G(-, y)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف۱. ۲. [۵، بخش۶,۲] اگر X فضایی توپولوژیکی باشد. گروه‌وار بنیادین πX، اعضای X را به عنوان اشیاء داشته و برای هر $x, y \in X$، مجموعه‌ی $\pi X(x, y)$، مجموعه کلاس هموتوپی همه‌ی مسیرها در X از x به y است. برای مسیرهای α و β در X که $\alpha(1) = \beta(0)$، ضرب ریخت‌های $[\alpha]$ و $[\beta]$ به صورت $[\alpha * \beta]$ بوده و $e_x = [C_x]$ عنصر همانی در $\pi X(x, x)$ است. همچنین $\pi X(x)$، گروه شیء در x، همان گروه بنیادین $\pi_1(X, x)$ می‌باشد.

تعریف۱. ۳. [۹، بخش ۱,۲] فرض کنید G و G' دو گروه‌وار به‌ترتیب بر G_0 و G'_0 باشند. یک همریختی گروه‌واری، زوج (F, f) است به‌طوری‌که $F: G \to G'$ و $f: G_0 \to G'_0$ به گونه‌ای تعریف می‌شوند که هر شیء x از گروه‌وار G را به شیء $f(x)$ از گروه‌وار G' و هر ریخت $a \in G(x, y)$ را به ریخت $F(a) \in G'(f(x), f(y))$ می‌برند و برای هر $(a, b) \in G_2$ داریم $F(ab) = F(a)F(b)$. همچنین $SoF = foS$ و $ToF = foT$.

تعریف۴,۱. [۵، صفحه ۳۸۶] اگر مجموعه اشیاء و ریخت‌های گروه‌وار (G, G_0) مجهز به توپولوژی‌هایی باشند که نگاشت‌های ساختاری بیان شده در تعریف گروه‌وار پیوسته باشند، آن‌گاه (G, G_0) را گروه‌وار توپولوژیکی می‌نامیم. به منظور سادگی در نوشتار، گاهی فقط می‌نویسیم G یک گروه‌وار توپولوژیکی است.

در گروه‌وار توپولوژیکی G برای هر $a \in G(x, y)$ نگاشت انتقال از راست[2] $R_a: G(-, x) \to G(-, y)$ با ضابطه $R_a(b) = ba$ و نگاشت انتقال از چپ[3] $l_a: G(y, -) \to G(x, -)$ با ضابطه $l_a(b) = ab$ همسانریختی می‌باشند [۹، بخش ۱,۱]

تعریف ۵,۱. [۱۱، تعریف ۱۰] گروه G به همراه یک توپولوژی بر آن را یک گروه شبه توپولوژیکی[4] گوییم هرگاه نگاشت وارون و نگاشت‌های انتقال از راست و انتقال از چپ پیوسته باشند.

۳- نتایج اصلی

برای فضای توپولوژیک نقطه دار (X, x) و زیرگروه دلخواه $H \leq \pi_1(X, x)$ رابطه‌ی $\sim_H$ بر فضای $P(X, x)$ (مجموعه همه مسیرها در X که از نقطه x شروع می‌شوند به همراه توپولوژی فشرده- باز) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha \sim_H \beta \iff \alpha(1) = \beta(1),\ [\alpha * \beta^{-1}] \in H.$$

1 Object group

2 Right translation

3 Left translation

4 Quasitopological group

کلاس هم‌ارزی مسیری مانند α را با $\langle\alpha\rangle_H$ نمایش داده و فضای خارج قسمتی حاصل از رابطه هم ارزی $\sim_H$ را با نماد $\tilde{X}_H = \frac{P(X,x)}{\sim_H}$ نمایش می‌دهند.

نگاشت $P_H : \left(\tilde{X}_H, e_H\right) \to (X,x)$ که با ضابطه $\langle\alpha\rangle_H \mapsto \alpha(1)$ تعریف شده و e_H کلاس هم ارزی مسیر ثابت در x است، نگاشت تصویر نقطه انتها نامیده می‌شود. زمانی که $H = \{e\}$ زیر گروه بدیهی از گروه بنیادین باشد، آن را فضای مسیری جهانی[1] برای فضای X خوانده و با نماد $\tilde{X}_e$ نمایش می‌دهند. دراین‌صورت نگاشت $f\colon \pi_1(X,x) \to p_e^{-1}(x)$ که هر عضو مانند $[\alpha]$ را به $\langle\alpha\rangle_H$ انتقال می‌دهد، دوسویی است[۱۲، صفحه ۸۲].

نخستین بار اسپنیر[۱۲، بخش ۲,۵] با استفاده از ادامه یک مسیر در یک همسایگی دلخواه از نقطه انتهای آن، یک توپولوژی طبیعی بر فضای $\tilde{X}_H$ را به صورت زیر تعریف کرد.

برای کلاس هم ارزی $\langle\alpha\rangle_H$ مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی ادامه‌های α در همسایگی U از $\alpha(1)$ را با نماد $N\left(\langle\alpha\rangle_H, U\right)$ نمایش می‌دهیم. یعنی

$$N\left(\langle\alpha\rangle_H, U\right) = \{ (\langle\beta\rangle_H \in \tilde{X}_H \big| \ \beta \simeq \alpha * \lambda;\ \lambda\colon (I,0) \to (U, \alpha(1)) \}.$$

گردایه همه $N\left(\langle\alpha\rangle_H, U\right)$ برای هر $\langle\alpha\rangle_H \in \tilde{X}_H$ و هر همسایگی باز U از $\alpha(1)$ یک پایه توپولوژی بر $\tilde{X}_H$ تشکیل می‌دهد [۱۲، بخش ۲,۵] که بعدها برودسکی و همکارانش در [۴] آن را توپولوژی ویسکر نامیدند.

