Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

New methods for constructing shellable simplicial complexes

Mohammad Farrokhi Derakhshandeh Ghouchan[1], **Ali Akbar Yazdan Pour**[2]

1. Research Center for Basic Sciences and Modern Technologies (RBST), Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan 45137-66731, Iran.

E-mail: farrokhi@iasbs.ac.ir

2. Department of Mathematics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan 45137-66731, Iran

✉E-mail: yazdan@iasbs.ac.ir

Article Info | **ABSTRACT**

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
15 February 2021
Received in revised form:
18 April 2021
Accepted:
1 May 2021
Published online:
31 December 2022

Keywords:
clutter,
hybrid clutter,
shellability,
Cohen-Macaulay,
independence complex.

Introduction

A clutter $\mathcal{C}$ with vertex set $[n]=\{1,\ldots,n\}$ is an antichain of subsets of $[n]$, called circuits, covering all vertices. The clutter is d-uniform if all of its circuits have the same cardinality. If $\mathbb{K}$ is a field, then there is a one-to-one correspondence between clutters on $[n]$ and square-free monomial ideals in $\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ as follows: To each clutter $\mathcal{C}$ we correspond its circuit ideal $I(\mathcal{C})$ generated by monomials $x_{i_1}\cdots x_{i_k}$ with $\{i_1,\ldots,i_k\}\in\mathcal{C}$. Conversely, to each square-free monomial ideal I with minimal set of generators $\mathcal{G}(I)$, we correspond a clutter with circuits $\{i_1,\ldots,i_k\}$, where $x_{i_1}\cdots x_{i_k}\in\mathcal{G}(I)$. The independence complex of a clutter $\mathcal{C}$ on $[n]$ is the simplicial complex $\Delta_{\mathcal{C}}$ whose faces are independent sets in $\mathcal{C}$ by which we mean sets $F\subseteq[n]$ such that $e\nsubseteq F$ for all $e\in\mathcal{C}$. It is easy to see that the Stanley-Reisner ideal of $\Delta_{\mathcal{C}}$ coincides with $I(\mathcal{C})$. The above correspondence establishes a one-to-one correspondence between simplicial complexes and independence complex of clutters. A simplicial complex Δ is shellable if there exists a total order on its facets, say $F_1<\cdots<F_m$, such that the simplicial complex $\langle F_1,\ldots,F_{i-1}\rangle\cap\langle F_i\rangle$ is pure of dimension $\dim F_i-1$. A clutter $\mathcal{C}$ is called pure/shellable/Cohen-Macaulay if its independence complex $\Delta_{\mathcal{C}}$ is pure/shellable/Cohen-Macaulay. The shellability of simplicial complexes (and hence shellability of clutters) is an NP-complete problem in general. In this paper, we show that every clutter $\mathcal{C}$ can be embedded into a (pure) shellable clutter $\mathcal{C}'$ and that the clutter $\mathcal{C}'$ can be chosen to be d-uniform if $\mathcal{C}$ is so. Since pure shellable simplicial complexes are Cohen-Macaulay, it follows that every clutter can be embedded into a Cohen-Macaulay clutter.

Main Results

Let $\mathcal{C}$ be a d -uniform clutter with vertex set V. A subset $F \subseteq V$ is called a clique in $\mathcal{C}$ if either $|F| < d$ or else $e \in \mathcal{C}$ for all d -subsets e of F.

Definition. Let $\mathcal{C}$ be a d-uniform clutter with vertex set V and $A_1, \ldots, A_\theta$ be a partition of V where each A_i is a clique in $\mathcal{C}$. For each $i = 1, \ldots, \theta$ let B_i be a non-empty set such that $B_i \cap V = \varnothing$ and $B_i \cap B_j = \varnothing$ for all $i \neq j$. Define the d -uniform clutter $\mathcal{C}_{A_1,\ldots,A_\theta}^{B_1,\ldots,B_\theta}$ as follows:

The clutter $\mathcal{C}_{A_1,\ldots,A_\theta}^{B_1,\ldots,B_\theta}$ is called $\quad \mathcal{C}_{A_1,\ldots,A_\theta}^{B_1,\ldots,B_\theta} = \mathcal{C} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\theta} \{ e \subseteq A_i \cup B_i : \ |e| = d \} \right)$

the hybrid clutter of $\mathcal{C}$ with respect to vertex partition $A_1, \ldots, A_\theta$ and sets $B_1, \ldots, B_\theta$

Theorem 1. Let $\mathcal{C}$ be a d -uniform clutter on the vertex set $[n]$ and $\mathcal{C}_{A_1,\ldots,A_\theta}^{B_1,\ldots,B_\theta}$ be called the hybrid clutter of $\mathcal{C}$ with respect to vertex partition $A_1, \ldots, A_\theta$ and sets $B_1, \ldots, B_\theta$ where $|B_i| \geq d-1$, for all $i = 1, \ldots, \theta$. Let $\Delta' = \Delta_{\mathcal{C}'}$ be the independence complex of $\mathcal{C}'$. Then,

- Δ' is pure shellable of dimension $(d-1)\theta - 1$.
- The ring $\mathbb{K}[\Delta']$ is Cohen-Macaulay of dimension $(d-1)\theta$.

Theorem 2. Let $\mathcal{C}$ be a d -uniform clutter on the vertex set V. For each $i = 1, \ldots, n$ consider m_i finite non-empty set $B_{i,1}, \ldots, B_{i,m_i}$ such that $V, B_{i,j}$ are pairwise disjoint. Let $\mathcal{C}'$ be a clutter obtained by $\mathcal{C}$ as follows:

$$\mathcal{C}' = \mathcal{C} \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \left\{ B_{i,1} \cup \{x_i\}, \ldots, B_{i,k_i} \cup \{x_i\} \right\} \right).$$

If $\Delta' := \Delta_{\mathcal{C}'}$ is the independence complex of $\mathcal{C}'$, then

- The simplicial complex Δ' is shellable of dimension $\sum_{i=1}^{n} |B_i| - 1$.
- $\mathbb{K}[\Delta']$ is Cohen-Macaulay if and only if $m_i = 1$ for all $i = 1, \ldots, n$.

How to cite: Farrokhi Derakhshandeh Ghouchan, M., Yazdan Pour, A. A. (2022). New methods for constructing shellable simplicial complexes. *Mathematical Researches*, 8 (4), 164-179.

Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

روش‌هایی نوین برای تولید مجتمع‌های سادکی پوسته‌پذیر

محمد فرخی درخشنده قوچان[1]، علی اکبر یزدان‌پور[2]

۱. پژوهشکدهٔ علوم پایه و فناوری‌های نوین، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان، ایران. رایانامه: farrokhi@iasbs.ac.ir
۲. نویسندهٔ مسئول، دانشکده ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان، ایران، رایانامه: yazdan@iasbs.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۱/۲۷
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۱/۱۹
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۲/۱۱
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰

یک کلاتر با مجموعه رئوس V یک پادزنجیر از زیرمجموعه‌های V است که همه راس‌ها را پوشش می‌دهد. ایدآل مداری $I(\mathcal{C})$ وابسته به کلاتر $\mathcal{C}$ ایدآلی خالی از مربع است که توسط تک‌جمله‌ای‌های $x_{i_1}\cdots x_{i_k}$ تولید می‌شود که در آن $\{i_1,\dots,i_k\}\in\mathcal{C}$. همچنین مجتمع استقلال $\mathcal{C}$ مجتمع سادکی یکتای $\Delta_{\mathcal{C}}$ است که $I_{\Delta_{\mathcal{C}}}=I(\mathcal{C})$. در این مقاله نشان می‌دهیم هر کلاتر داده شده مانند $\mathcal{C}$ را می‌توان به شکل‌های متنوعی در یک کلاتر بزرگ‌تر مانند $\mathcal{C}'$ نشاند به طوری که مجتمع استقلال $\mathcal{C}'$ پوسته‌پذیر باشد. به ویژه کلاتر $\mathcal{C}'$ می‌تواند طوری انتخاب شود که حلقه خارج قسمتی ایدآل مداری آن کوهن-مک‌اولی باشد.

