Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Weak Convergence of Mann Iterative Algorithm for two Nonexpansive mappings

Najmeh Mohitazar[1], **Sirous Moradi**[2]✉

1. Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Arak University, 38156-8-8349, Arak, Iran.

E-mail: math.mohitazar@gmail.com

2. Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Lorestan University, 68151-4-4316, Khoramabad, Iran

✉E-mail: moradi.s@lu.ac.ir

Article Info	ABSTRACT

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
8 October 2020
Received in revised form:
1 May 2021
Accepted:
8 May 2021
Published online:
31 December 2022

Keywords:
Weak convergence,
nonexpansive mapping,
Hilbert space,
Mann fixed-point algorithm.

Abstract

The mann fixed point algorithm play an importmant role in the approximation of fixed points of nonexpansive operators. In this paper, by considering new conditions, we prove the weak convergence of mann fixed point algorithm, for finding a common fixed point of two nonexpansive mappings in real Hilbert spaces.This results extend the privious results given by Kanzow and Shehu. Finally, we give an application of our results, by using the John von Neumann's method.

1.Introduction

Let H be a real Hilbert space with inner product $\langle .,. \rangle$ and norm $\|.\|$, and let C be a nonempty, closed and convex subset of H. An operator $T: C \longrightarrow C$ is said to be nonexpansive if satisfies

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \qquad \forall x, y \in C$$

We denote the set of fixed points of T by $F(T) = \{x \in C | Tx = x\}$.

For a nonexpansive mapping $T: C \longrightarrow C$, if C is bounded, closed and convex,then $F(T) \neq \phi$. (see, e.g., [1]).The aim of this paper is to find a common fixed point of two nonexpansive mappings $T_1, T_2 : C \longrightarrow C$. One of the most famous fixed point method is the Krasnoselskii-mann iteration from [1,2]. This algorithm is defined in the following manner:

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

where $x_0 \in H$ and $\alpha_n \in]0,1[$, for all $n \in \mathbb{N}$.

A celebrated weak convergence theorem was established by Reich [3], see also Falset et al. [4]. In 2001, Xu and Ori[5], proposed the following implicit Mann-like iterative process for finite family of nonexpansive mappings $\{T_1, T_2, ... T_N\}$ with $\{\alpha_n\}$ a real sequence in $]0,1[$ and an initial point $x_0 \in C$:

$$x_1 = \alpha_1 x_0 + (1-\alpha_1)T_1 x_1,$$
$$x_2 = \alpha_2 x_1 + (1-\alpha_2)T_2 x_2,$$
$$\ldots$$
$$x_N = \alpha_N x_{N-1} + (1-\alpha_N)T_N x_N,$$
$$x_{N+1} = \alpha_{N+1} x_N + (1-\alpha_{N+1})T_1 x_{N+1},$$

Which can written in the following compact form:

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1-\alpha_n)T_n x_n \qquad \forall n \geq 1 \tag{1.2}$$

Which $T_n \equiv T\ (n \bmod N)$.

By using above sequence, they obtained some weak convergence theorems.

Recently, Knzow and Shehu [6] considered the sequence generated by the following algorithm:

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n T x_n + r_n, \qquad \forall n \geq 0$$

Where $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$ are satisfying $\alpha_n + \beta_n \leq 1$, and r_n is called the residual vector.

By considering this algorithm, they proved the following theorem.

Theorem1.1: Let K be a nonempty, closed and convex subset of a real Hilbert space H. Supose that $T : H \longrightarrow K$ is a nonexpansive mapping such that its set of fixed points $F(T)$ is nonempty. Let the sequence $\{x_n\}$ in H be generated by choosing $x_1 \in H$ and using the recursion

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n T x_n + r_n, \qquad \forall n \geq 1 \tag{1.3}$$

Where r_n denotes the residual vector. Here we assume that $\{\alpha_n\}$ and $\{\beta_n\}$ are real sequences in $[0,1]$ such that $\alpha_n + \beta_n \leq 1$ for all $n \geq 1$ and the following conditions hold:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n = \infty;$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \| r_n \| < \infty;$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha_n - \beta_n) < \infty.$

Then the sequence $\{x_n\}$ generated by (1.3) converges weakly to a fixed point of T.

For the main results of this paper, we need the following useful lemmas.

Lemma 1.2: ([7]) Let E be a uniformly convex Banach space. Let $\delta > 0$ be a positive number and let $B_\delta(0)$ be a closed ball of E. There exits a continuous, strictly increasing and convex function $g : [0,\infty[\to [0,\infty[$ with $g(0) = 0$ such that

$$\|ax + by + cz + dw\|^2 \leq a\|x\|^2 + b\|y\|^2 + c\|z\|^2 + d\|w\|^2 - abg(\|x-y\|)$$

for all $x, y, z, w \in B_\delta(0) = \{ x \in E ;\ \|x\| \leq \delta \}$ and $a, b, c, d \in [0,1]$ such that $a + b + c + d = 1$.

Lemma 1.3: ([8])(Opial property)If in a Hilbert space H the sequence $\{x_n\}$ is weakly convergent to x_0, then for any $x \neq x_0$,

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\|.$$

Lemma 1.4: ([9]) Let E be a real uniformly convex Banach space, Let C be a nonempty, closed and convex subset of E and let $T : C \longrightarrow C$ be a nonexpansive mapping. Then $I - T$ is demiclosed at zero,that is, $x_n \xrightarrow{w} x$ and $x_n - Tx_n \xrightarrow{s} 0$ imply that $Tx = x$.

Lemma 1.5: ([10]) Let $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ be two nonexpansive sequences satisfying the following condition:

$$a_{n+1} \leq a_n + b_n, \qquad \forall n \geq 1.$$

If $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, then $\lim_{n\to\infty} a_n$ exists.

In section 2, at first we consider a new type of mann iterative algorithm and we prove weak convergence of this algorithm, for finding a common fixed point of two nonexpansive mappings $T_1, T_2 : C \longrightarrow C$. In section 3, we give an application of our main results.