با استفاده از نگاشت $f\colon \pi_1(X,x) \to p_e^{-1}(x)$ می‌توان توپولوژی ویسکر را به گروه بنیادین انتقال داد. گروه بنیادین توپولوژی دار شده توسط این روش را با $\pi_1^{wh}(X,x)$ نمایش می‌دهند [۴ ، تعریف ۴,۲].

ازآنجایی‌که انتقال‌های راست در $\pi_1^{wh}(X,x)$ پیوسته نیستند [۴، گزاره ۱۰,۴] $\pi_1^{wh}(X,x)$ یک گروه شبه توپولوژیکی و در نتیجه یک گروه توپولوژیکی نیست. اما اگر انتقال‌های راست در $\pi_1^{wh}(X,x)$ پیوسته باشند آن‌گاه $\pi_1^{wh}(X,x)$ یک گروه توپولوژیکی است[۱].

اگر چه ممکن است $\pi_1^{wh}(X,x)$ یک گروه توپولوژیکی نباشد ولی برخی از خواص گروه‌های توپولوژیکی را دارد، از جمله اینکه هر زیر گروه باز از $\pi_1^{wh}(X,x)$، بسته نیز می‌باشد[۱].

در ادامه با الهام از توپولوژی ویسکر بر گروه بنیادین، یک توپولوژی بر گروه‌وار بنیادین معرفی خواهیم نمود.

تعریف ۱,۲. اگر x و y نقاطی دلخواه در فضای مفروض X باشند و $[\alpha] \in \pi X(x,y)$، برای همسایگی‌های باز V و W از X که به‌ترتیب شامل x و y می‌باشند، زیرمجموعه $N([\alpha], V, W)$ از πX را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$N([\alpha], V, W) = \{[\beta] \in \pi X |\ \beta \simeq \gamma * \alpha * \lambda,\ \gamma(I) \subseteq V,\ \lambda(I) \subseteq W\}$$

1 Universal path space

به طوری‌که $x = \alpha(0) = \gamma(1)$ و $y = \lambda(0) = \alpha(1)$.

گزارهٔ ۲،۲. اگر V و V' همسایگی‌های باز $\alpha(0)$ و W و W' همسایگی‌های باز از $\alpha(1)$ باشند به‌طوری‌که $V \subseteq V'$ و $W \subseteq W'$ آن‌گاه $N([\alpha], V, W) \subseteq N([\alpha], V', W')$.

برهان. به آسانی از تعاریف به دست می‌آید.

لم ۳،۲. فرض کنید $[\alpha] \in \pi X(x, y)$ و V و W به‌ترتیب همسایگی‌های باز از $\alpha(0)$ و $\alpha(1)$ باشند. اگر $[\beta] \in N([\alpha], V, W)$ آن‌گاه $N([\beta], V, W) = N([\alpha], V, W)$.

برهان. چون $[\beta] \in N([\alpha], V, W)$، طبق تعریف $\beta \simeq \lambda * \alpha * \lambda'$ که λ و λ' به‌ترتیب مسیرهایی در V و W هستند. عضو دلخواه $[z] \in N([\alpha], V, W)$ را در نظر می‌گیریم دراین‌صورت $z \simeq \mu * \alpha * \mu'$ به طوری‌که μ و μ' به‌ترتیب مسیرهایی در V و W هستند. بنابراین داریم

$$z \simeq (\mu * \lambda^{-1}) * (\lambda * \alpha * \lambda') * (\lambda'^{-1} * \mu').$$

از آن‌جاکه λ و μ هر دو مسیرهایی در V هستند واضح است که $(\mu * \lambda^{-1})$ نیز مسیری در V است. همچنین چون λ' و μ' هر دو مسیرهایی در W هستند، $(\lambda'^{-1} * \mu')$ نیز مسیری است که در W واقع است. از این‌رو با توجه به تعریف داریم $[z] \in N([\beta], V, W)$ که ایجاب می‌کند $N([\alpha], V, W) \subseteq N([\beta], V, W)$. اکنون اگر $[z] \in N([\beta], V, W)$ دلخواه باشد، آن‌گاه

$$z \simeq \gamma * \beta * \gamma' \simeq \gamma * \lambda * \alpha * \lambda' * \gamma'.$$

از این‌که λ و γ مسیرهایی در V هستند، نتیجه می‌شود که $(\gamma * \lambda)$ مسیری در V بوده و به دلیل مشابه، $(\lambda' * \gamma')$ نیز مسیری در W است. بنابراین داریم $[z] \in N([\alpha], V, W)$ که ایجاب می‌کند $N([\beta], V, W) \subseteq N([\alpha], V, W)$ و به این ترتیب نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود.

گزاره‌ی زیر با تلفیق گزاره ۲،۲ و لم ۳،۲ ثابت می‌شود.