واژه‌های کلیدی:
کلاتر،
کلاتر پیوندی،
پوسته‌پذیری،
کوهن-مک‌اولی،
مجتمع استقلال.

استناد: فرخی درخشنده قوچان، محمد؛ یزدان‌پور، علی اکبر؛ (۱۴۰۱). روش‌هایی نوین برای تولید مجتمع‌های سادکی پوسته‌پذیر. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۴)، ۱۷۹-۱۶۴.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه و پیش‌نیازها

یک مجتمع سادکی[۱] Δ روی مجموعه رئوس $V=V(\Delta)$، خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های V است که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

۱. به ازای هر $v\in V$ داریم. $\{v\}\in V$
۲. اگر $F\in\Delta$ و $G\subseteq F$ آن‌گاه $G\in\Delta$.

هر عنصر $F\in\Delta$ را یک وجه[۲] از Δ گویند و وجه‌های بیشین Δ تحت رابطه شمول را وجه‌واره[۳] می‌نامند. مجموعه وجه‌واره‌های Δ را معمولا با $\mathcal{F}(\Delta)$ نمایش می‌دهند. اگر $\mathcal{F}(\Delta)=\{F_1,\ldots,F_m\}$ به طور خلاصه می‌نویسیم $\Delta=\langle F_1,\ldots,F_m\rangle$. بعد[۴] هر وجه $F\in\Delta$ را به صورت $\dim F=|F|-1$ تعریف می‌شود که در آن $|F|$ تعداد عناصر F است و بعد مجتمع سادکی Δ که با $\dim\Delta$ نمایش داده می‌شود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\dim\Delta=\max\{\dim F:\quad F\in\Delta\}.$$

مجتمع سادکی Δ را محض[۵] گویند اگر بعد همه وجه‌واره‌های آن برابر باشد. مجتمع سادکی $\Delta^{(i)}=\{F\in\Delta:|F|\le i+1\}$ را i-اسکلت[۶] Δ می‌گویند. زیرمجتمع $\mathcal{S}\subseteq\Delta$ را یک زیرمجتمع القایی Δ گویند هرگاه به ازای هر $F\in\Delta$ که $F\subseteq V(\mathcal{S})$ داشته باشیم $F\in\mathcal{S}$.

فرض کنید $\mathbb{K}$ یک میدان باشد و مجتمع سادکی Δ روی مجموعه رئوس $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$ داده شده باشد. به ازای هر زیرمجموعه ناتهی $F=\{i_1,\ldots,i_k\}\subseteq V$ تعریف می‌کنیم $\mathbf{x}_F=x_{i_1}\cdots x_{i_k}$ و قرار می‌دهیم $\mathbf{x}_\varnothing=1$. در این‌صورت ایدآل اِستَنلی-رایزنِر[۷] Δ را با I_Δ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I_\Delta=(\mathbf{x}_F:\quad F\not\in\Delta).$$

همچنین حلقه استنلی-رایزنر Δ را به صورت $\mathbb{K}[\Delta]:=S/I_\Delta$ تعریف می‌کنیم که در آن $S=\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها روی $\mathbb{K}$ است. لازم به ذکر است که $\dim\mathbb{K}[\Delta]=1+\dim\Delta$ که در آن $\dim\mathbb{K}[\Delta]$ بعد کرول[۸] حلقه استنلی-رایزنر Δ است ([۳، قضیه ۵٫۱٫۴] را ببینید).

---
[1] Simplicial complex
[2] Face
[3] Facet
[4] Dimension
[5] Pure
[6] i-skeleton
[7] Stanley-Reisner
[8] Krull dimension

تعریف (مجتمع پوسته‌پذیر[۹]**).** مجتمع سادکی Δ را پوسته‌پذیر گویند هرگاه یک ترتیب کلی روی وجه‌واره‌های آن به شکل $F_1 < F_2 < \cdots < F_r$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $i = 2,\ldots,r$ مجتمع سادکی $\langle F_1,\ldots,F_{i-1}\rangle \cap \langle F_i\rangle$ یک مجتمع سادکی محض از بعد $\dim F_i - 1$ باشد. هر چنین ترتیبی را یک ترتیب پوسته‌ای[۱۰] از Δ گویند. به سادگی دیده می‌شود که $F_1 < F_2 < \cdots < F_r$ یک ترتیب پوسته‌ای از Δ است اگر و تنها اگر به ازای هر $F_j < F_i$، عنصر $x \in F_i \setminus F_j$ و $F_k < F_i$ موجود باشند به طوری که $F_i \setminus F_k = \{x\}$.

بررسی پوسته‌پذیری مجتمع‌های سادکی در حالت کلی یک مسأله NP-کامل است [۹]. از آن‌جا که در این مقاله تولید مجتمع‌های سادکی پوسته‌پذیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم در زیر درباره اهمیت چنین مجتمع‌های سادکی نکته‌هایی را یادآور می‌شویم.

کاربردهایی از مجتمع‌های سادکی پوسته‌پذیر: مجتمع‌های سادکی پوسته‌پذیر هم در ترکیبیات و هم در جبرجابجایی نقش مهمی ایفا می‌کنند. از نقطه‌نظر ترکیبیاتی مفهوم پوسته‌پذیری منجر به این می‌شود که یک اثبات استقرایی برای فرمول اویلر-پوانکاره[۱۱] در بعد دلخواه به‌دست بیاوریم. اگر f_i تعداد i-وجه‌های یک چندوجهی[۱۲] از بعد d را نشان دهد (که در آن $f_{-1} = f_d = 1$)، آن‌گاه فرمول اویلر-پوانکاره بیان می‌کند که

$$\sum_{i=-1}^{d} (-1)^i f_i = 1.$$

از لحاظ تاریخی این فرمول توسط اویلر در سال ۱۷۵۲ برای چندوجهی‌های از بعد ۳ کشف شد. سپس فرمول اویلر توسط شِلافْلی[۱۳] (۱۸۵۲) تعمیم داده شد. با این وجود اولین اثبات درست از این فرمول توسط پوانکاره ارائه شد. برای این منظور، پوانکاره متوسل به مبانی توپولوژی جبری شد و پس از ارائه اثبات اولیه در سال ۱۸۹۳ که دارای برخی اشکالات بود، در نهایت در سال ۱۸۹۹ اولین اثبات صحیح از این فرمول را بیان کرد. اثبات‌های استقرایی اولیه‌ای که از این فرمول بیان شدند، به‌ویژه اثبات ارائه شده توسط شلافلی در سال ۱۸۵۲، بر این واقعیت استوار است که مرز هر چندوجهی را می‌توان به شکل خوبی به‌صورت استقرایی در کنار هم قرار داد که امروزه آن را ترتیب پوسته‌ای می‌گویند. در عین حال، اثبات این‌که مجتمع مرزی هر چندوجهی پوسته‌پذیر است بعدها توسط بِروگِسر[۱۴] و مَنی[۱۵] در سال ۱۹۷۰ بیان شد و خیلی زود کاربرد قابل توجه و برجسته پوسته‌پذیری توسط مَک‌مولِن[۱۶] بیان شد که همان اثبات مربوط به " قضیه کران

[9] Shellable
[10] Shelling order
[11] Euler-Poincaré
[12] Polytope
[13] Schläfli
[14] Bruggesser
[15] Mani
[16] McMullen

بالا[۱۷]» برای چندوجهی‌ها می‌باشد. در هر حال، پوسته‌پذیری مجتمع مرزی[۱۸] یک چندوجهی منجر به این می‌شود که یکی از روشن‌ترین اثبات‌های استقرایی را برای فرمول اویلر-پوانکاره بیان کنیم (مراجعه شود به فصل ۷ از مرجع [۸]).