2.Main Results

In this section, at first we give a new type of mann iterative algorithm and then we prove weak convergenceof this algorithm.

Theorem 2.1: Let C be a nonempty, closed and convex subsetof a real Hilbert space H. Suppose that $T_1, T_2 : C \longrightarrow C$ are two nonexpansive mappings with $F(T_1) \cap F(T_2) \neq \phi$. Let the sequence $\{x_n\}$ in H be generated as follows:

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + \beta_n T_1 x_{n-1} + \gamma_n T_2 x_n + \delta_n r_n, \qquad \forall n \geq 1 \tag{2.1}$$

Where $x_0 \in H$, $\{r_n\}$ denote the residual vector, and where $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ and $\{\delta_n\}$ are real sequence in[0,1] such that $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \delta_n \leq 1$ and $\gamma_n < 1$ for all $n \geq 1$,and the following conditions hold:

(a)for every $\gamma \in [0,1[$, the function $I - \gamma T_2$ is surjective;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n}{1-\gamma_n} < \infty$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n\beta_n}{1-\gamma_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n\gamma_n}{1-\gamma_n} = \infty.$

Then the sequence $\{x_n\}$ generated by (2.1) convergence weakly to some $\hat{x} \in F(T_1) \cap F(T_2)$.

Theorem 2.2: Let C be a nonempty, closed and convex subset of a real Hilbert space H. Suppose that $T_1, T_2 : C \longrightarrow C$ are two nonexpansive mappings with $F(T_1) \cap F(T_2) \neq \phi$. Let the sequence $\{x_n\}$ in H be generated by (2.1) where $x_0 \in H$, $\{r_n\}$ denote the residual vector, and where $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ and $\{\delta_n\}$ are real sequence in[0,1] such that $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \delta_n \leq 1$ and $\gamma_n < 1$ for all $n \geq 1$,and the following conditions hold:

(a)for every $\gamma \in [0,1[$, the function $I - \gamma T_2$ is surjective;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n}{1-\gamma_n} < \infty$;

(c) $\liminf \frac{\alpha_n\beta_n}{1-\gamma_n} > 0, \ \liminf \frac{\alpha_n\gamma_n}{1-\gamma_n} > 0.$

Then the sequence $\{x_n\}$ generated by (2.1) convergence weakly to some $\hat{x} \in F(T_1) \cap F(T_2)$.

Corollary 2.3: Let C be a nonempty, closed and convex subsetof a real Hilbert space H. Suppose that $T : C \longrightarrow C$ is a nonexpansive mapping with $F(T) \neq \phi$.

Let the sequence $\{x_n\}$ in H be generated as follows:

$$x_n = \frac{\alpha_n}{1-\gamma_n} x_{n-1} + \frac{\beta_n}{1-\gamma_n} T_1 x_{n-1} + \frac{\delta_n}{1-\gamma_n} r_n \ , \qquad \forall n \geq 1 \tag{2.2}$$

Where $x_0 \in H$, $\{r_n\}$ denote the residual vector, and where $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ and $\{\delta_n\}$ are real sequence in[0,1] such that $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \delta_n \leq 1$ and $\gamma_n < 1$ for all $n \geq 1$,and the following conditions hold:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n}{1-\gamma_n} < \infty$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n\beta_n}{1-\gamma_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n\gamma_n}{1-\gamma_n} = \infty.$

Then the sequence $\{x_n\}$ generated by (2.2) convergence weakly to a $\hat{x} \in F(T)$.

3.Application

In this section, we give an application of our main results.

Theorem 3.1: Let A, B be a nonempty, closed and convex subsetsof a real Hilbert space H. Suppose that P_A, P_B are two (firmly)nonexpansive projection operators with $A \cap B \neq \phi$. Let the sequence $\{x_n\}$ in H be generated as follows:

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + \beta_n P_A\ x_{n-1} + \gamma_n P_B x_n + \delta_n r_n, \qquad \forall n \geq 1 \tag{3.1}$$

Where $x_0 \in H$, $\{r_n\}$ denote the residual vector, and where $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ and $\{\delta_n\}$ are real sequence in[0,1] such that $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \delta_n \leq 1$ and $\gamma_n < 1$ for all $n \geq 1$,and the following conditions hold:

(a)for every $\gamma \in [0,1[$, the function $I - \gamma P_B$ is surjective;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\alpha_n - \beta_n - \gamma_n}{1-\gamma_n} < \infty$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \beta_n}{1-\gamma_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \gamma_n}{1-\gamma_n} = \infty$.

Then the sequence $\{x_n\}$ generated by (3.1) convergence weakly to some $x^* \in A \cap B$.

References

1. Krasnoselskii, M.A.: Two remarks on the method of successive approximations. Uspekhi Mat. Nauk10(1955), 123–127.

2. Mann, W.R.: Mean value methods in iteration. Bull. Am. Math. Soc. 4(1953), 506–510.

3. S. Reich, Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 67 (1979), 274-276.

4. J. G. Falset, W. Kaczor, T. Kuczumow and S. Reich, Weak convergence the-orems for asymptotically nonexpansive mappings and semigroups, Nonlinear Anal. 43 (2001), 377-401.

5. H. K. Xu and M. G. Ori, An implicit iterative process for nonexpansive map-pings, Numer. Funct.Anal.Optim. 22 (2001), 767-773.

6. Kanzow, C., Shehu, Y. Generalized Krasnoselskii–Mann type iterations for nonexpansive mappings in Hilbert spaces. Comput.Optim. Appl. 67 (2017), 595–620.

7. Y. Hao, S. Y. Cho and X. Qin, Some weak convergence theorems for a family of asymptotically nonexpansivenonself mappings, Fixed Point Theory Appl. 2010 (2010), Article ID 218573.

8. Z. Opial, Weak convergence of the sequence of successive appproximations for nonexpansive mappings, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 591-597.