گزارهٔ ۴،۲. برای فضای توپولوژیکی (X, τ)، خانواده زیر تشکیل یک توپولوژی بر گروه‌وار بنیادین می‌دهد:

$$\{N([\alpha], V, W); [\alpha] \in \pi X(x, y), x \in V \in \tau, y \in W \in \tau\}.$$

برهان. برای هر $[\alpha] \in \pi X(x, y)$ قرار می‌دهیم $V = W = X$. چون $\alpha \simeq c_x * \alpha * c_y$، داریم $[\alpha] \in N([\alpha], V, W)$. اگر $[\alpha] \in N([\beta], V, W) \cap N([\beta'], V', W')$، آن‌گاه با توجه به لم ۳،۲

$$N([\alpha], V, W) = N([\beta]), V, W), \quad N([\alpha], V', W') = N([\beta'], V', W'),$$

به‌طوری‌که $\alpha(0) \in V \cap V'$ و $\alpha(1) \in W \cap W'$. دراین‌صورت $N([\alpha], V \cap V', W \cap W')$ همسایگی شامل $[\alpha]$ است و چون

$$N([\alpha], V \cap V', W \cap W') \subseteq N([\alpha], V, W) \cap N([\alpha], V', W').$$

پس $N([\alpha], V \cap V', W \cap W')$ همان همسایگی مورد نظر ماست.

از این پس گروه‌وار بنیادین مجهز به توپولوژی فوق را با نماد $\pi^{wh}X$ نمایش می‌دهیم.

با توجه به ضابطه نگاشت(x) $f: \pi_1(X,x) \to p_e^{-1}$، بازهای پایه‌ای توپولوژی ویسکر بر گروه بنیادین به شکل زیر هستند [۱].

$$N([\alpha], U) = \{[\beta] \in \pi X;\ \beta \simeq \alpha * \delta, \delta(I) \subset U, \delta(0) = \delta(1) = \alpha(0)\},$$

که $\alpha \in \pi_1(X,x)$ و U یک همسایگی از $\alpha(0)$ است.

برای فضای توپولوژیکی (X,x)، زیرمجموعه $\pi X(x,x)$ از $\pi^{wh}X$ را می‌توان به توپولوژی زیرفضایی مجهز نمود و با $\pi^{wh}X(x,x)$ نمایش داد. اکنون به طور طبیعی این سوال مطرح می‌شود که چه ارتباطی بین این دو توپولوژی وجود دارد؟ در مثال زیر نشان خواهیم داد که لزوما این دو توپولوژی با هم معادل نمی‌باشند.

مثال ۵،۲. گروه‌وار بنیادین مجهز با توپولوژی ویسکر برای فضای گوشواره هاوایی[1] (که به اختصار با HE نشان داده می‌شود) را در نظر بگیرید. فرض کنید g_i مسیری باشد که دایره C_i (دایره‌ای به مرکز$(\frac{1}{i},0)$ و شعاع $\frac{1}{i}$ در فضای R^2 برای هر عدد طبیعی i) را در جهت مثلثاتی یک دور کامل می‌پیماید. اگر U گوی باز به مرکز $o \coloneqq (0,0)$ و شعاع $\frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه $N([g_1], U)$ یک همسایگی پایه‌ای در $\pi_1^{wh}(HE,o)$ شامل $[g_1 * g_5]$ است و نشان خواهیم داد هیچ همسایگی پایه‌ای در $\pi^{wh}HE(o,o)$ که شامل $[g_1 * g_5]$ است نمی‌تواند مشمول در $N([g_1], U)$ باشد. به برهان خلف فرض کنید $N([\beta], V, W) \cap \pi^{wh}HE(o,o)$ همسایگی پایه‌ای در $\pi^{wh}HE(o,o)$ شامل $[g_1 * g_5]$ و مشمول در $N([g_1], U)$ باشد. چون $N([\beta], V \cap U, W \cap U) \subseteq N([\beta], V, W)$ می‌توان فرض کرد که $V, W \subseteq U$. از طرفی $[g_1 * g_5] \in N([\beta], V, W)$ ایجاب می‌کند که

$$N([\beta], V, W) = N([g_1 * g_5], V, W).$$

پس هر عضو دلخواهی از $N([\beta], V, W) \cap \pi^{wh}HE(o,o)$ به صورت $[\lambda * g_1 * g_5 * \lambda']$ می‌باشد که در آن داریم $\lambda(I) \subseteq V$ و $\lambda'(I) \subseteq W$. دقت شود که چون $[\lambda * g_1 * g_5 * \lambda'] \in \pi^{wh}HE(o,o)$ است، داریم

$$\lambda(0) = \lambda(1) = \lambda'(0) = \lambda'(1) = o.$$

1 Hawaiian earring

اگر $[\lambda * g_1 * g_5 * \lambda'] \in N([g_1], U)$ آن‌گاه طوقه γ در U وجود دارد به‌طوری‌که $\lambda * g_1 * g_5 * \lambda' \simeq g_1 * \gamma$ و این ایجاب می‌کند

$$g_5 \simeq \lambda^{-1} * g_1 * \gamma * \lambda'^{-1} * g_5{}^{-1}$$

که تناقض است زیرا $\lambda^{-1} * g_1 * \gamma * \lambda'^{-1} * g_5{}^{-1}$ با هیچ مسیری با شعاع کمتر از یک هموتوپ مسیری نمی‌باشد. برهان قضیهٔ ۴,۱۰ از [۴] را ببینید.

اکنون با این پرسش مواجه می‌شویم که برای چه فضاهایی توپولوژی‌های $\pi^{wh}X(x,x)$ و $\pi_1^{wh}(X,x)$ معادل هستند؟ گزاره زیر بیان می‌کند در صورتی که X فضای انتقالی طوقه کوچک[1] باشد، توپولوژی‌های معرفی شده بر $\pi^{wh}X(x,x)$ و $\pi_1^{wh}(X,x)$ معادل هستند.