از نقطه‌نظر جبری این نکته قابل توجه است که حلقه استنلی-رایزنر مجتمع‌های سادکی محض و پوسته‌پذیر، کوهِن-مَک‌اُوْلی[۱۹] است و در نتیجه با توجه به مفهوم دوگان الکساندر[۲۰]، دوگان ایدآل استنلی-رایزنر چنین مجتمع‌هایی، دارای خارج قسمت‌های خطی[۲۱] (و در نتیجه تحلیل خطی[۲۲]) هستند. برای درک اهمیت مفهوم پوسته‌پذیری در جبر جابجایی، به کتاب برجسته استنلی بسنده می‌کنیم. در کتاب استنلی [۱۴] بیان شده است «پوسته‌پذیری یک ابزار ساده اما قدرتمند برای اثبات خاصیت کوهن-مک‌اولی است و تقریبا همه مجتمع‌های سادکی کوهن-مک‌اولی که به طور معمول در جبرجابجایی ظاهر می‌شوند در حقیقت پوسته‌پذیر هستند. به‌علاوه برخی از ناورداهای جبری متناظر با مجتمع‌های سادکی کوهن-مک‌اولی در حالت پوسته‌پذیر بودن راحت‌تر محاسبه می‌شوند یا این‌که به‌طور روشن‌تری شرح داده می‌شوند.»

از نقطه‌نظر هندسی، مجتمع‌های سادکی پوسته‌پذیر در واقع از خوشه‌ای[۲۳] از کره‌ها تشکیل شده‌اند [۲]. یعنی اگر Δ یک مجتمع سادکی پوسته‌پذیر باشد، آن‌گاه Δ به‌طور هموتوپی هم‌ارز با ضرب وجی[۲۴] (گوه‌ای) تعدادی کره است. به‌طور دقیق‌تر داریم:

$$\Delta \cong \bigwedge_{F_j} \mathbb{S}^{\dim F_j} .$$

با توجه به اهمیت مجتمع‌های سادکی پوسته‌پذیر که در بالا ذکر شد، در این مقاله دو خانواده نامتناهی و نسبتا بزرگ از مجتمع‌های سادکی معرفی می‌کنیم که در ویژگی پوسته‌پذیری صدق می‌کنند. شیوه ساخت این مجتمع‌های سادکی به این صورت است که با یک مجتمع سادکی دلخواه شروع کرده و با اضافه کردن راس‌های جدید و وجه‌های مناسب به مجتمع سادکی جدیدی می‌رسیم که مجتمع اولیه را به طور القایی در بر دارد و علاوه بر آن پوسته‌پذیر نیز می‌باشد. چنین مجتمع‌های سادکی در کنار کاربردهای متنوعی که دارند، نشان می‌دهند ساختار مجتمع‌های سادکی پوسته‌پذیر و در حالت کلی‌تر کوهن-مک‌اولی می‌تواند بسیار پیچیده باشد به این معنا که خانواده مجتمع‌های سادکی پوسته‌پذیر یا کوهن-مک‌اولی می‌توانند در حالت کلی هر مجتمع سادکی دلخواهی را به عنوان زیرمجتمع سادکی القایی داشته باشند. این مسأله در حالت خاصی که مجتمع سادکی اولیه مجتمع استقلال[۲۵] یک گراف باشد و مجتمع استقلال گراف بزرگ‌تر

[17] Upper bound theorem
[18] Boundary complex
[19] Cohen-Macaulay
[20] Alexander dual
[21] Linear quotient
[22] Linear resolution
[23] Bouquets
[24] Wedge product
[25] Independence complex

جدید در خاصیت‌های ترکیبیاتی یا توپولوژیکی مانند پوسته‌پذیری، کوهن-مک‌اولی بودن یا شرایط جبری دیگر صدق کند در مقالات متعددی از جمله مراجع [۱، ۴، ۵، ۷، ۱۱، ۱۲، ۱۳] مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

۲. تولید مجتمع‌های سادکی پوسته‌پذیر

در این بخش، دو روش متفاوت برای گسترش یک مجتمع سادکی داده شده مانند Δ به یک مجتمع سادکی بزرگ‌تر مانند Δ' ارایه می‌کنیم به‌طوری که Δ' پوسته‌پذیر بوده و Δ را به‌عنوان زیرمجتمع القایی[۲۶] در بر داشته باشد. در روش اول مجتمع سادکی Δ مجتمع استقلال یک کلاتر d-یکنواخت[۲۷] دلخواه مانند $\mathcal{C}$ است و مجتمع سادکی Δ' که به کمک یک افراز خوشه‌ای[۲۸] از $\mathcal{C}$ تعریف می‌شود، خود مجتمع استقلال یک کلاتر d-یکنواخت خواهد بود (قضیه ۱). در روش دوم Δ مجتمع استقلال یک کلاتر[۲۹] دلخواه مانند $\mathcal{C}$ بوده و لذا Δ می‌تواند هر مجتمع سادکی دلخواهی باشد اما در تعریف Δ' به جای یک افراز خوشه‌ای دلخواه از $\mathcal{C}$، افرازی که در آن هر راس $\mathcal{C}$ نقش یک خوشه را بازی می‌کند در نظر گرفته می‌شود (قضیه ۲). گزاره ۳ نشان می‌دهد که دو روش ذکر شده تنها در حالت‌های خیلی خاص بر هم منطبق هستند.

منظور از یک کلاتر $\mathcal{C}$ روی مجموعه رئوس $V=V(\mathcal{C})$، خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های V است که اولاً $\cup\mathcal{C}=V$ و ثانیاً به ازای هر $e_1,e_2\in\mathcal{C}$ داشته باشیم $e_1\nsubseteq e_2$. هر عنصر $e\in\mathcal{C}$ را یک مدار[۳۰] می‌گوییم و کلاتر $\mathcal{C}$ را d-یکنواخت می‌گوییم هرگاه هر مدار آن d راس داشته باشد. اگر $\mathcal{C}$ یک کلاتر باشد ایدآل مداری[۳۱] $\mathcal{C}$ را با $I(\mathcal{C})$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I(\mathcal{C})=(\mathbf{x}_e:\quad e\in\mathcal{C})\,.$$

زیر مجموعه $\mathcal{I}\subseteq V$ را یک مجموعه مستقل[۳۲] در $\mathcal{C}$ گوییم هرگاه به‌ازای هر $e\in\mathcal{C}$ داشته باشیم $e\nsubseteq\mathcal{I}$. خانواده همه مجموعه‌های مستقل در $\mathcal{C}$ یک مجتمع سادکی است که آن را مجتمع استقلال $\mathcal{C}$ می‌نامیم و با $\Delta_{\mathcal{C}}$ نمایش می‌دهیم. به‌سادگی دیده می‌شود که $I_{\Delta_{\mathcal{C}}}=I(\mathcal{C})$. درنتیجه، هر مجتمع سادکی در واقع مجتمع استقلال یک کلاتر است.