9. F. E. Browder, Semicontractive and semiaccretive nonlinear mappings in Ba-nach spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 660-665.

10. K. K. Tan and H. K. Xu, Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process, J. Math.Anal. Appl. 178 (1993), 301-308.

How to cite: Mohitazar, N., Moradi, S. (2022). Weak Convergence of Mann Iterative Algorithm for two Nonexpansive mappings. *Mathematical Researches*, 8 (4), 198-214.

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

همگرایی ضعیف الگوریتم بازگشتی مان[1] برای دو نگاشت غیرانبساطی

نجمه محیط آذر[1]، سیروس مرادی[2]

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه اراک، اراک، ایران. رایانامه: math.mohitazar@gmail.com

۲. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه لرستان، خرم‌آباد، ایران، رایانامه: moradi.s@lu.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۷/۱۷
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۲/۱۱
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۲/۱۸
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰

واژه‌های کلیدی:
همگرایی ضعیف،
نگاشت غیرانبساطی،
فضای هیلبرت،
الگوریتم نقطه ثابت مان.

چکیده

الگوریتم نقطه ثابت مان نقش مهمی در تقریب نقطه ثابت نگاشت‌های غیرانبساطی ایفا می‌کند. در این مقاله با درنظر گرفتن شرایط جدید، همگرایی ضعیف الگوریتم نقطه ثابت مان، برای یافتن نقطه ثابت مشترک دو نگاشت غیرانبساطی در فضاهای هیلبرت حقیقی اثبات می‌شود. این نتایج، نتایج مربوط به کنزو[2] و شیهو[3] را توسیع می‌دهد. در آخر یک کاربرد از نتایج به دست آمده، با استفاده از روش جان ون- نیومن[4] را ارائه می‌دهیم.

استناد: محیط آذر، نجمه؛ مرادی، سیروس؛ (۱۴۰۱). همگرایی ضعیف الگوریتم بازگشتیمان برای دو نگاشت غیرانبساطی. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۴)، ۲۱۴-۱۹۸.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

[1] Mann
[2] Kanzow
[3] Shehu
[4] John von Neumann

۱. مقدمه

فرض کنیم H یک فضای هیلبرت حقیقی همراه با ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ و نرم $\|.\|$ باشد و فرض کنیم C یک زیرمجموعه ناتهی، بسته و محدب از H باشد. عملگر $T: C \longrightarrow C$ غیرانبساطی گفته می‌شود هرگاه در شرط زیر صدق کند:

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \qquad \forall x, y \in C.$$

مجموعه نقاط ثابت T را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$F(T) = \{x \in C | Tx = x\}.$$

برای نگاشت غیرانبساطی $T: C \longrightarrow C$، اگر C کراندار، بسته و محدب باشد آن‌گاه $F(T) \neq \phi$. (مرجع [۱] را ببینید.) هدف این مقاله یافتن نقطه ثابت مشترک دو نگاشت غیرانبساطی $T_1, T_2: C \longrightarrow C$ می‌باشد.

یکی از روش‌های معروف نقطه ثابت، روش بازگشتی مان می‌باشد [۲و۱]. این الگوریتم به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n, \tag{۱,۱}$$

که در آن $x_0 \in H$ و $\alpha_n \in]0,1[$ برای هر $n \in \mathbb{N}$.

قضیهٔ همگرایی ضعیف این الگوریتم توسط ریچ[1] [۳] توسیع داده شده است، همچنین می‌توان به فالست[2][۴] نیز اشاره کرد.

در سال ۲۰۰۱ ژو[3] و اوری[4][۵]، روشی شبیه به روش مان به صورت زیر برای خانوادهٔ توابع غیرانبساطی $\{T_1, T_2, ... T_N\}$ ارائه کردند که در آن $\{\alpha_n\}$ یک دنباله حقیقی در $]0,1[$ می‌باشد و با شروع از نقطه $x_0 \in C$ داریم:

$$x_1 = \alpha_1 x_0 + (1 - \alpha_1)T_1 x_1,$$

$$x_2 = \alpha_2 x_1 + (1 - \alpha_2)T_2 x_2,$$

$$\cdots$$

$$x_N = \alpha_N x_{N-1} + (1 - \alpha_N)T_N x_N,$$

$$x_{N+1} = \alpha_{N+1} x_N + (1 - \alpha_{N+1})T_1 x_{N+1}.$$

---

[1] Reich
[2] Falset
[3] Xu
[4] Ori

در واقع می‌توان شکل کلی زیر را برای این الگوریتم در نظر گرفت:

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1-\alpha_n) T_n x_n , \qquad \forall n \geq 1 \tag{۱,۲}$$

که در آن $T_n \equiv T\ (n \bmod N)$. با استفاده از دنباله معرفی شده، آنها توانستند چندین قضیهٔ همگرایی ضعیف را بیان و اثبات کنند.

اخیرا، کنزوو شیهو [۶] دنباله را به صورت زیر درنظر گرفتند:

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n T x_n + r_n, \qquad \forall n \geq 1 \tag{۱,۳}$$

که در آن $\alpha_n , \beta_n \in]0,1[$ در شرط $\alpha_n + \beta_n \leq 1$ صدق می‌کنند و r_n بردار خطا می‌باشد. با در نظر گرفتن این الگوریتم، آنها توانستند قضیهٔ زیر را اثبات کنند.

قضیهٔ ۱,۱: فرض کنیم K یک زیرمجموعه ناتهی، بسته ومحدب از فضای هیلبرت حقیقی H باشد. نگاشت غیرانبساطی $T : H \longrightarrow K$ را چنان درنظر می‌گیریم که مجموعه نقاط ثابت $F(T)$ ناتهی باشد. فرض کنیم دنباله $\{x_n\}$ در H با درنظر گرفتن $x_1 \in H$، به‌صورت زیر تولید شود:

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n T x_n + r_n, \qquad \forall n \geq 1 \tag{۱,۴}$$

که در آن r_n بردار خطا می‌باشد. فرض کنیم $\{\alpha_n\}$ و $\{\beta_n\}$ دو دنباله از اعداد حقیقی در $[0,1]$ باشند به طوری‌که برای هر $n \geq 1$، $\alpha_n + \beta_n \leq 1$ و شرایط زیر برقرار باشند:

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n = \infty$؛

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \| r_n \| < \infty$؛

پ) $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\alpha_n - \beta_n) < \infty$.