فضای انتقالی طوقه کوچک برای اولین بار توسط برودسکی و همکاران وی در [۴] معرفی شد. آنها ثابت کردند اگر X فضای انتقالی طوقه کوچک باشد، توپولوژی ویسکر و توپولوژی خارج قسمتی حاصل از توپولوژی فشرده- باز بر فضای مسیر جهانی $\tilde{X}_e$ بر هم منطبق می‌شوند.

تعریف ۶,۲. [۴] فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی باشد. مسیر $\alpha: I \to X$ یک مسیر انتقالی طوقه کوچک نامیده می‌شود هرگاه برای هر همسایگی باز U از $\alpha(0)$ در X، همسایگی باز V از $\alpha(1)$ در X وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر طوقه داده شده $\gamma: (I,0) \to (V, \alpha(1))$ طوقه $\gamma': (I,0) \to (U, \alpha(0))$ موجود باشد به گونه‌ای که $\gamma' \simeq \alpha * \gamma * \alpha^{-1}$ یا به طور معادل $[\gamma'] = [\alpha * \gamma * \alpha^{-1}]$. فضای X را یک فضای انتقالی طوقه‌ی کوچک در x (به اختصار یک فضای SLT در x) می‌نامند هرگاه هر مسیر α با شروع از x یک مسیر SLT باشد. همچنین، X را یک فضای انتقالی طوقه کوچک می‌نامند هرگاه فضایی SLT در هر نقطه‌اش باشد.

به عنوان مثال فضاهای طوقه‌ای کوچک[2] [۴] و گروه‌های توپولوژیکی [۱۳] فضاهای SLT می‌باشند.

گزارهٔ ۲. ۷. فرض کنید X فضای انتقالی طوقه‌ی کوچک بوده و $x \in X$. دراین‌صورت توپولوژی‌های معرفی شده بر $\pi^{wh}X(x,x)$ و $\pi_1^{wh}(X,x)$ با هم معادلند.

برهان. اگر $[\eta]$ عضو دلخواهی در $N([\alpha], V, W) \cap \pi X(x,x)$ باشد آن‌گاه $\eta \simeq \lambda * \alpha * \lambda'$ که در آن $[\alpha] \in \pi X(y, z)$ که $y, z \in X$ و λ و λ' به‌ترتیب مسیرهایی در V و W می‌باشند به طوری‌که $\lambda(0) = \lambda'(1) = \eta(0) = \eta(1) = x$. قرار می‌دهیم $U := V \cap W$. چون $\eta \simeq (\lambda * \alpha * \lambda') * c_x$، با قرار دادن $\gamma := \lambda * \alpha * \lambda'$ داریم $\eta \simeq \gamma * c_x$ و در نتیجه $[\eta] \in N([\gamma], U)$.

نشان می‌دهیم $N([\eta], U) \subseteq N([\alpha], V, W) \cap \pi X(x,x)$.

1 Small loop transfer space

2 Small loop space

اگر $[\beta] \in N([\eta], U)$ دلخواه باشد آن‌گاه $\beta \simeq \lambda * \alpha * \lambda' * \delta$ که δ مسیری در U است و $\delta(0)=\delta(1)= x$. از طرفی با توجه به اینکه $\delta(I) \subseteq U = V \cap W$ و λ' مسیری در W است، $(\lambda' * \delta)$ نیز مسیری در W می‌باشد، از این رو $[\beta] \in N([\alpha], V, W) \cap \pi X(x, x)$.

برعکس فرض کنید $N([\alpha], U)$ همسایگی باز از $[\xi]$ در $\pi_1^{wh}(X, x)$ باشد. دراین‌صورت طوقه‌ای مانند γ در U موجود است به‌طوری‌که $\xi \simeq \alpha * \gamma$. می‌توانیم ξ را به صورت $\xi \simeq c_x * \alpha * \gamma$ درنظر بگیریم. به این ترتیب $[\xi] \in N([\alpha], U, U) \cap \pi^{wh} X(x, x)$.

اکنون نشان می‌دهیم $N([\xi], U, U) \cap \pi^{wh} X(x, x) \subseteq N([\alpha], U)$. برای هر عضو دلخواه $[\beta]$ در $N([\xi], U, U) \cap \pi^{wh} X(x, x)$ مسیرهای λ و λ' در U واقعند به طوری‌که $\beta \simeq \lambda * \xi * \lambda'$ در این‌صورت $\lambda(0) = \lambda'(1) = x$ با توجه به تعریف ξ داریم

$$\beta \simeq \lambda * \alpha * \gamma * \lambda' \simeq \alpha * (\alpha^{-1} * \lambda * \alpha) * \gamma * \lambda'.$$

از آن‌جا که X فضای انتقالی طوقه‌ی کوچک است مسیر δ در U موجود است که $\alpha^{-1} * \lambda * \alpha \simeq \delta$. بنابراین $\beta \simeq \alpha * \delta * \gamma * \lambda'$ و چون δ و γ و λ' هر سه مسیرهایی در U هستند، $(\delta * \gamma * \lambda')$ یک مسیر بسته در همسایگی U است و این یعنی $[\beta] \in N([\alpha], U)$.

تعریف گروه شبه توپولوژیکی را می‌توان به صورت زیر برای گروه‌وارها گسترش داد.

تعریف ۲. ۸. گروه‌وار G بر G_0 را یک گروه‌وار شبه توپولوژیکی گوییم هرگاه همه نگاشت‌های ساختاری به جز ضرب پیوسته باشند.