---
[26] Induced subcomplex
[27] d-uniform clutter
[28] Clique partition
[29] Clutter
[30] Circuit
[31] Circuit ideal
[32] Independent set

در تعریف کلاتر پیوندی، مفهوم خوشه[۳۳] نقشی کلیدی دارد. خوشه‌ها در یک کلاتر یکنواخت تعریف می‌شوند. فرض کنید $\mathcal{C}$ یک کلاتر d-یکنواخت روی مجموعه رئوس V باشد. یک زیرمجموعه $F \subseteq V$ را یک خوشه در $\mathcal{C}$ می‌گوییم اگر $|F|<d$ یا این‌که به‌ازای هر زیرمجموعه d-تایی e از F، داشته باشیم $e \in \mathcal{C}$.

تعریف (کلاتر پیوندی). فرض کنید $\mathcal{C}$ یک کلاتر d-یکنواخت روی مجموعه رئوس V باشد و $A_1,\ldots,A_\theta$ یک افراز از مجموعه V باشد که در آن هر A_i یک خوشه (نه لزوما ناتهی) در $\mathcal{C}$ است. به‌ازای هر $i=1,\ldots,\theta$، فرض کنیم B_i یک مجموعه متناهی ناتهی باشد که $B_i \cap V=\varnothing$ و به ازای هر $i \neq j$، $B_i \cap B_j=\varnothing$. کلاتر d-یکنواخت $\mathcal{C}_{A_1,\ldots,A_\theta}^{B_1,\ldots,B_\theta}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{C}_{A_1,\ldots,A_\theta}^{B_1,\ldots,B_\theta}=\mathcal{C} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\theta} \{e \subseteq A_i \cup B_i : \ |e|=d\} \right)$$

کلاتر $\mathcal{C}_{A_1,\ldots,A_\theta}^{B_1,\ldots,B_\theta}$ را کلاتر پیوندی $\mathcal{C}$ نسبت به افراز $A_1,\ldots,A_\theta$ از رئوس و مجموعه‌های $B_1,\ldots,B_\theta$ می‌نامیم.

قضیهٔ ۱. فرض کنید $\mathcal{C}$ یک کلاتر d-یکنواخت روی مجموعه رئوس $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$ باشد و $\mathcal{C}'=\mathcal{C}_{A_1,\ldots,A_\theta}^{B_1,\ldots,B_\theta}$ کلاتر پیوندی $\mathcal{C}$ نسبت به افراز $A_1,\ldots,A_\theta$ از رئوس و مجموعه‌های $B_1,\ldots,B_\theta$ باشد که در آن به‌ازای هر $i=1,\ldots,\theta$ داشته باشیم $|B_i| \geq d-1$. فرض کنیم $\Delta'=\Delta_{\mathcal{C}'}$ مجتمع استقلال $\mathcal{C}'$ باشد. در این‌صورت

۱) Δ' یک مجتمع سادکی محض و پوسته‌پذیر از بعد $(d-1)\theta-1$ است؛

۲) حلقه $\mathbb{K}[\Delta']$ کوهن-مک‌اولی از بعد $(d-1)\theta$ است.

برهان. فرض کنیم $\Delta=\Delta_{\mathcal{C}}$ مجتمع استقلال $\mathcal{C}$ باشد. به ازای هر $F \in \Delta$ یک بلوک از وجه‌واره‌های Δ' را به شرح زیر می‌سازیم:

به‌ازای $F \in \Delta$، فرض کنیم $a_i^F=|F \cap A_i|$. در این‌صورت $0 \leq a_i^F \leq d-1$، زیرا F یک مجموعه مستقل در $\mathcal{C}$ است. به ازای $i=1,\ldots,\theta$، فرض کنیم $G_{i,1}^F,\ldots,G_{i,k_i^F}^F$ زیرمجموعه‌های B_i باشند که $a_i^F+|G_{i,j}^F|=d-1$. چون $|B_i| \geq d-1$، می‌توان $G_{i,j}^F$ را با این خاصیت انتخاب کرد. در حقیقت داریم $\langle G_{i,1}^F,\ldots,G_{i,k_i^F}^F \rangle=\langle B_i \rangle^{(d-2-a_i^F)}$. اکنون بلوکی از مجموعه‌های متناظر با F را در نظر می‌گیریم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_{j_1,\ldots,j_\theta}^F=F \cup G_{1,j_1}^F \cup \cdots \cup G_{\theta,j_\theta}$$

که در آن به ازای هر $p=1,\ldots,\theta$ ، داریم $j_p \in \{1,\ldots,k_p^F\}$. توجه کنید که به ازای هر $i=1,\ldots,\theta$ داریم $|G_{i,j_i}^F|=d-1-a_i^F$. بنابراین

[۳۳] Clique

$$
\begin{aligned}
|H^F_{j_1,\dots,j_\theta}| &= |F| + \sum_{i=1}^{\theta}\left(d-1-a_i^F\right) \\
&= |F| + \theta(d-1) - \sum_{i=1}^{\theta} a_i^F \\
&= (d-1)\theta.
\end{aligned}
$$

ادعا می‌کنیم هر وجه‌واره از Δ' به شکل $H^F_{j_1,\dots,j_\theta}$ است که در آن $F \in \Delta$.

اثبات ادعا. ابتدا توجه کنید که بنابر تعریف هر یک از مجموعه‌های $H^F_{j_1,\dots,j_\theta}$ یک مجموعه مستقل بیشین در $\mathcal{C}'$ است، یعنی $H^F_{j_1,\dots,j_\theta} \in \mathcal{F}(\Delta')$. در ادامه نشان می‌دهیم به‌ازای هر عنصر $G \in \Delta'$، عنصر $F \in \Delta$ و اندیس‌های $j_1,\dots,j_\theta$ موجود هستند که $G \subseteq H^F_{j_1,\dots,j_\theta}$. فرض کنیم $G \in \Delta'$ داده شده باشد. تعریف می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&F := G \cap V, \\
&a_i := F \cap A_i, \quad i = 1,\dots,\theta, \\
&G_i := G \cap B_i, \quad i = 1,\dots,\theta.
\end{aligned}
$$

چون G یک مجموعه مستقل در $\mathcal{C}'$ است، پس F یک مجموعه مستقل در $\mathcal{C}$ است و به ازای هر $i = 1,\dots,\theta$، داریم $|G_i| \le d-1-a_i$. لذا $j_i \in \{1,\dots,k_i^F\}$ موجود است که $G_i \subseteq G^F_{i,j_i}$. بنابراین داریم

$$
G = F \cup G_1 \cup \dots \cup G_r \subseteq F \cup G^F_{1,j_{p_1}} \cup \dots \cup G^F_{r,j_{p_r}} = H^F_{j_{p_1},\dots,j_{p_r}}.
$$

با توجه به آن‌چه تاکنون بیان کرده‌ایم مجتمع سادکی Δ' یک مجتمع سادکی محض از بعد $(d-1)\theta-1$ است.