آن‌گاه دنباله $\{x_n\}$ که توسط رابطهٔ (۱,۴) تولید شده است همگرای ضعیف به یک نقطه ثابت از T است.

برای اثبات نتایج اصلی این مقاله، لم‌های مهم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۱,۲[۷]: فرض کنیم E یک فضای باناخ محدب یکنواخت، $\delta > 0$ یک عدد مثبت و $B_\delta(0)$ یک گوی بسته در E باشد. آن‌گاه یک تابع پیوسته، اکیداً صعودی و محدب $g : [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty[$ با شرط $g(0)=0$ وجود دارد به طوری که:

$$\|ax+by+cz+dw\|^2 \leq a\|x\|^2 + b\|y\|^2 + c\|z\|^2 + d\|w\|^2 - abg(\|x-y\|)$$

برای هر $x, y, z, w \in B_\delta(0) = \{ x \in E\ ;\ \|x\| \leq \delta \}$ و $a,b,c,d \in [0,1]$ که در آن $a+b+c+d = 1$.

لم ۱,۳[۸]: (خاصیت اوپیال) اگر در فضای هیلبرت H، دنباله $\{x_n\}$ به طور ضعیف به x_0 همگرا باشد آن‌گاه برای هر $x \neq x_0$ داریم:

$$\liminf_{n\to\infty}\|x_n - x_0\| < \liminf_{n\to\infty}\|x_n - x\|.$$

لم ۱,۴[۹]: فرض کنیم C یک زیرمجموعهٔ ناتهی، بسته و محدب از فضای باناخ محدب یکنواخت حقیقی E و $T: C \longrightarrow C$ یک نگاشت غیرانبساطی باشد.آن‌گاه نگاشت $I - T$ در صفر نیم بسته است؛ یعنی اگر؛ $x_n \xrightarrow{w} x$ و $x_n - Tx_n \xrightarrow{s} 0$ آن‌گاه $Tx = x$.

لم ۱,۵[۱۰]: فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنبالهٔ نامنفی باشند که در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$a_{n+1} \le a_n + b_n. \qquad \forall n \ge 1$$

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} a_n$ موجود است.

در بخش دوم، ابتدا یک شکل جدید از الگوریتم بازگشتی مان را ارائه می‌دهیم و همگرایی ضعیف این الگوریتم را برای یافتن نقطه ثابت مشترک دو نگاشت غیرانبساطی $T_1, T_2 : C \longrightarrow C$ اثبات می‌کنیم. در بخش سوم یک کاربرد از نتایج به دست آمده را بیان می‌کنیم.

۲. نتایج اصلی

در این بخش یک شکل جدید از الگوریتم بازگشتی مان را ارائه می‌دهیم و سپس همگرایی ضعیف این الگوریتم را مورد بررسی قرار می‌دهیم. دو قضیه زیر، نتایج اصلی این بخش است.

قضیهٔ ۲,۱: فرض کنیم C یک زیرمجموعه ناتهی، بسته و محدب از فضای هیلبرت H باشد و $T_1, T_2 : C \longrightarrow C$ دو نگاشت غیرانبساطی باشند به طوری‌که $F(T_1) \cap F(T_2) \neq \phi$. فرض کنیم دنباله $\{x_n\}$ در H به صورت زیر تولید شود:

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + \beta_n T_1 x_{n-1} + \gamma_n T_2 x_n + \delta_n r_n, \qquad \forall n \ge 1 \tag{۲,۱}$$

که در آن $x_0 \in H$، $\{r_n\}$ دنباله کراندار از خطاها، $\{\alpha_n\}$، $\{\beta_n\}$، $\{\gamma_n\}$ و $\{\delta_n\}$ دنباله‌هایی از اعداد حقیقی در $[0,1]$ هستند به طوری که برای هر $n \ge 1$ در شرط $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \delta_n \le 1$ و $\gamma_n < 1$ صدق می‌کنند و همچنین شرایط زیر برقرار است:

الف) برای هر $\gamma \in [0,1[$ نگاشت $I - \gamma T_2$ پوشاست؛

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\alpha_n - \beta_n - \gamma_n}{1-\gamma_n} < \infty$؛

ج) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n\beta_n}{1-\gamma_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n\gamma_n}{1-\gamma_n}=\infty$.

آن‌گاه دنباله $\{x_n\}$ تولید شده توسط (۲,۱)، همگرای ضعیف به یک $\hat{x}\in F(T_1)\cap F(T_2)$ است.

اثبات: ابتدا ثابت می‌کنیم دنباله $\{x_n\}$ کراندار است. $x^*\in F(T_1)\cap F(T_2)$ را در نظر می‌گیریم. برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم:

$$\|x_n-x^*\|=\|\alpha_n x_{n-1}+\beta_n\, T_1x_{n-1}+\gamma_n T_2x_n+\delta_n r_n-x^*\|$$

$$=\|\alpha_n(x_{n-1}-x^*)+\beta_n\,(T_1x_{n-1}-T_1x^*)+\gamma_n(T_2x_n-T_2x^*)+\delta_n r_n-(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)x^*\|$$

$$\leq\alpha_n\|x_{n-1}-x^*\|+\beta_n\|T_1x_{n-1}-T_1x^*\|+\gamma_n\|T_2x_n-T_2x^*\|+\|\delta_n r_n-(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)x^*\| \quad (۲,۲)$$

