Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

An Approach to Deriving Maximal Invariant Statistics

Mehdi Shams[1]

1. Department of Statistics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Kashan, Kashan, Iran.

E-mail: mehdishams@kashanu.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
5 July 2020
Received in revised form:
21 January 2021
Accepted:
31 January 2021
Published online:
31 December 2022

Keywords:
Maximal invariant statistic, equivariant estimator, stability subgroup, normal subgroup.

ABSTRACT

Introduction

Given that statistical decisions are made based on sample observations, statistics are used to summarize sample information, one of which is to use the invariance principles and to limit the rules of invariant decision. From a mathematical point of view, the term of invariance is used to denote the principle that a property remains unchanged under the group of transformations, which is the case in many statistical problems. In other branches of applied sciences, invariance is an accepted principle, that if a problem with a unique answer is under the invalid transformation group, then the answer must also remain invariant under that group. Therefore, the reason for the invariance study is that statistical decisions should not be affected by transformations in the data.

Material and methods

Invariance principles is one of the ways to summarize sample information and by these principles invariance or equivariance decision rules are used. At first, the methods for finding the maximal invariant function are introduced. As a new method, maximal invariant statistics are constructed using equivariant functions. Then, using several equivariant functions, the maximal invariant statistic is obtained. If the group acts uniquely transitively, the equivariant functions will be converted into estimators

that can be used in statistical branches. Finally, it is shown that in the case that the group action is not uniquely transitive, but a normal subgroup has this property, the maximal invariant statistic can also be calculated.

Conclusion

The invariance principles summarize sample information by restricting the rules of invariant or equivariant decision. In this paper, methods for obtaining maximum invariant statistics by equivariant functions were proposed. In the special case that the group is uniquely transitive and in most statistical examples this property is established, it was possible to extend equivariant functions to equivariant estimators.

How to cite: Shams, M. (2022). An Approach to Deriving Maximal Invariant Statistics. *Mathematical Researches*, 8 (4), 94-119.

Publisher: Kharazmi University

Mathematical Researches

Kharazmi University

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

رهیافتی برای تعیین آماره‌های ناوردای بیشین

مهدی شمس[۱] ✉

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه آمار، دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران. رایانامه: mehdishams@kashanu.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۵/۱۴
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۱۱/۰۲
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۱/۱۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰

واژه‌های کلیدی:
آماره ناوردای بیشین،
برآوردگر هم‌وردا،
زیرگروه پایداری،
زیرگروه نرمال.

اصول ناوردایی، یکی از راه‌های خلاصه کردن اطلاعات نمونه است و توسط این اصول از قواعد تصمیم ناوردا یا هم‌وردا بهره گرفته می‌شود. در این مقاله ابتدا روش‌های یافتن تابع ناوردای بیشین معرفی می‌شود. به عنوان یک روش جدید به کمک توابع هم‌وردا، آماره ناوردای بیشین ساخته می‌شود. سپس به کمک چند تابع هم‌وردا، آماره ناوردای بیشین به دست می‌آید. در حالتی که گروه به طور یکتا انتقالی عمل کند، توابع هم‌وردا به براوردگر تبدیل خواهند شد که در شاخه‌های آماری می‌توان از آن استفاده کرد. در پایان نشان داده می‌شود در حالتی که عمل گروه به طور یکتا انتقالی نیست ولی یک زیرگروه نرمال با این خاصیت دارد نیز می‌توان آماره ناوردای بیشین را محاسبه کرد.