به‌ازای هر $i = 1,\dots,\theta$، فرض کنیم $B_i = \{y_{i,1},\dots,y_{i,s_i}\}$. ترتیب زیر را روی $y_{i,j}$ ها در نظر می‌گیریم:

$$
y_{1,1} > y_{1,2} > \dots > y_{1,s_1} > y_{2,1} > \dots > y_{2,s_2} > \dots > y_{\theta,1} > \dots > y_{\theta,s_r}. \tag{۱}
$$

اکنون برای اثبات این‌که Δ' پوسته‌پذیر است، ترتیب زیر را روی وجه‌واره‌های Δ' اعمال می‌کنیم:

ابتدا وجه‌های Δ را بر حسب بعد آنها مرتب می‌کنیم. برای وجه‌هایی از Δ که دارای بعد یکسان هستند، آنها را بر حسب ترتیب $v_1 > \dots > v_n$ مرتب می‌کنیم. حال متناظر با هر وجه $F \in \Delta$، بلوک متناظر با F را مطابق با ترتیب داده شده در رابطه (۱) مرتب می‌کنیم.

نشان می‌دهیم مطابق با ترتیب بالا، مجتمع سادکی Δ' پوسته‌پذیر است. فرض کنیم $H^F_{j_1,\dots,j_r} < H^{F'}_{j'_1,\dots,j'_r}$. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $F = F'$. در این حالت قرار می‌دهیم $j_\rho = \min\{j_p : j_p \ne j'_p\}$ و

$$
\begin{aligned}
y_{\rho,\theta} &= \min\{y_{\rho,j} \in G^F_{\rho,j'_\rho} : \quad y_{\rho,j} \notin G^F_{\rho,j_\rho}\}, \\
y_{\rho,\theta'} &= \min\{y_{\rho,j} \in G^F_{\rho,j_\rho} : \quad y_{\rho,j} \notin G^F_{\rho,j'_\rho}\}.
\end{aligned}
$$

توجه داریم که چون $H^F_{j_1,\dots,j_r}$ و $H^F_{j'_1,\dots,j'_r}$ وجه‌واره‌های Δ' هستند پس تعداد عناصر G^F_{ρ,j_ρ} و G^F_{ρ,j'_ρ} برابر هستند. بنابراین عناصر $y_{\rho,\theta}$ و $y_{\rho,\theta'}$ تعریف شده به‌صورت فوق موجودند و به‌علاوه داریم $y_{\rho,\theta} < y_{\rho,\theta'}$. در نتیجه $y_{\rho,\theta} \in H^F_{j'_1,\dots,j'_r} \setminus H^F_{j_1,\dots,j_r}$. فرض کنیم $H = \left(H^F_{j'_1,\dots,j'_r} \setminus \{y_{\rho,\theta}\}\right) \cup \{y_{\rho,\theta'}\}$. در این‌صورت به‌وضوح H یک وجه‌واره از Δ' است و شیوه ترتیب ما ایجاب می‌کند که $H < H^F_{j'_1,\dots,j'_r}$. از طرف دیگر داریم $H^F_{j'_1,\dots,j'_r} \setminus H = \{y_{\rho,\theta}\}$.

حالت دوم: $F < F'$. عنصر $x \in F' \setminus F$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که $x \in H^{F'}_{j'_1,\dots,j'_r} \setminus H^F_{j_1,\dots,j_r}$. به علاوه $i \in \{1,\dots,\theta\}$ موجود است که $x \in F \cap A_i$. در این‌صورت عنصر $y \in B_i \setminus G_{i,j'_i}$ را در نظر بگیرید. قرار می‌دهیم

$$H = \left(F' \setminus \{x\}\right) \cup G_{1,j'_1} \cup \cdots \cup G_{i,j'_i} \cup \{y\} \cup \cdots \cup G_{r,j'_r}.$$

واضح است که H یک وجه‌واره از Δ' است و شیوه ترتیب ما ایجاب می‌کند که $H < H^{F'}_{j'_1,\dots,j'_r}$. به علاوه داریم

$$H^F_{j'_1,\dots,j'_r} \setminus H = \{x\}.$$

با توجه به آن‌چه تاکنون ثابت کرده‌ایم Δ' یک مجتمع سادکی محض و پوسته‌پذیر است. قسمت دوم گزاره از این واقعیت نتیجه می‌شود که هر مجتمع سادکی محض و پوسته‌پذیر، کوهن-مک‌اولی است [۳، قضیه ۵,۱,۱۳].

■

قضیهٔ بالا در حالت‌های خاص برخی از نتایج ویلاریال[34] [۱۵ و ۱۶]، هیبی[35] و دیگران [۱۰]، کوک[36] و نِیگِل[37] [۴] را پوشش می‌دهد که در مثال زیر به آنها اشاره می‌کنیم.

مثال ۱.

۱. فرض کنیم $G=(V,E)$ یک گراف باشد که در آن $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ و G' گرافی باشد که با استفاده از G به صورت زیر به دست آمده باشد:

$$\begin{aligned} V(G') &= V \cup \{w_1,\dots,w_n\},\\ E(G') &= E \cup \{v_i w_i :\quad i=1,\dots,n\}. \end{aligned}$$

ویلاریال [۱۵، گزاره ۲,۲] نشان می‌دهد که حلقه $\mathbb{K}[\Delta_{G'}]$ کوهن-مک‌اولی است. سپس ویلاریال در [۱۶، گزاره ۵,۴,۱۰] نشان می‌دهد که در واقع $\Delta_{G'}$ پوسته‌پذیر است. واضح است که این دو نتیجه از ویلاریال حالت خاصی از قضیهٔ ۱ است.

۲. فرض کنیم $G=(V,E)$ یک گراف باشد. هیبی و دیگران [۱۰، قضیه ۱,۱] با تعمیمی از نتیجهٔ ویلاریال، نشان می‌دهند که مجتمع استقلال گراف G' که با استفاده از گراف G و چسباندن یک گراف کامل به هر راس از G

34 Villarreal
35 Hibi
36 Cook II
37 Nagel

به دست می‌آید محض و تجزیه‌پذیر راسی[۳۸] است. بنابراین $\Delta_{G'}$ محض و پوسته‌پذیر و در نتیجه کوهن-مک‌اولی است [۳، قضیه ۵٫۱٫۱۳]. نتیجه اخیر نیز حالت خاصی از قضیهٔ ۱ است.

۳. فرض کنیم $G=(V,E)$ یک گراف باشد و $V=W_1\cup\cdots\cup W_r$ یک افراز خوشه‌ای از راس‌های G باشد یعنی هر W_i یک خوشه در G است. فرض کنیم G^π گرافی باشد که با استفاده از گراف G به صورت زیر به دست آمده باشد:

$$V(G^\pi)=V\cup\{y_1,\ldots,y_r\},$$
$$E(G^\pi)=E\cup\left(\bigcup_{i=1}^{r}\{y_iw_j:\quad w_j\in W_i\}\right).$$

کوک و نیگل در [۴، قضیه ۳٫۳ و نتیجه ۳٫۵] نشان می‌دهند که مجتمع استقلال گراف G^π محض و تجزیه‌پذیر رأسی است. بنابراین Δ_{G^π} محض و پوسته‌پذیر و در نتیجه کوهن-مک‌اولی است [۳، قضیه ۵٫۱٫۱۳]. نتیجهٔ اخیر نیز حالت خاصی از قضیهٔ ۱ است. در واقع قضیهٔ ۱ بیانی از قضیه کوک و نیگل برای ابرگراف‌ها است.