از رابطۀ بالا و غیرانبساطی بودن T_2,T_1 نتیجه می‌شود:

$$\|x_n-x^*\|\leq\alpha_n\|x_{n-1}-x^*\|+\beta_n\|x_{n-1}-x^*\|+\gamma_n\|x_n-x^*\|+\|\delta_n r_n-(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)x^*\|. \quad (۲,۳)$$

با ساده کردن رابطۀ (۲,۳) داریم:

$$\|x_n-x^*\|\leq\frac{\alpha_n+\beta_n}{1-\gamma_n}\|x_{n-1}-x^*\|+\left\|\frac{\delta_n}{1-\gamma_n}r_n-\frac{(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)}{1-\gamma_n}x^*\right\|$$

$$\leq\frac{\alpha_n+\beta_n}{1-\gamma_n}\|x_{n-1}-x^*\|+\frac{\delta_n}{1-\gamma_n}\|r_n\|+\frac{(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)}{1-\gamma_n}\|x^*\|$$

$$\leq\|x_{n-1}-x^*\|+\frac{(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)}{1-\gamma_n}(\|r_n\|+\|x^*\|). \quad (۲,۴)$$

با در نظر گرفتن $a_n=\|x_n-x^*\|$ و $b_n=\frac{(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)}{1-\gamma_n}(\|r_n\|+\|x^*\|)$ در رابطۀ بالا و با استفاده از کرانداری $\|r_n\|+\|x^*\|$ و شرط (ب)نتیجه می‌شود $\sum_{n=1}^{\infty}b_n<\infty$. لذا با استفاده از لم ۱,۵نتیجه می‌گیریم $\lim_{n\to\infty}\|x_{n-1}-x^*\|$ موجود است. بنابراین دنباله $\{x_n\}$ کراندار است.

با استفاده از لم ۱,۲یک تابع محدب، پیوسته و اکیداً صعودی مانند $g_1:[0,\infty[\longrightarrow[0,\infty[$ وجود دارد به طوری که برای هر $n\in\mathbb{N}$:

$$\|x_n-x^*\|^2=\|\alpha_n x_{n-1}+\beta_n\, T_1x_{n-1}+\gamma_n T_2x_n+\delta_n r_n-x^*\|^2$$

$$=\left\|\alpha_n(x_{n-1}-x^*)+\beta_n\,(T_1x_{n-1}-T_1x^*)+\gamma_n(T_2x_n-T_2x^*)+\delta_n r_n-(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)x^*\right\|^2$$

$$\le \alpha_n\left\|x_{n-1}-x^*\right\|^2+\beta_n\left\|T_1x_{n-1}-T_1x^*\right\|^2+\gamma_n\left\|T_2x_n-T_2x^*\right\|^2$$

$$+(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)\left\|\frac{\delta_n}{(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)}r_n-x^*\right\|^2-\alpha_n\beta_n g_1(\|x_{n-1}-T_1x_{n-1}\|)$$

$$\le \alpha_n\left\|x_{n-1}-x^*\right\|^2+\beta_n\left\|x_{n-1}-x^*\right\|^2+\gamma_n\left\|x_n-x^*\right\|^2$$

$$+(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)\left\|\frac{\delta_n}{(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)}r_n-x^*\right\|^2-\alpha_n\beta_n g_1(\|x_{n-1}-T_1x_{n-1}\|). \quad (۲,۵)$$

از رابطهٔ (۲,۵) نتیجه می‌شود:

$$\alpha_n\beta_n g_1(\|x_{n-1}-T_1x_{n-1}\|)\le(\alpha_n+\beta_n)\left\|x_{n-1}-x^*\right\|^2-(1-\gamma_n)\left\|x_n-x^*\right\|^2$$

$$+(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)\left\|\frac{\delta_n}{(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)}r_n-x^*\right\|^2$$

$$\le(1-\gamma_n)\left\|x_{n-1}-x^*\right\|^2-(1-\gamma_n)\left\|x_n-x^*\right\|^2$$

$$+(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)\left\|\frac{\delta_n}{(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)}r_n-x^*\right\|^2. \quad (۲,۶)$$

با ساده کردن رابطهٔ (۲,۶) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\alpha_n\beta_n}{1-\gamma_n}g_1(\|x_{n-1}-T_1x_{n-1}\|)\le\left\|x_{n-1}-x^*\right\|^2-\left\|x_n-x^*\right\|^2$$

$$+\frac{1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n}{1-\gamma_n}\left\|\frac{\delta_n}{(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)}r_n-x^*\right\|^2. \quad (۲,۷)$$

با گرفتن $\sum$ از طرفین نامساوی (۲,۷) نتیجه می‌گیریم:

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{\alpha_n\beta_n}{1-\gamma_n}\, g_1(\|x_{n-1}-T_1x_{n-1}\|)\le\|x_0-x^*\|^2-\|x_k-x^*\|^2$$

$$+\sum_{n=1}^{k}\frac{1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n}{1-\gamma_n}\left\|\frac{\delta_n}{(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)}r_n-x^*\right\|^2$$

$$\le\|x_0-x^*\|^2+\sum_{n=1}^{k}\frac{1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n}{1-\gamma_n}M \qquad (۲,۸)$$

که در آن $0<M<+\infty$ چنان انتخاب شده است که برای هر $n\in\mathbb{N}$رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\left\|\frac{\delta_n}{(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)}r_n-x^*\right\|\le M.$$

(با استفاده از کرانداری $\{r_n\}$ و این‌که $\frac{\delta_n}{(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)}\le 1$ نتیجه می‌شود دنباله

$\left\{\frac{\delta_n}{(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)}r_n-x^*\right\}$کراندار است.)