استناد: شمس ، مهدی؛ (۱۴۰۱). رهیافتی برای تعیین آماره‌های ناوردای بیشین. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۴)، ۱۱۹-۹۴.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

با توجه به این که تصمیم‌های آماری بر اساس مشاهدات نمونه انجام می‌شوند، برای خلاصه کردن اطلاعات نمونه از آماره‌ها استفاده می‌شود که یکی از این راه‌ها استفاده از اصول ناوردایی[1] و ایجاد محدودیت روی قواعد تصمیم ناوردا یا هم‌ورداست. اصطلاح ناوردایی از دیدگاه ریاضی برای نشان دادن این اصل به‌کار می‌رود که خاصیت تحت گروه تبدیلات بدون تغییر (ناوردا) باقی بماند که در بسیاری از مسائل آماری این خاصیت برقرار است. در دیگر شاخه‌های علوم کاربردی، ناوردایی یک اصل پذیرفته شده است، بدین منظور که اگر یک مسأله با یک جواب یکتا تحت گروه تبدیلات ناوردا باشد، آن‌گاه جواب نیز باید تحت آن گروه ناوردا باقی بماند. بنا بر این علت مطالعه ناوردایی این است که تصمیم‌های آماری نباید تحت تاثیر تبدیلات روی داده‌ها قرار گیرند.

نظریهٔ برآوردگرهای هم‌وردای مکانی ومقیاسی برای اولین بار توسط پیتمن (۱۹۳۹) ارائه شد و می‌توان این گام را شروعی برای نظریهٔ ناوردایی دانست. پس از آن پیساکوف (۱۹۵۰)، هال و همکاران (۱۹۶۵)، کیفر (۱۹۵۷) و دیگران مطالب جدیدی در مورد این نظریه ارائه دادند. هال و همکاران (۱۹۶۵)، فراسر (۱۹۶۶) و باندروف-نیلسن و همکاران (۱۹۸۲) نسخه‌هایی از استقلال ناوردای بیشین و آماره بسنده هم‌وردا را ارائه دادند. همچنین در مقالاتی مانند وایزمن (۱۹۶۷، ۱۹۷۸، ۱۹۸۵، ۱۹۸۶، ۱۹۹۰)، بوندار (۱۹۷۶)، اندرسن (۱۹۸۲)، اسمال (۱۹۸۳)، ینسن (۱۹۸۴) و بهومیک (۲۰۰۷) می‌توان مطالب بیشتری راجع به ناوردای بیشین و توزیع آن را مشاهده کرد.

در بخش دوم بعد از بیان مفاهیم مقدماتی، روش‌های یافتن آماره ناوردا بیشین بیان شده و در انتها رابطه بین درایه‌های آماره‌های ناوردای بیشین در حالت کلی پیشنهاد می‌شود.

ایتون (۱۹۸۹) روشی برای ساختن آماره ناوردای بیشین بر حسب یک تابع هم‌وردا ارائه داد. در بخش سوم روشی برای یافتن آماره ناوردای بیشین توسط یک تابع (و سپس چند تابع) هم‌وردا ارائه خواهد شد و روش ایتون تعمیم داده می‌شود.

در حالتی که عمل گروه به طور یکتا انتقالی باشد، به‌راحتی تابع هم‌وردا به برآوردگر تبدیل می‌شود و به کمک آن ناوردای بیشین پیدا خواهد شد که در بخش چهارم مورد تحلیل قرار می‌گیرد. در ادامه در حالتی که گروه به طور یکتا انتقالی نیست ولی شامل یک زیرگروه نرمال با این خاصیت است نیز می‌توان این روش را به کار برد.

---

[1] Invariance principle

۲. روش‌های یافتن آماره ناوردای بیشین

در ابتدای این بخش چند تعریف مقدماتی یاداوری و در ادامه روش‌های موجود یافتن آماره ناوردای بیشین معرفی می‌شوند. در پایان این بخش تحت عنوان یک قضیه رابطه بین درایه‌های آماره‌های ناوردای بیشین در حالت یک گروه عمومی پیشنهاد می‌شود.

تعریف ۲-۱: گروه توپولوژیکی یک گروه مثل G به همراه یک توپولوژی روی مجموعه G است، به طوری که توابع $(g_1, g_2) \to g_1 g_2$ روی $G \times G$ به G و $g \to g^{-1}$ از G به G پیوسته باشند (فولند، ۱۹۹۵).