گزارهٔ ۲. ۹. گروه‌وار بنیادین فضای همبند مسیری موضعی X مجهز به توپولوژی ویسکر یک گروه‌وارشبه توپولوژیکی است.

برهان. ثابت می‌کنیم همه نگاشت‌های ساختاری به جز ضرب پیوسته اند. نخست پیوستگی نگاشت مبدا (S) را بررسی می‌کنیم. برای هر $[\alpha] \in \pi X(x, y)$ و هر همسایگی باز U از x، قرار دهید $O \coloneqq N([\alpha], U, X)$ به وضوح $[\alpha] \in O$ و برای هر $[\beta] \in O$، مسیرهای λ و λ' به‌ترتیب در U و X موجودند به طوری که $\beta \simeq \lambda * \alpha * \lambda'$ و $\lambda(0) \in U$ بنابراین $S([\beta]) = \beta(0) = \lambda(0) \in U$. از این رو $S(O) \subset U$. با برهانی مشابه می‌توان نشان داد که نگاشت هدف نیز پیوسته است.

پیوستگی نگاشت واحد: برای $x \in X$، فرض کنید $N([\alpha], U, W)$ همسایگی پایه‌ای دلخواه از $[1_x]$ باشد. بنابراین $1_x \simeq \lambda * \alpha * \lambda'$ که در آن λ و λ' به‌ترتیب مسیرهایی در U و W می‌باشند. همچنین $\lambda(0) = \lambda'(1) = x$. به این ترتیب $U \cap W \neq \emptyset$. فرض کنید M مولفه‌ی همبند مسیری از $U \cap W$ باشد که شامل x است. چون X همبند

مسیری موضعی است، M باز بوده و نشان می‌دهیم $1(M) \subseteq N([\alpha],U,W)$. برای هر $x \neq x' \in M$ مسیر φ از x' به x در M موجود است و داریم

$$1_{x'} \simeq \varphi * 1_x * \varphi^{-1} \simeq (\varphi * \lambda) * \alpha * (\lambda' * \varphi^{-1}).$$

که نتیجه می‌شود $[1_{x'}] \in N([\alpha],U,W)$.

پیوستگی نگاشت وارون i: فرض کنید $O \coloneqq N([\alpha^{-1}],U,W)$ همسایگی پایه‌ای دلخواه از $[\alpha^{-1}]$ در $\pi^{wh}X$ باشد. نشان می‌دهیم که $O' \coloneqq N([\alpha],W,U)$ همسایگی مورد نظر ما است به طوری که $i(O') \subseteq O$. اگر $[\beta] \in N([\alpha],W,U)$ دلخواه باشد، آن‌گاه $\beta \simeq \delta * \alpha * \delta'$، که δ و δ' به‌ترتیب مسیرهایی در W و U می‌باشند. چون $i([\beta]) = [\beta^{-1}]$ و $\beta^{-1} \simeq \delta'^{-1} * \alpha^{-1} * \delta^{-1}$ که $\delta'^{-1}(I) \subset U$ و $\delta^{-1}(I) \subset W$، پس $[\beta^{-1}] \in N([\alpha^{-1}],U,W)$ که نتیجه می‌شود $i(O') \subset O$.

در گروه بنیادین با توپولوژی ویسکر نگاشت‌های انتقال از چپ پیوسته‌اند ولی نگاشت‌های انتقال از راست در آن لزوماً پیوسته نمی‌باشند [۱، اثبات گزارهٔ ۳,۱]. در ادامه نشان خواهیم داد که در گروه‌وار بنیادین با توپولوژی ویسکر هیچ یک از انتقال‌های راست و چپ پیوسته نیستند. این تفاوت البته ناشی از نوع تعریف توپولوژی ویسکر بر گروه‌وار بنیادین می‌باشد که به دو طرف از یک مسیر، امتدادهایی را اضافه می‌کنیم درحالی‌که در گروه بنیادین فقط از سمت راست امتدادهایی را به طوقه‌ها اضافه می‌نماییم.

مثال زیر ادعایی روشن است بر اینکه نگاشت انتقال راست درگروه‌وار بنیادین با توپولوژی ویسکر لزوماً پیوسته نیست.

مثال ۲. ۱۰. گروه‌وار بنیادین مجهز با توپولوژی ویسکر برای فضای گوشواره هاوایی یک گروه‌وار توپولوژیکی نیست. درواقع نگاشت انتقال راست در $\pi^{wh}X(o)$ زمانی که o نقطه مماس دایره‌ها با هم باشند، پیوسته نمی‌باشد. به برهان خلف فرض کنید نگاشت انتقال راست $r_{[g_1]}: \pi^{wh}X(o) \to \pi^{wh}X(o)$ که $r_{[g_1]}([g]) = [g * g_1]$، پیوسته است. اگر U همسایگی بازی از o باشد که $Im(g_1)$ را شامل نیست، دراین‌صورت برای همسایگی پایه‌ای $N([g_3 * g_1],U,U)$ از $[g_3 * g_1]$، همسایگی‌های باز W و W' شامل o و مشمول در U یافت می‌شوند به‌طوری‌که

$$r_{[g_1]}(N([g_3],W,W')) \subseteq N([g_3 * g_1],U,U).$$

چون $W \cap W'$ همسایگی باز شامل o است، پس $k > 2$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$g_k \in W \cap W', \text{ لذا } [g_k * g_3 * g_k] \in N([g_3],W,W')$$

و در نتیجه

$$r_{[g_1]}([g_K * g_3 * g_k]) \in N([g_3 * g_1],U,U).$$

بنابراین $\left[g_k * g_3 * g_k * g_1\right] \in N([g_3 * g_1], U, U)$. پس طوقه‌های α و β در U موجودند به طوری‌که

$$g_k * g_3 * g_k * g_1 \simeq \alpha * g_3 * g_1 * \beta$$

و لذا داریم $g_3^{-1} * \alpha^{-1} * g_k * g_3 * g_k \simeq g_1 * \beta * g_1^{-1}$.