با $k\to\infty$ از طرفین رابطهٔ (۲,۸) نتیجه می‌گیریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n\beta_n}{1-\gamma_n}\, g \quad (۲,۹) \quad \cdot T_1x_{n-1}\|)\le\|x_0-x^*\|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n}{1-\gamma_n}M<+\infty.$$

از این‌که $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n\beta_n}{1-\gamma_n}=\infty$ و با استفاده از رابطهٔ (۲,۹) نتیجه می‌گیریم:

$$\lim_{n\to\infty} g_1(\|x_{n-1}-T_1x_{n-1}\|)=0. \qquad (۲,۱۰)$$

با استفاده از خواص تابع g_1، از رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n-1}-T_1x_{n-1}\|=0. \qquad (۲,۱۱)$$

به طور مشابه یک تابع محدب، پیوسته و اکیداً صعودی $g_2:[0,\infty[\longrightarrow[0,\infty[$ وجود دارد به طوری‌که برای هر $n\in\mathbb{N}$:

$$\|x_n-x^*\|^2=\|\alpha_nx_{n-1}+\beta_n\, T_1x_{n-1}+\gamma_nT_2x_n+\delta_nr_n-x^*\|^2$$

$$=\left\|\alpha_n(x_{n-1}-x^*)+\beta_n\,(T_1x_{n-1}-T_1x^*)+\gamma_n(T_2x_n-T_2x^*)+\delta_nr_n-(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)x^*\right\|^2$$

$$\leq\alpha_n\left\|x_{n-1}-x^*\right\|^2+\beta_n\left\|T_1x_{n-1}-T_1x^*\right\|^2+\gamma_n\left\|T_2x_n-T_2x^*\right\|^2$$

$$+(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)\left\|\frac{\delta_n}{(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)}r_n-x^*\right\|^2-\alpha_n\gamma_ng_2(\left\|x_{n-1}-T_2x_n\right\|)$$

$$\leq\alpha_n\left\|x_{n-1}-x^*\right\|^2+\beta_n\left\|x_{n-1}-x^*\right\|^2+\gamma_n\left\|x_n-x^*\right\|^2$$

$$+(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)\left\|\frac{\delta_n}{(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)}r_n-x^*\right\|^2-\alpha_n\gamma_ng_2(\left\|x_{n-1}-T_2x_n\right\|). \qquad (۲,۱۲)$$

با روند مشابه با حالت قبل، نتیجه می‌گیریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_{n-1}-T_2\,x_n\right\|=0. \qquad (۲,۱۳)$$

از طرفی با استفاده از رابطهٔ (۲,۱) برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم:

$$\left\|x_n-x_{n-1}\right\|=\left\|\alpha_nx_{n-1}+\beta_n\,T_1x_{n-1}+\gamma_nT_2x_n+\delta_nr_n-x_{n-1}\right\|$$

$$\leq\left\|\alpha_nx_{n-1}+\beta_n\,T_1x_{n-1}+\gamma_nT_2x_n+\delta_nr_n-(\alpha_n+\beta_n+\gamma_n+\delta_n)x_{n-1}\right\|$$

$$+(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\delta_n)\left\|x_{n-1}\right\|$$

$$\leq\beta_n\left\|T_1x_{n-1}-x_{n-1}\right\|+\gamma_n\left\|T_2x_n-x_{n-1}\right\|+\delta_n\left\|r_n-x_{n-1}\right\|$$

$$+(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n-\delta_n)\left\|x_{n-1}\right\|$$

$$\leq\beta_n\left\|T_1x_{n-1}-x_{n-1}\right\|+\gamma_n\left\|T_2x_n-x_{n-1}\right\|+(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)\left\|r_n-x_{n-1}\right\|$$

$$+(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)\left\|x_{n-1}\right\|$$

$$=\beta_n\left\|T_1x_{n-1}-x_{n-1}\right\|+\gamma_n\left\|T_2x_n-x_{n-1}\right\|+(1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n)(\left\|r_n-x_{n-1}\right\|+\left\|x_{n-1}\right\|)$$

$$\leq \beta_n\|T_1x_{n-1}-x_{n-1}\|+\gamma_n\|T_2x_n-x_{n-1}\|+\frac{1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n}{1-\gamma_n}(\|r_n-x_{n-1}\|+\|x_{n-1}\|). \quad (۲,۱۴)$$

از این‌که دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{r_n\}$ کراندار هستند و $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n}{1-\gamma_n}=0$ و با استفاده از روابط (۲,۱۱) و (۲,۱۳)، با $n\to\infty$ از رابطه بالا نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_{n-1}\|=0. \quad (۲,۱۵)$$

حال با استفاده از نامساوی مثلثی برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم:

$$\|x_n-T_2x_n\|\leq\|x_n-x_{n-1}\|+\|x_{n-1}-T_2x_n\|. \quad (۲,۱۶)$$

با $n\to\infty$ در رابطه بالا و با استفاده از روابط (۲,۱۳) و (۲,۱۶) نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-T_2x_n\|=0. \quad (۲,۱۷)$$

در آخر ثابت می‌کنیم دنباله $\{x_n\}$ به طور ضعیف همگراست. از این‌که دنباله $\{x_n\}$ کراندار است، دارای یک زیردنباله به طور ضعیف همگرا مانند $\{x_{n_k}\}$ به یک $\hat{x}\in C$ می‌باشد. با استفاده از لم ۱,۴ و روابط (۲,۱۱) و (۲,۱۷) نتیجه می‌گیریم $\hat{x}\in F(T_1)\cap F(T_2)$.

حال نشان می‌دهیم دنباله $\{x_n\}$ به طور ضعیف به $\hat{x}$ همگراست.

(فرض خلف) فرض کنیم این چنین نباشد لذا زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ مانند $\{x_{m_k}\}$ وجود دارد به طوری که به یک $\bar{x}\in C$ به طور ضعیف همگراست و $\bar{x}\neq\hat{x}$.