در حالتی که W_i ها در این مثال لزوما خوشه نباشند، ایدآل یالی[۳۹] گراف G' در [۱۱، گزارهٔ ۲] مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شده است که $\mathrm{ara}(I)=\mathrm{bight}(I)$، که در آن $I=I(G')$ ایدآل یالی G' است، $\mathrm{ara}(I)$ رتبه حسابی[۴۰] I و $\mathrm{bight}(I)$ بیشینه ارتفاع‌های ایدآل‌های اول وابسته I است.

قضیهٔ ۲. فرض کنید $\mathcal{C}$ یک کلاتر با مجموعه رئوس $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$ باشد. به‌ازای هر $i=1,\ldots,n$، m_i مجموعهٔ ناتهی و متناهی $B_{i,1},\ldots,B_{i,m_i}$ را در نظر بگیرید به طوری که V و $B_{i,j}$ ها دوبه‌دو جدا از هم هستند. فرض کنید $\mathcal{C}'=\mathcal{C}_{\{B_{i,j}\}_{1\le i\le n',1\le j\le m_i}}$ کلاتری باشد که با استفاده از کلاتر $\mathcal{C}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathcal{C}'=\mathcal{C}\bigcup\left(\bigcup_{i=1}^{n}\Big\{B_{i,1}\cup\{v_i\},\ldots,B_{i,m_i}\cup\{v_i\}\Big\}\right).$$

اگر $\Delta'=\Delta_{\mathcal{C}'}$ آن‌گاه

۱) مجتمع سادکی Δ' پوسته‌پذیر از بعد $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}|B_{i,j}|-1$ است؛

۲) حلقه $\mathbb{K}[\Delta']$ کوهن-مک‌اولی است اگر و تنها اگر به ازای هر $i=1,\ldots,n$، داشته باشیم $m_i=1$.

---
[38] Vertex-decomposable
[39] Edge ideal
[40] Arithmetic rank

برهان. برای بیان اثبات این قضیه، از برهانی کم و بیش مشابه با برهان قضیۀ ۱ پیروی می‌کنیم. فرض کنیم $\Delta = \Delta_{\mathcal{C}}$ مجتمع استقلال $\mathcal{C}$ باشد. به ازای هر $F \in \Delta$ یک بلوک از وجه‌واره‌های Δ' را به شرح زیر می‌سازیم:

در ابتدا فرض کنیم به ازای $i=1,\ldots,n$ و $j=1,\ldots,m_i$ مجموعه $B_{i,j}$ به صورت $B_{i,j}=\{y_{i,j}^{(1)},\ldots,y_{i,j}^{(t_{i,j})}\}$ داده شده باشد. سپس به ازای $F \in \Delta$ قرار می‌دهیم

$$\{G_{i,1}^F,\ldots,G_{i,k_i^F}^F\}=\begin{cases}\{\bigcup_{j=1}^{m_i} B_{i,j}\}, & x_i \notin F,\\ \{\bigcup_{j=1}^{m_i}\left(B_{i,j}\setminus\{y_{i,j}^{(\theta_j)}\}\right):\ 1\le\theta_j\le t_{i,j}\}, & x_i \in F.\end{cases}$$

درنهایت بلوکی از مجموعه‌های متناظر با F را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H_{j_1,\ldots,j_n}^F := F\cup G_{1,j_1}^F\cup\cdots\cup G_{n,j_n}^F$$

که در آن به ازای هر $i=1,\ldots,n$ داریم $j_i\in\{1,\ldots,k_i^F\}$. ادعا می‌کنیم هر وجه‌واره از Δ' به شکل $H_{j_1,\ldots,j_n}^F$ است که در آن $F\in\Delta$.

اثبات ادعا. ابتدا توجه کنید که بنابر تعریف هر یک از مجموعه‌های $H_{j_1,\ldots,j_n}^F$ یک مجموعه مستقل بیشین در $\mathcal{C}'$ است، یعنی $H_{j_1,\ldots,j_n}^F\in\mathcal{F}(\Delta')$. در ادامه نشان می‌دهیم به ازای هر عنصر $G\in\Delta'$، عنصر $F\in\Delta$ و اندیس‌های $j_1,\ldots,j_n$ موجود هستند که $G\subseteq H_{j_1,\ldots,j_n}^F$. فرض کنیم $G\in\Delta'$ داده شده باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} F &:= G\cap\{v_1,\ldots,v_n\},\\ G_{i,j} &:= G\cap B_{i,j}, && i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m_i,\\ G_i &:= \bigcup_{j=1}^{m_i} G_{i,j}, && i=1,\ldots,n.\end{aligned}$$

در این‌صورت $G_{i,j}\subseteq B_{i,j}$ و چون G یک مجموعه مستقل در $\mathcal{C}'$ است، نتیجه می‌شود که F یک مجموعه مستقل در $\mathcal{C}$ است یعنی $F\in\Delta$. به علاوه اگر $1\le i\le n$ به‌گونه‌ای باشد که $x_i\in F$، آن‌گاه به ازای هر $j=1,\ldots,m_i$ داریم $G_{i,j}\neq B_{i,j}$. بنابراین شیوه ساخت ما از $G_{i,j}^F$ها ایجاب می‌کند که به‌ازای هر $i=1,\ldots,n$، عنصر $j_i\in\{1,\ldots,k_i^F\}$ موجود است به طوری که $G_i\subseteq G_{i,j_i}^F$. در نتیجه داریم:

$$G=F\cup G_1\cup\cdots\cup G_n\subseteq F\cup G_{1,j_1}^F\cup\cdots\cup G_{n,j_n}^F=H_{j_1,\ldots,j_n}^F.$$

ترتیب زیر را روی $y_{i,j}^{(k)}$ ها در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} &y_{1,1}^{(1)}>y_{1,1}^{(2)}>\cdots>y_{1,1}^{(t_{1,1})}>y_{1,2}^{(1)}>\cdots>y_{1,2}^{(t_{1,2})}>\cdots>y_{1,m_1}^{(1)}>\cdots>y_{1,m_1}^{(t_{1,m_1})}>\cdots\\ &y_{n,1}^{(1)}>y_{n,1}^{(2)}>\cdots>y_{n,1}^{(t_{n,1})}>y_{n,2}^{(1)}>\cdots>y_{n,2}^{(t_{n,2})}>\cdots>y_{n,m_n}^{(1)}>\cdots>y_{n,m_n}^{(t_{n,m_n})}.\end{aligned} \quad (۲)$$

برای اثبات این‌که Δ' پوسته‌پذیر است، ترتیب زیر را روی وجه‌واره‌های Δ' در نظر می‌گیریم:

ابتدا وجه‌های Δ را بر حسب بعد آنها مرتب می‌کنیم. برای وجه‌هایی از Δ که دارای بعد یکسان هستند، آنها را بر حسب ترتیب $v_1 > \cdots > v_n$ مرتب می‌کنیم. حال متناظر با هر وجه $F \in \Delta$، بلوک متناظر با F را مطابق با ترتیب داده شده در رابطه (۲) مرتب می‌کنیم.