از آن‌جایی که α، g_3 و g_k مسیرهایی در U هستند، داریم $g_1 * \beta * g_1^{-1} \in i_*\pi_1(U, x)$. اما این تناقض است زیرا $g_1 * \beta * g_1^{-1}$ با هیچ مسیری با شعاع کمتر از یک هموتوپ مسیری نمی‌باشد. برهان قضیهٔ ۴,۱۰ از [۴] را ببینید.

به طریقی مشابه می‌توان ثابت کرد که نگاشت‌های انتقال چپ در $\pi^{wh}HE(o)$ زمانی که o نقطه مشترک دایره ها باشد، پیوسته نیستند.

در ادامه به دنبال یافتن شرایطی هستیم که پیوستگی نگاشت ضرب را به منظور ساختن یک گروه‌وار توپولوژیکی با استفاده از توپولوژی ویسکر فراهم نماید.

گزارهٔ ۲. ۱۱. اگر نگاشت انتقال راست در $\pi^{wh}X$ پیوسته باشد، آن‌گاه نگاشت ضرب نیز پیوسته است.

برهان. فرض کنید $[g] \in \pi X$ و نگاشت انتقال راست پیوسته است. برای عضو دلخواه $[\alpha]$ و هر همسایگی پایه‌ای $N([\alpha * g], U, V)$ از $R_{[g]}([\alpha]) = [\alpha * g]$، همسایگی پایه‌ای $O = N([\alpha], U', V')$ از $[\alpha]$ موجود است به طوری‌که $R_{[g]}(N([\alpha], U', V') \subseteq N([\alpha * g], U, V)$. از این‌رو برای هر عضو از $N([\alpha], U', V')$ مانند $[\lambda * \alpha * \lambda']$ که $\lambda'(1) = g(0)$ داریم

$$R_{[g]}([\lambda * \alpha * \lambda']) = [\lambda * \alpha * \lambda' * g] \in N([\alpha * g], U, V).$$

بنابراین مسیرهای μ و μ' در U و V موجودند به طوری‌که $\lambda * \alpha * \lambda' * g \simeq \mu * \alpha * g * \mu'$.

اکنون فرض کنید $[\alpha], [\beta] \in \pi X$ باشند که $\alpha(1) = \beta(0)$ و $N([\alpha * \beta], U, V)$ همسایگی پایه‌ای از $[\alpha * \beta]$ باشد. با توجه به پیوستگی $R_{[\beta]}$ و توضیحات بالا، همسایگی‌های باز دلخواه W_1 و W_2 به‌ترتیب از $\alpha(0)$ و $\alpha(1)$ موجودند به‌طوری‌که برای هر مسیر δ در W_1 و هر طوقه δ' در W_2 (به دلیل تعریف شدن ضرب مسیری باید $\alpha(1) = \delta'(0)$ و $\delta'(1) = \beta(0)$ باشند)، مسیرهای η و η' به‌ترتیب در U و V موجودند که

$$\delta * \alpha * \delta' * \beta \simeq \eta * \alpha * \beta * \eta'. \quad (1)$$

قرار می‌دهیم $O_1 := N([\alpha], U \cap W_1, W_2)$ و $O_2 := N([\beta], W_2, V)$.

اگر $[\alpha'] \in O_1$ و $[\beta'] \in O_2$ دراین‌صورت $\alpha' \simeq \lambda * \alpha * \lambda'$ و $\beta' \simeq \gamma * \beta * \gamma'$ که λ و λ' به‌ترتیب مسیرهایی هایی در $U \cap W_1$ و W_2 و همچنین γ و γ' به‌ترتیب مسیرهایی در W_2 و V می‌باشند. از طرفی

$$[\alpha'] * [\beta'] = [\alpha' * \beta'] = [\lambda * \alpha * (\lambda' * \gamma) * \beta * \gamma'].$$

چون γ و λ' هر دو مسیرهایی در W_2 هستند $(\lambda' * \gamma)$ نیز طوقه‌ای در W_2 بوده و با توجه به رابطهٔ (۱) مسیرهای η و η' به ترتیب در U و V موجودند که

$$\lambda * \alpha * (\lambda' * \gamma) * \beta * \gamma' \simeq \eta * \alpha * \beta * \eta' * \gamma'.$$

بنابراین با قرار دادن $\eta'' = \eta' * \gamma'$ که مسیری در V است داریم $[\alpha' * \beta'] = [\eta * \alpha * \beta * \eta'']$ این ایجاب می‌کند $[\alpha' * \beta'] \in N([\alpha * \beta], U, V)$ و پیوستگی نگاشت ضرب نتیجه می‌شود.

ملاحظهٔ ۲. ۱۲. اگر نگاشت انتقال چپ در $\pi^{wh}X$ پیوسته باشد، با استدلالی مشابه می‌توان نتیجه گرفت که نگاشت ضرب پیوسته است.

با توجه به گزارهٔ قبل، یافتن فضاهایی که در آن‌ها نگاشت انتقال راست پیوسته باشد به ما در شناسایی رده ای از فضاها که گروه‌وار بنیادین آنها با توپولوژی ویسکر تشکیل یک گروه‌وار توپولوژیکی می‌دهد، کمک خواهد کرد.