به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که $\bar{x}\in F(T_1)\cap F(T_2)$. از طرفی ثابت کردیم که $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|$ برای هر $x^*\in F(T_1)\cap F(T_2)$ وجود دارد. قرار می‌دهیم $d=\lim_{n\to\infty}\|x_n-\hat{x}\|$. با استفاده از لم ۱,۳ نتیجه می‌شود:

$$d=\lim_{n\to\infty}\|x_n-\hat{x}\|=\lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}-\hat{x}\|<\liminf_{k\to\infty}\|x_{n_k}-\bar{x}\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n-\bar{x}\|$$

$$=\lim_{k\to\infty}\|x_{m_k}-\bar{x}\|=\liminf_{k\to\infty}\|x_{m_k}-\bar{x}\|<\liminf_{k\to\infty}\|x_{m_k}-\hat{x}\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n-\hat{x}\|=d. \quad (۲,۱۸)$$

که این رابطه یک تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است و در نتیجه دنباله $\{x_n\}$ به طور ضعیف به $\hat{x}$ همگراست. این اثبات را کامل می‌کند. □

در ادامه قضیه‌ای دیگر را شبیه به قضیهٔ ۲,۱ بیان و اثبات می‌کنیم. شرایط این قضیه با قضیهٔ ۲,۱ متفاوت است.

قضیهٔ ۲،۲: فرض کنیم C یک زیرمجموعهٔ ناتهی، بسته و محدب از فضای هیلبرت H باشد و $T_1, T_2 : C \longrightarrow C$ دو نگاشت غیرانبساطی باشند به طوری‌که $F(T_1) \cap F(T_2) \neq \phi$. فرض کنیم دنباله $\{x_n\}$ در H با استفاده از رابطه (۲،۱) تولید شود که در آن $x_0 \in H$، $\{r_n\}$ دنباله کراندار از خطاها، $\{\alpha_n\}$، $\{\beta_n\}$، $\{\gamma_n\}$ و $\{\delta_n\}$ دنباله‌هایی از اعداد حقیقی در [۰،۱] هستند به طوری که برای هر $n \geq 1$ در شرط $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \delta_n \leq 1$ و $\gamma_n < 1$ صدق می‌کنند و همچنین شرایط زیر برقرار است:

الف) برای هر $\gamma \in [0,1[$ نگاشت $I - \gamma T_2$ پوشاست؛

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\alpha_n - \beta_n - \gamma_n}{1-\gamma_n} < \infty$؛

ج) $\liminf \frac{\alpha_n \beta_n}{1-\gamma_n} > 0, \ \liminf \frac{\alpha_n \gamma_n}{1-\gamma_n} > 0$.

آن‌گاه دنباله $\{x_n\}$ تولید شده توسط رابطهٔ (۲،۱) همگرای ضعیف به یک $\hat{x} \in F(T_1) \cap F(T_2)$ می‌باشد.

اثبات: (تفاوت این قضیه با قضیهٔ ۲،۱ در قسمت (ج) می‌باشد. توجه داریم که تنها قسمتی از اثبات قضیه قبل که از قسمت (ج) آن استفاده شده است، به دست آوردن روابط (۲،۱۱) و (۲،۱۳) می‌باشد. بنابراین در اثبات این قضیه فقط به اثبات این روابط می‌پردازیم.)

شبیه اثبات قضیهٔ قبل، تابع محدب، پیوسته و اکیداً صعودی مانند $g_1 : [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty[$ یافت می‌شود که

$$\frac{\alpha_n \beta_n}{1-\gamma_n} g_1(\|x_{n-1} - T_1 x_{n-1}\|) \leq \|x_{n-1} - x^*\|^2 - \|x_n - x^*\|^2$$
$$+ \frac{1-\alpha_n - \beta_n - \gamma_n}{1-\gamma_n} \left\| \frac{\delta_n}{(1-\alpha_n - \beta_n - \gamma_n)} r_n - x^* \right\|^2. \tag{۲،۱۹}$$

از این‌که $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x^*\|$ موجود، $\lim_{n\to\infty} \frac{1-\alpha_n - \beta_n - \gamma_n}{1-\gamma_n} = 0$ و $\liminf_{n\to\infty} \frac{\alpha_n \beta_n}{1-\gamma_n} > 0$، با $n \to \infty$ از رابطهٔ (۲،۱۹) نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n\leftarrow\infty} g_1(\|x_{n-1} - T_1 x_{n-1}\|) = 0. \tag{۲،۲۰}$$

با استفاده از خواص تابع g_1، از رابطهٔ بالا داریم:

$$\lim_{n\leftarrow\infty} \|x_{n-1} - T_1 x_{n-1}\| = 0. \tag{۲،۲۱}$$

با روندی مشابه با اثبات قضیهٔ ۲,۱ و حالت قبل نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n\leftarrow\infty}\|x_{n-1}-T_2x_n\|=0. \tag{۲,۲۲}$$

$\square$

بقیهٔ اثبات، شبیه اثبات قضیهٔ ۲,۱ است و تغییر نمی‌کند.

در ادامه چند نتیجه از قضیه‌های گفته شده را بیان می‌کنیم.

نتیجهٔ ۲,۳: فرض کنیم C یک زیرمجموعه ناتهی، بسته و محدب از فضای هیلبرت H باشد و $T:C\longrightarrow C$ یک نگاشت غیرانبساطی باشد به طوری‌که $F(T)\neq\phi$. فرض کنیم دنباله $\{x_n\}$ در H به صورت زیر تولید شود:

$$x_n=\frac{\alpha_n}{1-\gamma_n}x_{n-1}+\frac{\beta_n}{1-\gamma_n}T_1x_{n-1}+\frac{\delta_n}{1-\gamma_n}r_n\ ,\qquad \forall n\geq 1 \tag{۲,۲۳}$$

که در آن $x_0\in H$، $\{r_n\}$ دنباله کراندار از خطاها، $\{\alpha_n\}$، $\{\beta_n\}$، $\{\gamma_n\}$ و $\{\delta_n\}$ دنباله‌هایی از اعداد حقیقی در [۰،۱] هستند به طوری که برای هر $n\geq 1$ در شرط $\alpha_n+\beta_n+\gamma_n+\delta_n\leq 1$ و $\gamma_n<1$ صدق می‌کنند و همچنین شرایط زیر برقرار است:

الف) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n}{1-\gamma_n}<\infty$؛

ب) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n\beta_n}{1-\gamma_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n\gamma_n}{1-\gamma_n}=\infty$.