تعریف ۲-۲: گروه توپولوژیکی G روی فضای $\mathcal{X}$ (از سمت چپ) عمل می‌کند، هرگاه یک تابع $G \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ (که معمولاً تصویر (g, x) تحت این تابع را با gx نشان می‌دهند و زمانی که چند عمل موجود هست و یا ممکن است باعث ایجاد ابهام شود از نمادهای $g \bullet x$، $g \times x$ و ... استفاده می‌شود) وجود داشته باشد به‌قسمی که به ازای هر $x \in \mathcal{X}$ و هر $a, b \in G$، $(ab)x = a(bx)$ و $ex = x$ که در آن e عضو همانی گروه G است. در این حالت $\mathcal{X}$ را G-فضا می‌نامند (دیتمار و اچترهوف، ۲۰۰۹).

تعریف ۲-۳: اگر $\mathcal{X}$ یک G-فضا باشد، آنگاه $Gx = \{gx : g \in G\}$ را مدار G روی $x \in \mathcal{X}$ و $G_x = \{g : gx = x\}$ را پایدارساز G در x می‌نامند (این زیرگروه را زیرگروه پایداری، یکروندی یا ثابت‌ساز نیز می‌نامند) (رابینسون، ۱۹۹۵).

اگر $(G, *)$ و $(H, \circ)$ دو گروه باشند، تابع $f : G \to H$ را یک همریختی ازگروه G به گروه H نامند، هرگاه به ازای هر $a, b \in G$، $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$. برد f در H را یک تصویر همریخت از G (تحت f) می‌نامند. همریختی یک به یک و پوشا را یکریختی گویند (رابینسون، ۱۹۹۵).

تعریف ۲-۴: اگر $\mathcal{X}$ یک G-فضا باشد، عمل G روی $\mathcal{X}$ آزاد نامند، هرگاه برای هر $x \in \mathcal{X}$، $G_x = \{e\}$ و آن را انتقالی نامند، هرگاه برای یک (و بنا بر این برای تمام) $x \in \mathcal{X}$، $\mathcal{X} = Gx$. در حالت اخیر $\mathcal{X}$ یک فضای همگن برای G است (فولند، ۱۹۹۵) و برای هر $x, x' \in \mathcal{X}$ یک $g \in G$ وجود دارد به طوری که $x' = gx$. اگر این g یکتا باشد، G به طور یکتا انتقالی نامیده می‌شود (فلوچ ، ۲۰۰۷).

فرض کنید $(G, *)$ یک گروه باشد. زیرگروه $N \leq G$ را یک زیرگروه نرمال G گویند و می‌نویسند $N \trianglelefteq G$، هرگاه به ازای هر $a \in G$، $aN = Na$ (یا به طور معادل برای هر $a \in G$، $a^{-1}Na = N$) (نوسل، ۲۰۰۷).

اگر $\sigma(\mathcal{X})$ و $\sigma(\mathcal{Y})$ به ترتیب دو σ-جبر روی دو فضای $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ باشند، زوج‌های $(\mathcal{Y}, \sigma(\mathcal{Y}))$ و $(\mathcal{X}, \sigma(\mathcal{X}))$ فضای اندازه‌پذیر هستند و تابع $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ اندازه‌پذیر است، هرگاه برای هر $A \in \sigma(\mathcal{Y})$، $f^{-1}(A) \in \sigma(\mathcal{X})$.

تعریف ۲-۵: اگر $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو G-فضا باشند و تابع $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ اندازه‌پذیر باشد،

الف) f را G-هم‌وردا[۲]گویند، اگر برای هر $g\in G$ و $x\in\mathcal{X}$، $f(gx)=gf(x)$.

ب) f را G-ناوردا گویند، اگر برای هر $g\in G$ و $x\in\mathcal{X}$، $f(gx)=f(x)$.

ج) تابع G-ناوردای f را ناوردای بیشین[۳] گویند، هرگاه $f(x_1)=f(x_2)$ نتیجه دهد برای یک $g\in G$، $x_1=gx_2$.