نشان می‌دهیم مطابق با ترتیب بالا، مجتمع سادکی Δ' پوسته‌پذیر است. فرض کنیم $H^F_{j_1,\ldots,j_n} < H^{F'}_{j'_1,\ldots,j'_n}$. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $F = F'$. در این حالت قرار می‌دهیم $j_\rho = \min\{j_p : j_p \neq j'_p\}$ و

$$y^{(\theta')}_{\rho,j'_\rho} = \min\{y^{(c)}_{\rho,j'_\rho} \in G^F_{\rho,j'_\rho} : \quad y^{(c)}_{\rho,j'_\rho} \notin G^F_{\rho,j_\rho}\},$$
$$y^{(\theta)}_{\rho,j_\rho} = \min\{y^{(c)}_{\rho,j_\rho} \in G^F_{\rho,j_\rho} : \quad y^{(c)}_{\rho,j_\rho} \notin G^F_{\rho,j'_\rho}\}.$$

توجه داریم که با توجه به ساختار $H^F_{j_1,\ldots,j_n}$ و $H^F_{j'_1,\ldots,j'_n}$، هر دو مجموعه G^F_{ρ,j_ρ} و G^F_{ρ,j'_ρ} دارای تعداد عناصر یکسان هستند. بنابراین دو عنصر $y^{(\theta)}_{\rho,j_\rho}$ و $y^{(\theta')}_{\rho,j'_\rho}$ تعریف شده به‌صورت فوق موجود هستند و به‌علاوه داریم $y^{(\theta')}_{\rho,j'_\rho} < y^{(\theta)}_{\rho,j_\rho}$ و همچنین $y^{(\theta')}_{\rho,j'_\rho} \in H^F_{j'_1,\ldots,j'_n} \setminus H^F_{j_1,\ldots,j_n}$. فرض کنیم $H = \left(H^F_{j'_1,\ldots,j'_n} \setminus \{y^{(\theta)}_{\rho,j'_\rho}\}\right) \cup \{y^{(\theta)}_{\rho,j_\rho}\}$. در این‌صورت به وضوح H یک وجه‌واره از Δ' است و شیوهٔ ترتیب ما ایجاب می‌کند که $H < H^F_{j'_1,\ldots,j'_n}$. از طرفی داریم $H^F_{j'_1,\ldots,j'_n} \setminus H = \{y^{(\theta')}_{\rho,j'_\rho}\}$.

حالت دوم: $F < F'$. در این حالت عنصر $v_i \in F' \setminus F$ را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت واضح است که $v_i \in H^{F'}_{j'_1,\ldots,j'_n} \setminus H^F_{j_1,\ldots,j_n}$. شیوه ساخت ما از $H^{F'}_{j'_1,\ldots,j'_n}$ ایجاب می‌کند که $G_{i,j'_i} = \bigcup_{j=1}^{m_i}\left(B_{i,j} \setminus \{y^{(\theta_j)}_{i,j}\}\right)$ که در آن $1 \le \theta_j \le t_{i,j}$. فرض کنیم

$$\begin{aligned} H &= \left(F' \setminus \{v_i\}\right) \cup G_{1,j'_1} \cup \cdots \cup G_{i,j'_i} \cup \{y^{(\theta_1)}_{i,1},\ldots,y^{(\theta_{m_i})}_{i,m_i}\} \cup \cdots \cup G_{n,j'_n} \\ &= \left(F' \setminus \{v_i\}\right) \cup G_{1,j'_1} \cup \cdots \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m_i} B_{i,j}\right) \cup \cdots \cup G_{n,j'_n}. \end{aligned}$$

واضح است که H یک وجه‌واره از Δ' است و شیوه ترتیب ما ایجاب می‌کند که $H < H^{F'}_{j'_1,\ldots,j'_r}$. به علاوه داریم

$$H^F_{j'_1,\ldots,j'_n} \setminus H = \{x_i\}.$$

با توجه به آن‌چه تاکنون ثابت کرده‌ایم Δ' یک مجتمع سادکی پوسته‌پذیر است.

به ازای هر وجه‌واره $H^F_{j_1,\ldots,j_n} \in \mathcal{F}(\Delta')$ داریم:

$$\begin{aligned} |H^F_{j_1,\ldots,j_n}| &= |F| + |G^F_{1,j_1}| + \cdots + |G^F_{n,j_n}| \\ &= |F| + \sum_{x_i \notin F} |\bigcup_{j=1}^{m_i} B_{i,j}| + \sum_{x_i \in F} (|\bigcup_{j=1}^{m_i} B_{i,j}| - m_i) \\ &\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} |B_{i,j}| = |H^{\varnothing}_{1,\ldots,1}|. \end{aligned}$$

رابطهٔ فوق نشان می‌دهد که $\dim \Delta' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}|B_{i,j}|-1$ و این‌که مجتمع سادکی Δ' محض است اگر و تنها اگر به ازای هر $i=1,\ldots,n$ داشته باشیم $m_i=1$.

برای اثبات قسمت ۲ از قضیه توجه کنید که اگر Δ' کوهن-مک‌اولی باشد، آن‌گاه طبق [۳، قضیهٔ ۵,۱,۵]، Δ' محض است و بنابراین با توجه به مطالب بالا به ازای هر $i=1,\ldots,n$ داریم $m_i=1$. به عکس، اگر به ازای هر $i=1,\ldots,n$ داشته باشیم $m_i=1$ آن‌گاه با توجه به آن‌چه ثابت کرده‌ایم Δ' یک مجتمع سادکی محض و پوسته‌پذیر است و بنابراین کوهن-مک‌اولی است [۳، قضیه ۵,۱,۱۳].

■

تبصره. ایدآل مداری کلاترها در مرجع [۶] با تعبیر ایدآل وجه‌واره‌ای[41] مجتمع‌های سادکی بیان شده است. از شیوه اثبات [۶، قضیه ۸,۲] نتیجه می‌شود که کلاترهای به شکل قضیهٔ ۲ که در آن به ازای هر $i=1,\ldots,n$ داشته باشیم $m_i=1$، کوهن-مک‌اولی هستند. بدیهی است که این موضوع بلافاصله از قضیهٔ ۲ نتیجه می‌شود. به‌علاوه در [۱۱، نتیجه ۱] کلاترهای به شکل قضیه ۲ مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شده است که برای ایدآل مداری $I=I(\mathcal{C})$ از این کلاترها، تساوی $\mathrm{ara}(I)=\mathrm{bight}(I)$ برقرار است.

مثال ۲. فرض کنید G' گرافی باشد که مطابق با قسمت اول مثال ۱ از یک گراف دلخواه G به‌دست آمده است. واضح است که قضیهٔ ۲ نتیجه می‌دهد که $\Delta_{G'}$ یک مجتمع سادکی محض و پوسته‌پذیر است.

همان‌گونه که مثال فوق نشان می‌دهد قضیه‌های ۱ و ۲ در حالت‌های خاصی منجر به نتیجه واحدی می‌شوند. درگزارهٔ زیر این موضوع را بررسی کرده و نشان می‌دهیم تحت چه شرایطی کلاترهای معرفی شده در قضیه‌های ۱ و ۲ دقیقاً بر هم منطبق می‌شوند.