آن‌گاه دنباله $\{x_n\}$ همگرای ضعیف به یک $\hat{x}\in F(T)$ است.

اثبات: با قرار دادن $T_2=I$ در قضیهٔ ۲,۱ نتیجه حاصل می‌شود.

$\square$

تبصرهٔ ۲,۴: می‌توان با قرار دادن $T_2=I$ در قضیهٔ ۲,۲، نتیجه‌ای مشابه نتیجهٔ ۲,۳ به دست آورد. توجه داریم که این نتایج، شکل دیگری از قضیهٔ ۱,۱ را ایجاد می‌کند.

در ادامه یک مثال ارائه می‌دهیم و از قضیه ۲,۱ برای همگرایی دنباله به دست آمده استفاده می‌کنیم.

مثال ۲,۵: نگاشت‌های $T_1,T_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را با ضابطه‌های $T_1x=x$ و $T_2x=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ در نظر می‌گیریم. به وضوح T_1 و T_2 دو تابع غیرانبساطی در فضای هیلبرت $H=\mathbb{R}$ هستند. همچنین می‌دانیم که $F(T_1)\cap F(T_2)=\{1\}$. با قرار دادن $r_n=0$ ، $\alpha_n=1-\frac{1}{n}$، $\beta_n=\gamma_n=\frac{1}{2n}$ و $\delta_n=\frac{1}{n^2}$ تمام شرایط قضیهٔ ۲,۱ برقرار می‌باشد. با در نظر گرفتن $x_0\in\mathbb{R}$، دنباله $\{x_n\}$ به صورت زیر تولید می‌شود:

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + \beta_n T_1 x_{n-1} + \gamma_n T_2 x_n + \delta_n r_n$$

$$= (1-\frac{1}{n})x_{n-1} + \frac{1}{2n} x_{n-1} + \frac{1}{2n} \times (\frac{1}{2} x_n + \frac{1}{2})$$

$$= (1-\frac{1}{n} + \frac{1}{2n})x_{n-1} + \frac{1}{4n} x_n + \frac{1}{4n}.$$

با استفاده از قضیهٔ ۲,۱ نتیجه می‌شود دنباله بازگشتی $\{x_n\}$ به $x=1$ همگرا می‌باشد.

۳. کاربرد

در این بخش یک کاربرد از نتایج اصلی را بیان می‌کنیم:

قضیه ۳,۱: فرض کنیم A, B دو زیرمجموعهٔ ناتهی، بسته و محدب از فضای هیلبرت حقیقی H باشد و P_A و P_B عملگرهای تصویر غیرانبساطی (قوی) هستند به طوری که $A \cap B \neq \phi$. فرض کنیم دنباله $\{x_n\}$ در H به صورت زیر تولید شود:

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + \beta_n P_A x_{n-1} + \gamma_n P_B x_n + \delta_n r_n, \qquad \forall n \geq 1 \tag{۳,۱}$$

که در آن $x_0 \in H$، r_n بردار خطا و $\{\alpha_n\}$، $\{\beta_n\}$، $\{\gamma_n\}$ و $\{\delta_n\}$ دنباله هایی از اعداد حقیقی در [۰،۱] هستند به طوری‌که برای هر $n \geq 1$ در شرط $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \delta_n \leq 1$ و $\gamma_n < 1$ صدق می‌کنند و همچنین شرایط زیر برقرار است:

الف) برای هر $\gamma \in]0,1[$ نگاشت $I - \gamma P_B$ پوشاست؛

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\alpha_n-\beta_n-\gamma_n}{1-\gamma_n} < \infty$؛

پ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \beta_n}{1-\gamma_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \gamma_n}{1-\gamma_n} = \infty$.

آن‌گاه دنباله $\{x_n\}$ تولید شده توسط (۳,۱) همگرای ضعیف به یک $x^* \in A \cap B$ است.

اثبات: با قرار دادن $T_1 = P_A$ و $T_2 = P_B$ و استفاده از قضیهٔ ۲,۱ نتیجه حاصل می‌شود.

قدردانی

در این قسمت پیشاپیش از سردبیران و داوران نشریه به خاطر نظرات و پیشنهادات ارزشمندشان درجهت بهبود مقاله تشکر می‌کنیم.

References

1. Krasnoselskii, M.A.: Two remarks on the method of successive approximations. Uspekhi Mat. Nauk10(1955), 123–127.

2. Mann, W.R.: Mean value methods in iteration. Bull. Am. Math. Soc. 4(1953), 506–510.

3. S. Reich, Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 67 (1979), 274-276.

4. J. G. Falset, W. Kaczor, T. Kuczumow and S. Reich, Weak convergence the-orems for asymptotically nonexpansive mappings and semigroups, Nonlinear Anal. 43 (2001), 377-401.

5. H. K. Xu and M. G. Ori, An implicit iterative process for nonexpansive map-pings, Numer. Funct.Anal.Optim. 22 (2001), 767-773.

6. Kanzow, C., Shehu, Y. Generalized Krasnoselskii–Mann type iterations for nonexpansive mappings in Hilbert spaces. Comput.Optim. Appl. 67 (2017), 595–620.

7. Y. Hao, S. Y. Cho and X. Qin, Some weak convergence theorems for a family of asymptotically nonexpansivenonself mappings, Fixed Point Theory Appl. 2010 (2010), Article ID 218573.

8. Z. Opial, Weak convergence of the sequence of successive appproximations for nonexpansive mappings, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 591-597.

9. F. E. Browder, Semicontractive and semiaccretive nonlinear mappings in Ba-nach spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 660-665.

10. K. K. Tan and H. K. Xu, Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process, J. Math.Anal. Appl. 178 (1993), 301-308.