د) f را G-تک‌وردا گویند، هرگاه برای هر $x\in\mathcal{X}$، $G_x=G_{f(x)}$ (لهمن و رومانو، ۲۰۰۵).

گزاره ۲-۱: اگر $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ یک تابع G-هم‌وردا بین G-فضاها باشد، در این صورت:

الف) برای هر $x\in\mathcal{X}$، $G_x\subseteq G_{f(x)}$.

ب) f تک‌ورداست اگر و تنها اگر f روی Gx یک به یک باشد (پالایس، ۱۹۹۶).

نکته ۲-۱: اگر G به طور آزاد روی $\mathcal{X}$ عمل کند، یک تناظر یک به یک بین G و Gx وجود دارد. به‌علاوه اگر G به طور انتقالی روی $\mathcal{X}$ عمل کند، در این صورت G روی $\mathcal{X}$ به طور یکتا انتقالی عمل خواهد کرد و در این حالت یک تناظر یک به یک بین G و $\mathcal{X}$ وجود دارد.

گزارهٔ زیر نشان می‌دهد که آماره ناوردای دلخواه را می‌توان به صورت تابعی از آماره ناوردای بیشین نوشت و عکس این مطلب نیز صحیح است.

گزاره ۲-۲: فرض کنید $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}_1$ ناوردای بیشین تحت عمل G روی $\mathcal{X}$ باشد. در این صورت تابع $h:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}_2$ ناورداست اگر و تنها اگر تابع $k:\mathcal{Y}_1\to\mathcal{Y}_2$ به‌قسمی وجود داشته باشد که $h(x)=k(f(x))$ (ایتون، ۱۹۸۹).

این نتیجه نشان می‌دهد وقتی که یک ناوردای بیشین معلوم باشد، تمام توابع ناوردا که توابعی از ناوردای بیشین هستند، مشخص خواهند شد.

در این قسمت روش‌های مختلف یافتن توابع ناوردای بیشین بیان می‌شود.

۲-۱ روش کاهشی

در این روش از هر مدار، نماینده آن انتخاب می‌شود که در این حالت مجموعه $\mathcal{X}$ با نماینده‌های آن (رده‌های هم‌ارزی) خلاصه می‌شود. سپس با کمک تعریف، تابع ناوردای بیشین پیدا می‌شود.

مثال ۲-۱: فرض کنید $G=O_n$ روی $\mathcal{X}=R^n-\{\mathbf{o}\}$ عمل کند که در آن O_n ماتریس‌های متعامد $n\times n$ است. برای $\mathbf{x}\in R^n$ می‌توان $g\in O_n$ را به‌گونه‌ای پیدا کرد که $g\mathbf{x}=\|\mathbf{x}\|\mathbf{x}_0$ که در آن $\|\mathbf{x}\|$ طول $\mathbf{x}$ و $\mathbf{x}_0=(1,0,\dots,0)^t$ (به عنوان مثال سطر اول ماتریس g را به صورت $\mathbf{x}^t/\|\mathbf{x}\|$ در نظر بگیرید). تابع $f(\mathbf{x})=\|\mathbf{x}\|\mathbf{x}_0$ ناوردای بیشین است،

---

[۲] Equivariant

[۳] Maximal invariant

زیرا $\mathbf{x}$ و $g\mathbf{x}$ طول یکسان دارند و همچنین اگر $f(\mathbf{x})=f(\mathbf{y})$ باشد، آن‌گاه $\|\mathbf{x}\|=\|\mathbf{y}\|$ و در این حالت $g_1,g_2\in G$ وجود دارند به طوری که

$$g_1\mathbf{x}=\|\mathbf{x}\|\mathbf{x}_0=\|\mathbf{y}\|\mathbf{x}_0=g_2\mathbf{y}$$

و در پی آن $g=g_2^{-1}g_1\in G$ وجود دارد به‌قسمی که $\mathbf{y}=g\mathbf{x}$.