گزارهٔ ۲. ۱۳. اگر X فضای انتقالی طوقه‌ی کوچک باشد، نگاشت انتقال راست در $\pi^{wh}X$ پیوسته است.

برهان. فرض کنید $x, y \in X$ و $[\beta]$ عضوی دلخواه از $\pi X(x, y)$ باشد. نگاشت انتقال از راست $R_{[\beta]}: \pi^{wh}X(-, x) \to \pi^{wh}X(-, y)$ را در نظر بگیرید. برای هر $z \in X$ و هر $[\alpha] \in \pi X(z, x)$، فرض کنید $N([\alpha * \beta], U, V)$ یک همسایگی پایه‌ای از $[\alpha * \beta]$ است که در آن U و V به ترتیب همسایگی‌های بازی از z و y می‌باشند. از آن‌جاکه X فضای انتقالی طوقه‌ی کوچک است، برای همسایگی باز V از y، همسایگی باز V_1 از x موجود است به طوری‌که برای هر طوقه γ_2 بر پایه x در V_1، طوقه $\gamma_2{}'$ بر پایه y در V وجود دارد به طوری‌که

$$\beta^{-1} * \gamma_2 * \beta \simeq \gamma_2' \text{ یعنی } \gamma_2 * \beta \simeq \beta * \gamma_2'.$$

همسایگی باز $N([\alpha], U, V_1) \cap \pi^{wh}X(-, x)$ از $[\alpha]$ را در نظر بگیرید. اگر $[\lambda]$ عضو دلخواهی از $N([\alpha], U, V_1) \cap \pi^{wh}X(-, x)$ باشد، آن‌گاه $\lambda \simeq \lambda_1 * \alpha * \lambda_2$ که λ_1 و λ_2 به‌ترتیب مسیرهایی در U و V_1 می‌باشند و λ_2 طوقه‌ای بر پایه‌ی $\alpha(1) = \beta(0) = x$ است. در این صورت:

$$R_{[\beta]}([\lambda]) \simeq \lambda_1 * \alpha * \lambda_2 * \beta \simeq \lambda_1 * \alpha * \beta * \lambda'_2$$

که در آن λ'_2 طوقه ای در V است. این نتیجه می‌دهد $R_{[\beta]}([\lambda]) \in N([\alpha * \beta], U, V)$ که همان نتیجهٔ مطلوب ما است.

ملاحظهٔ ۲. ۱۴. با برهانی مشابه می‌توان نشان داد که اگر X فضای انتقالی طوقه کوچک باشد نگاشت انتقال از چپ پیوسته است.

با توجه به گزاره‌های ۲. ۱۱ و ۲. ۱۳ پیوستگی نگاشت ضرب در $\pi^{wh}X$ را وقتی فضای X انتقالی طوقهٔ کوچک باشد، داریم و همچنین پیوستگی سایر نگاشت‌های ساختاری را نیز در گزاره۲. ۹ داشتیم. ازاین‌رو قضیه مهم و اساسی زیر اثبات شده است.

قضیهٔ ۲. ۱۵. اگر X فضایی همبند مسیری موضعی و انتقالی طوقه‌ی کوچک باشد آن‌گاه $\pi^{wh}X$ گروه‌وار توپولوژیکی است.

در ادامه رفتارهای رسته‌ای π^{wh} را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

گزارهٔ ۲. ۱۶. اگر X و Y فضاهای توپولوژیکی و $f: X \to Y$ نگاشت پیوسته باشد؛ آن‌گاه نگاشت $\pi f: \pi^{wh}X \to \pi^{wh}Y$ که به صورت $\pi f([\alpha]) = [fo\alpha]$ تعریف می‌شود پیوسته است.

برهان. فرض کنید $O \coloneqq N([fo\alpha], V, W)$ همسایگی پایه‌ای از $[fo\alpha]$ در $\pi^{wh}Y$ باشد به‌طوری‌که V و W به‌ترتیب همسایگی‌های باز از $fo\alpha(0)$ و $fo\alpha(1)$ می‌باشند. با قرار دادن $U = f^{-1}(V)$ همچنین $U' = f^{-1}(W)$، نشان می‌دهیم $O' \coloneqq N([\alpha], U, U')$ همسایگی پایه‌ای مورد نظر ما از $[\alpha]$ در $\pi^{wh}X$ می‌باشد به‌طوری‌که $\pi f(O') \subseteq O$. برای این منظور عضو دلخواه $[\beta]$ را در O' در نظر می‌گیریم. دراین‌صورت $\beta \simeq \lambda * \alpha * \lambda'$ که در آن $\lambda(I) \subset U$ و $\lambda'(I) \subset U'$ ازآنجایی‌که $(fo\lambda)$ مسیری در V و $(fo\lambda')$ مسیری در W بوده و $fo\beta \simeq (fo\lambda) * (fo\alpha) * (fo\lambda')$ داریم $[fo\beta] \in O$ که ایجاب می‌کند $\pi f([\beta]) \in O$.

نتیجهٔ ۲. ۱۷. نگاشت π^{wh} یک تابع‌گون از رسته فضاهای توپولوژیکی همبند مسیری موضعی و انتقالی طوقه کوچک و نگاشت‌های پیوسته به رسته گروه‌وارهای توپولوژیکی است.

برهان. با توجه به قضیه ۲. ۱۵ و گزاره ۲. ۱۶ و این حقیقت که π یک تابعگون از رسته فضاهای توپولوژیکی و نگاشت‌های پیوسته به رسته گروه‌وارها است، ادعای مورد نظر ثابت می‌شود.