یادآوری می‌کنیم که دو کلاتر $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ را یکریخت[42] گویند هرگاه نگاشت دوسویی $f:V(\mathcal{C})\to V(\mathcal{C}')$ موجود باشد به‌طوری که به ازای هر مجموعه $e\subseteq V(\mathcal{C})$ داشته باشیم $e\in\mathcal{C}$ اگر و تنها اگر $f(e)\in\mathcal{C}'$. در این حالت می‌نویسیم $\mathcal{C}\cong\mathcal{C}'$. همچنین دو راس u,v از یک کلاتر $\mathcal{C}$ را مجاور[43] گویند هرگاه مدار $e\in\mathcal{C}$ موجود باشد که $u,v\in e$. به ازای زیرمجموعه W از راس‌های کلاتر $\mathcal{C}$، زیرکلاتر القایی $\mathcal{C}[W]$ از $\mathcal{C}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{C}[W]=\{F\in\mathcal{C}:\quad F\subseteq W\}.$$

41 Facet ideal
42 Isomorphic
43 Adjacent

گزارهٔ ۳. فرض کنید $\mathcal{C}$ یک کلاتر d-یکنواخت با n راس و $\mathcal{C}'$ یک کلاتر دلخواه با n' راس باشد. فرض کنید $\mathcal{D}=\mathcal{C}_{A_1,\dots,A_\theta}^{B_1,\dots,B_\theta}$ یک کلاتر d-یکنواخت وابسته به $\mathcal{C}$ تعریف شده در قضیهٔ ۱ و $\mathcal{D}'=\mathcal{C}'_{\{B_{i,j}\}_{1\le i\le n',1\le j\le m_i}}$ یک کلاتر وابسته به $\mathcal{C}'$ تعریف شده در قضیه ۲ باشد. در این‌صورت $\mathcal{D}\cong\mathcal{D}'$ اگر و تنها اگر $\mathcal{C}\cong\mathcal{C}'$، $\theta=n$ و

۱) به‌ازای هر $i=1,\dots,n$، داشته باشیم $|A_i|=1$ و $|B_i|=d-1$؛

۲) به‌ازای هر $i=1,\dots,n'$، داشته باشیم $m_i=1$ و $|B_{i,1}|=d-1$.

برهان. فرض کنید $\mathcal{D}\cong\mathcal{D}'$. در این‌صورت $\mathcal{D}'$ و در نتیجه $\mathcal{C}'$ نیز کلاترهایی d-یکنواخت هستند. بنابراین به ازای هر $1\le i\le n'$ و $1\le j\le m_i$ داریم $|B_{i,j}|=d-1$. فرض کنید X و X' به ترتیب مجموعهٔ همهٔ راس‌هایی از $\mathcal{D}$ و $\mathcal{D}'$ باشند که تنها در یک مدار قرار دارند. بنا بر تعریف $X\subseteq B_1\cup\cdots\cup B_\theta$ و $X'=B_{1,1}\cup\cdots\cup B_{n,m_n}$. علاوه بر این راس $x\in B_i$ متعلق به X است اگر و تنها اگر $|A_i|=1$ و $|B_i|=d-1$. حال فرض کنید Y و Y' به ترتیب مجموعه همهٔ راس‌هایی از $V(\mathcal{D})\setminus X$ و $V(\mathcal{D}')\setminus X'$ باشند که با راسی از X و X' در $\mathcal{D}$ و $\mathcal{D}'$ مجاور باشند. به سادگی می‌توان دید $Y\subseteq A_1\cup\cdots\cup A_\theta$ و $Y'=V(\mathcal{C}')$. همچنین راس $y\in A_i$ متعلق به Y است اگر و تنها اگر $|A_i|=1$ و $|B_i|=d-1$. از یکریختی $\mathcal{D}$ و $\mathcal{D}'$ نتیجه می‌شود $X=B_1\cup\cdots\cup B_\theta$ و $Y=A_1\cup\cdots\cup A_\theta$. لذا $\theta=n$ و به‌ازای هر $i=1,\dots,n$، داریم $|A_i|=1$ و $|B_i|=d-1$. از طرف دیگر اگر $i\in\{1,\dots,n'\}$ به‌گونه‌ای باشد که $m_i>1$، آن‌گاه دو عنصر نامجاور $u\in B_{i,1}$ و $v\in B_{i,2}$ از X' با عنصر یکسانی از Y' در $\mathcal{D}'$ مجاورند در حالی که هیچ دو عنصر نامجاوری از X با عنصر یکسانی از Y در $\mathcal{D}$ مجاور نیستند. این موضوع نشان می‌دهد به ازای هر $i\in\{1,\dots,n'\}$ داریم $m_i=1$. لازم به ذکر است که $\mathcal{C}=\mathcal{D}[Y]$ و $\mathcal{C}'=\mathcal{D}'[Y']$. از آن‌جایی که Y و Y' تحت یکریختی بین $\mathcal{D}$ و $\mathcal{D}'$ در تناظر با هم هستند نتیجه می‌شود $\mathcal{C}\cong\mathcal{C}'$. عکس گزارهٔ واضح است.

■

References

1. J. Biermann, and A. Van Tuyl, “Balanced vertex decomposable simplicial complexes and their h-vectors”, Electron. J. Combin. 20(3) (2013), #R15.

2. A. Björner and M. Wachs, “Shellable nonpure complexes and posets. I”, Trans. Amer. Math. Soc. 348(4) (1996), 3945-3975.

3. W. Bruns and J. Herzog, “Cohen-Macaulay Rings”, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 39. Cambridge University Press, Cambridge, (1993).

4. D. Cook II and U. Nagel, “Cohen-Macaulay graphs and face vectors of flag complexes”, SIAM J. Discret. Math. 26(1) (2012), 89-101.

5. A. Dochtermann and A. Engström, “Algebraic properties of edge ideals via combinatorial topology”, Electron. J. Combin. 16(2) (2009), #R2.

6. S. Faridi, “Cohen-Macaulay properties of square-free monomial ideals”, J. Combin. Theory Ser. A 109(2) (2005), 299-329.

7. A. Francisco and A. Van Tuyl, “Sequentially Cohen-Macaulay edge ideals”, Proc. Amer. Math. Soc. 135(8) (2007), 2327-2337.

8. J. Gallier, “Notes on convex sets, polytopes, polyhedra, combinatorial topology, Voronoi diagrams and Delaunay triangulations”, arXiv: 0805.0292 (2008).

9. X. Goaoc, P. Paták, Z. Patáková, M. Tancer, and U. Wagner, “Shellability is NP-complete”, J. ACM 66(3) (2019), Art. 21, 18 pp.

10. T. Hibi, A. Higashitani, K. Kimura, and A. B. O'Keefe, “Algebraic study on Cameron-Walker graphs”, J. Algebra 422 (2015), 257-269.

11. A. Macchia, “The arithmetical rank of the edge ideals of graphs with whisker”, Beitr. Algebra Geom. 56 (2015), 147-158.

12. Mousivand, S. A. Seyed Fakhari, and S. Yassemi, “A new construction for Cohen-Macaulay graphs”, Comm. Algebra 43(2) (2015), 5104-5112.

13. M. R. Pournaki, S. A. Seyed Fakhari, and S. Yassemi, “New classes of set-theoretic complete intersection monomial ideals”, Comm. Algebra 43(9) (2015), 3920-3924.

14. R. P. Stanley, “Combinatorics and Commutative Algebra”, 2nd ed., Progr. Math. 41, Birkhäuser Boston, Boston, MA (1996).

15. R. H. Villarreal, “Cohen-Macaulay graphs”, Manus. Math. 66 (1990), 277-293.

16. R. H. Villarreal, “Monomial Algebras”, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 238, Marcel Dekker, Inc., New York, 2001.