۲-۲ استفاده از توابع هم‌وردا

در این روش به کمک توابع هم‌وردا، آماره ناوردای بیشین ساخته می‌شود.

قضیه ۲-۱: فرض کنید تابع $\tau:\mathcal{X}\to G$ هم‌وردا باشد، یعنی برای هر $g\in G$ و $x\in\mathcal{X}$، $\tau(gx)=g\tau(x)$. در این صورت تابع $f(x)=(\tau(x))^{-1}x$ ناوردای بیشین است (ایتون، ۱۹۸۹).

مثال ۲-۲: اگر $G=\mathbb{R}$ روی $\mathcal{X}=\mathbb{R}^n$ برای هر $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ و $g\in G$ به صورت $\mathbf{x}\to\mathbf{x}+g\mathbf{e}_n$ عمل کند که $\mathbf{e}_n\in\mathbb{R}^n$ بردار یک‌هاست، با انتخاب تابع هم‌وردای $\tau(\mathbf{x})=\bar{x}$ و با استفاده از قضیه ۲-۱، تابع $f(x)=(\tau(\mathbf{x}))^{-1}\mathbf{x}=\mathbf{x}-\bar{x}e_n$ ناوردای بیشین است (ایتون، ۱۹۸۹).

۳-۲ روش مدار به مدار

در این روش گروه G به زیرگروه‌های مناسبی تجزیه می‌شود که آن را تولید می‌کنند و با محدود کردن به این زیرگروه‌ها تابع ناوردای بیشین پیدا می‌شود. برای این منظور اگر $y=f(x)$ باشد، عمل گروه به صورت $gy=f(gx)$ تعریف می‌شود. این عمل زمانی خوش تعریف خواهد بود که $f(x_1)=f(x_2)$ نتیجه دهد برای هر $g\in G$، $f(gx_1)=f(gx_2)$.

قضیه ۲-۲: اگر $H,K\leq G$، یعنی H و K زیرگروه‌های G باشند و $G=HK$ و f_1 (f_2) تابع پوشای ناوردای بیشین تحت H (K) روی $\mathcal{X}$ (برد $\mathcal{X}$) باشد، آن‌گاه $f=f_2\circ f_1$ ناوردای بیشین تحت عمل G روی $\mathcal{X}$ است، به شرطی که $f_1(x_1)=f_1(x_2)$ نتیجه دهد برای هر $k\in K$، $f_1(kx_1)=f_1(kx_2)$ (ایتون، ۱۹۸۹).

مثال ۲-۳: فرض کنید $\mathcal{X}=\{\mathbf{x}:rank(Q\mathbf{x})=2\}$ که در آن $Q=I-n^{-1}\mathbf{e}_n\mathbf{e}_n^t$ و $n\geq 3$. گروه مناسب در این مثال گروه حاصل‌ضرب $G=G_1\times G_2$ است که در آن:

$$G_1=\{\gamma\in O_n:\gamma\mathbf{e}_n=\mathbf{e}_n\},$$
$$G_2=\{(a,\mathbf{b}):a=\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix},a_1,a_2>0,\mathbf{b}\in\mathbb{R}^2\}.$$

عمل G روی $\mathcal{X}$ به صورت

$$(\gamma,(a,\mathbf{b}))x=\gamma\mathbf{x}a^t+\mathbf{e}_n\mathbf{b}^t$$

تعریف می‌شود. با در نظر گرفتن دو زیرگروه مناسب

$$H=\{(\gamma,(\mathbf{e},\mathbf{b})):\gamma\in G_1,(\mathbf{e},\mathbf{b})\in G_2\},$$
$$K=\{(I,(a,\mathbf{o})):(a,\mathbf{o})\in G_2\}$$