هنگامی که X یک فضای همبند ساده نیم موضعی است، همه توپولوژی‌های تعریف‌شده بر گروه بنیادین گسسته می‌باشند [۱۱]. اما این موضوع ممکن است برای گروه‌وار توپولوژیکی مورد نظر ما اتفاق نیفتد. زیرا برای همسایگی پایه‌ای دلخواه $N([\alpha], U, V)$ از $[\alpha]$، اعضایی به شکل $[\lambda * \alpha * \lambda'] \in N([\alpha], U, V)$ وجود دارند که نقاط آغازی و پایانی مسیر $\lambda * \alpha * \lambda'$ با α برابر نبوده و لذا $[\lambda * \alpha * \lambda'] \neq [\alpha]$. این باعث می‌شود که $N([\alpha], U, V) \neq \{[\alpha]\}$.

گزاره زیر نشان می‌دهد که وقتی نقاط انتهایی را ثابت نگه داریم، یعنی به جای $\pi^{wh}X$ با $\pi^{wh}X(x, y)$ کار کنیم، شرط انتقالی طوقه کوچک بودن فضا باعث گسسته شدن $\pi^{wh}X(x, y)$ خواهد شد.

گزارهٔ ۲. ۱۸. فضای توپولوژیکی انتقالی طوقهٔ کوچک X را درنظر بگیرید. فضای X همبند ساده نیم موضعی است اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in X$، $\pi^{wh}X(x,y)$ گسسته باشد.

برهان. برای فضای توپولوژیکی همبند ساده نیم موضعی X نشان می‌دهیم که برای هر $x, y \in X$ و برای هر $[\alpha] \in \pi X(x,y)$، مجموعه $\{[\alpha]\}$ در $\pi^{wh}X(x,y)$ باز است. به یاد بیاورید که در فضای همبند ساده نیم موضعی، برای هر $x \in X$، همسایگی باز U_x از x موجود است به طوری‌که هر مسیر بسته در U_x حول x، در X پوچ هموتوپیک می‌شود. اکنون اگر $[\beta] \in N([\alpha], \mathrm{U}_x, V_y) \cap \pi^{wh}X(x,y)$ اختیار شود، $\beta \simeq \lambda * \alpha * \lambda'$ خواهد شدکه در آن U_x و V_y به‌ترتیب همسایگی‌های باز از x و y بوده و داریم $\lambda(I) \subseteq \mathrm{U}_x$ و $\lambda'(I) \subseteq V_y$. از طرفی

$$\lambda(0) = \beta(0) = x = \lambda(1), \qquad \lambda'(0) = \beta(1) = y = \lambda'(1).$$

بدین ترتیب λ و λ' مسیرهای بسته در U_x و V_x می‌باشند و با توجه به نحوهٔ انتخاب U_x و V_x، λ و λ' طوقه‌هایی پوچ هموتوپیک‌اند[1]. از این رو $[\lambda] = e_x$ و $[\lambda'] = e_y$ که ایجاب می‌کند $\beta \simeq \alpha$ و این یعنی

$$N\big([\alpha], \mathrm{U}_x, V_y\big) \cap \pi^{wh}X(x,y) = \{[\alpha]\}.$$

برای اثبات لزوم، دقت شود که گسسته بودن $\pi_1^{wh}(X,x)$، همبند ساده نیم‌موضعی بودن X را ایجاب می‌کند (نتیجهٔ ۳. ۳ از [۴]). اکنون از برابری $\pi_1^{wh}(X,x) = \pi^{wh}X(x,x)$ نتیجه حاصل می‌شود.

References

1. M. Abdollahi-Rashid, S. Z. Pashaei, B. Mashayekhy and H. Torabi, On the whisker topology on fundamental groups, 46^{th}Annual Mathematics conference, yazd university, 25-28 August (2015).

2. D. Biss, The topological fundamental group and generalized covering spaces, Topology Appl. 124 (2002) 355–371.

3. J. Brazas, The fundamental group as a topological group, Topology Appl. 160 (2013) 170–188.

4. N. Brodskiy, J. Dydak, B. Labuz, A. Mitra, Topological and uniform Structures on universal covering space, arxiv: 1206.0071.

5. R. Brown, Topology and Groupoids. Deganwy, United kingdom: Booksurgellc, 2006.

1 Nullhomotopic

6. R. Brown and G. Danesh_Naruie, Topological fundamental groupoid as topological groupoid. Proc. Endiburg Math. Soc. 19(1975) 237-244.

7. J. Dugundji, A topologized fundamental group, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 36 (1950) 141–143.

8. H. Ghane, Z. Hamed, B. Mashayekhy, H. Mirebrahimi, Topological homotopy groups, Bull. Belg. Math. Soc. 15 (2008) 455–464.

9. K. Mackenzie, Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry London Mathematical society lecture Note series, (124) 1987.

10. A. Pakdaman and F. Shahini, The Fundamental Groupoid as a Topological Groupoid: Lasso Topology, Topology and its Applications. 302 (2021) 1--8..

11. Z. Virk and A. Zastrow, A new topology on the universal path space, Topology and its Applications. 231 (2017), 186-196.

12. E. H. Spanier, Algebraic Topology, McGraw-Hill, 1966.

13. H. Torabi, On topologized fundamental groups and covering groups of topological groups, Iranian Journal of Science and Technology, Transaction A: Science. 44(6) (2020), 1731-1737.