هر عضو G را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب عناصر H و K نوشت یعنی:

$$(\gamma,(a,\mathbf{b}))=(\gamma,(\mathbf{e},\mathbf{b}))(I,(a,\mathbf{o})).$$

پس H و K گروه G را تولید می‌کنند. همچنین $f_1(\mathbf{x})=S(\mathbf{x})=\mathbf{x}^tQ\mathbf{x}$ و $f_2(s)=s_{12}\big/\sqrt{s_{11}s_{22}}$ به‌ترتیب توابع ناوردای بیشین تحت دو زیرگروه H و K هستند که در آن $S=(s_{ij})$. بنا بر این با توجه به قضیه ۲-۲،

$$f(\mathbf{x})=\frac{s_{12}(\mathbf{x})}{\sqrt{s_{11}(\mathbf{x})s_{22}(\mathbf{x})}}$$

ناوردای بیشین تحت عمل G روی $\mathcal{X}$ است.

۲-۴ عمل القایی روی فضای پارامتر

در این روش با استفاده از این که یک تناظر یک به یک بین اعضای گروه G و فضای پارامتر Θ وجود دارد، عمل G روی $\mathcal{X}$ یک عمل روی Θ القا می‌کند که عمل دوتایی آن $*$ است و $g_\theta\circ g_w=g_{\theta*w}$ ($\circ$ عمل دوتایی G است). اگر این گروه القایی روی Θ با $\bar{G}$ نمایش داده شود، برای هر $g_\theta\in G$ یک $\bar{g}_\theta\in\bar{G}$ وجود دارد که $\bar{g}_\theta(w)=\theta*w$.

قضیه ۲-۳: اگر S یک برآوردگر هم‌وردا باشد، یعنی برای هر $g_\theta\in G$ و $x\in\mathcal{X}$، $S(g_\theta(x))=\bar{g}_\theta(S(x))$، در این صورت $T(x)=g^{-1}_{S(x)}(x)$ ناوردای بیشین است (یونگ و اسمیت، ۲۰۰۵).

مثال ۲-۴: اگر عمل گروه به صورت $g_{(\eta,\tau)}(x)=\eta+\tau x$ باشد و یک نمونه تصادفی $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ اختیار شود، بردار میانگین و انحراف معیار نمونه یعنی $S(\mathbf{X})=(\bar{X},S)$ یک تابع هم‌ورداست که در آن $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ و $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2$. بنا بر این با توجه به قضیه ۲-۳، می‌توان نتیجه گرفت

$$g^{-1}_{S(\mathbf{X})}(\mathbf{X})=(\frac{X_1-\bar{X}}{S},\ldots,\frac{X_n-\bar{X}}{S})$$

ناوردای بیشین است (یونگ و اسمیت، ۲۰۰۵).

۲-۵ عمل به طور یکتا انتقالی روی فضای پارامتر

در این روش ابتدا برای گروه G که به طور یکتا انتقالی روی فضای پارامتر Θ عمل می‌کند ناوردای بیشین پیدا می‌شود. در این حالت نقطه مرجع $\theta_0\in\Theta$ در نظر گرفته می‌شود و G توسط Θ اندیس‌گذاری می‌شود به این صورت که g_θ عضو یکتای $g\in G$ که $g\theta_0=\theta$ تعریف می‌شود.

قضیه ۲-۴: فرض کنید G به طور یکتا انتقالی روی Θ عمل کند. در این صورت تابع ناوردای بیشین m نسبت به گروهی که روی $\Theta\times\mathcal{A}$ عمل می‌کند ($\mathcal{A}$فضای اعمال است) به صورت $m(\theta,a)=g_\theta^{-1}a$ خواهد بود، که در آن $(\theta,a)\in\Theta\times\mathcal{A}$ (روبرت و استاودت، ۱۹۷۱).

اکنون به کمک قضیه ۲-۴، برای گروه تبدیلاتی که یک زیرگروه به طور یکتا انتقالی دارند نیز تابع ناوردای بیشین به صورت زیر پیدا می‌شود.

قضیه ۲-۵: اگر G شامل زیرگروه نرمال به طور یکتا انتقالی H باشد، عضو ثابت $\theta_0\in\Theta$ و زیرگروه پایدارساز G_{θ_0} را در نظر بگیرید. اگر m_H تابع H-ناوردای بیشین حاصل شده توسط قضیه ۲-۴ و m_0 تابع G_{θ_0}-ناوردای بیشین باشد، آن‌گاه $m_0\circ m_H$ یک تابع G-ناوردای بیشین خواهد بود (روبرت و استاودت، ۱۹۷۱).

مثال ۲-۵: اگر گروه G (شامل توابع دوسویی و اکیداً صعودی پیوسته) روی Θ (شامل توابع پیوسته و اکیداً صعودی) عمل کند و $\mathcal{A}=\mathbb{R}$، آن‌گاه گروه القایی $\bar{G}$ روی Θ به طور یکتا عمل کند و $\bar{g}F=F\circ g^{-1}$. از این که برای $\theta_0=F_0\in\Theta$ دلخواه، $\bar{g}_F F_0=F$، می‌توان نتیجه گرفت که $g_F=F^{-1}F_0$. با استفاده از قضیه ۲-۵،

$$m(F,a)=\bar{g}_F^{-1}(a)=g_F^{-1}(a)=F_0^{-1}F(a)$$

ناوردای بیشین است.

۲-۶ تجزیه به فضای حاصل‌ضرب

اگر بتوان $\mathcal{X}$ را به صورت فضای حاصل‌ضرب $\mathcal{Y}\times\mathcal{Z}$ نوشت به طوری که عمل گروه روی $\mathcal{X}$ متناظر با عمل گروه روی $\mathcal{Y}\times\mathcal{Z}$ باشد، یعنی $g(y,z)=(gy,z)$ و همچنین G به طور انتقالی روی $\mathcal{Y}$ عمل می‌کند، $f_1(y,z)=z$ ناوردای بیشین برای G است که روی $\mathcal{Y}\times\mathcal{Z}$ عمل می‌کند.

قضیه ۲-۶: تحت شرایط بالا اگر تناظر یک به یک ϕ برای هر $x\in\mathcal{X}$ و $g\in G$ در رابطه $\phi(gx)=g\phi(x)$ صدق کند، آن‌گاه $f_1(\phi(x))$ ناوردای بیشین روی $\mathcal{X}$ است (ایتون، ۱۹۸۳).

مثال ۲-۶: فرض کنید $G=O_n$ روی $\mathcal{X}=\mathbb{R}-\{\mathbf{o}\}$ به صورت ضرب یک ماتریس در یک بردار عمل کند. برای $\mathbf{x}\in\mathcal{X}$، مدار $\mathbf{x}$ به صورت $G\mathbf{x}=\{\mathbf{y}:\|\mathbf{y}\|=\|\mathbf{x}\|\}$ خواهد بود. تساوی $\mathcal{X}=\cup_{r>0}S_r$ که در آن $S_r=\{\mathbf{y}:\|\mathbf{y}\|=\|\mathbf{x}\|\}$ نشان دهنده تجزیه $\mathcal{X}$ به رده‌های هم‌ارزی است و عدد حقیقی $r>0$ شاخصی برای مدارهاست. با توجه به این که $f(\mathbf{x})=\|\mathbf{x}\|$ ناورداست و روی هر مدار مقدار متفاوتی را اختیار می‌کند، f ناوردای بیشین است. پس شرط لازم و کافی برای این که یک تابع تحت عمل G روی $\mathcal{X}$ ناوردا باشد این است که تابعی از $\|\mathbf{x}\|$ باشد. تابع $\phi:\mathcal{X}\to S_1\times(0,\infty)$ تعریف شده با ضابطه $\phi(\mathbf{x})=\left(\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|,\|\mathbf{x}\|\right)$ یک به یک و پوشاست و برای هر $(\mathbf{u},r)\in S_1\times(0,\infty)$، $\phi^{-1}(\mathbf{u},r)=r\mathbf{u}$. همچنین عمل گروه روی $\mathcal{X}$ متناظر با عمل گروه روی $S_1\times(0,\infty)$ است، یعنی برای هر $\Gamma\in O_n$، $\Gamma(\mathbf{u},r)\equiv(\Gamma\mathbf{u},r)$. به عبارت دیگر با توجه به تساوی $\phi(\Gamma\mathbf{x})=\Gamma\phi(\mathbf{x})$، ϕ یک تابع هم‌ورداست. عمل O_n روی S_1

انتقالی است و لذا شرط لازم و کافی برای این که تابع h روی $S_1\times(0,\infty)$ ناوردا باشد این است که $h(\mathbf{u},r)$ به $\mathbf{u}$ بستگی نداشته باشد. قابل ذکر است که پوشا بودن ϕ منجر به تناظر عمل گروه روی $\mathcal{X}$ و عمل گروه روی $S_1\times(0,\infty)$ می‌شود که در آن عمل O_n روی S_1 انتقالی و عمل O_n روی $(0,\infty)$ بدیهی است. معرفی فضای جدید $S_1\times(0,\infty)$ منجر به تابع ناوردای بیشین $h_0(\mathbf{u},r)=r$ می‌شود. مدارهای $S_1\times(0,\infty)$ به صورت $S_1\times\{r\}$ هستند که $r>0$. از این رو روش تجزیه به فضای حاصل‌ضرب روشی راحت برای شاخص‌بندی مدارها و در نتیجه یافتن تابع ناوردای بیشین است.

۲-۷ مباحثی تکمیلی در مورد ناوردای بیشین

در این بخش چند مثال دیگر برای یافتن توابع ناوردا و ناوردای بیشین ارائه می‌شود. در انتهای بخش یک رابطه کلی بین درایه‌های آماره‌های ناوردای بیشین ارائه می‌شود.

مثال ۲-۷: در هر توزیع دو متغیره تبدیلات $X_i^*=b_iX_i+c_i$، $i=1,2$ که در آن $b_i>0$ را در نظر بگیرید. ضریب همبستگی ρ به عنوان یک تابع دو متغیره ناوردا خواهد بود (اندرسن، ۲۰۰۳).

مثال ۲-۸: در مدل رگرسیون خطی عمومی، بردار مانده کمترین توان‌های دوم معمولی تحت گروه تبدیلات مکانی یک تابع ناوردای بیشین است. این نتیجه برای به‌دست آوردن هم ارزی بین رده برآوردگرهای هم‌وردای مکانی و برآوردگر کمترین توان‌های دوم تعمیم‌یافته استفاده می‌شود. برای این منظور در مدل رگرسیون خطی عمومی $\mathbf{y}=X\beta+\boldsymbol{\epsilon}$ که $\mathbf{y}$ بردار $n\times 1$ و X ماتریس $n\times k$ با $rankX=k$ است، فضای اقلیدسی $G=\mathbb{R}^k$ به عنوان یک گروه مکانی با عمل دوتایی $+$، عضو خنثی $\mathbf{o}\in\mathbb{R}^k$ عضو وارون $-\mathbf{x}$ برای هر $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k$ است. فرض کنید $\mathcal{Y}=\mathbb{R}^n$ فضای مربوط به $\mathbf{y}$ باشد، در این صورت G روی $\mathcal{Y}$ برای هر $\mathbf{y}\in\mathcal{Y}$ و $\mathbf{g}\in G$ به صورت $\mathbf{y}\to\mathbf{y}+X\mathbf{g}$ عمل می‌کند. در این حالت ناوردای بیشین تحت G به صورت $m(\mathbf{y})=N\mathbf{y}$ خواهد بود که در آن $N=I_n-X(X^tX)^{-1}X^t$ و $\mathbf{e}=N\mathbf{y}$ بردار مانده کمترین توان‌های دوم معمولی است زمانی که $\epsilon^t\epsilon=(\mathbf{y}-X\boldsymbol{\beta})^t(\mathbf{y}-X\boldsymbol{\beta})$ نسبت به $\boldsymbol{\beta}$ مینیمم می‌شود. همچنین نشان داده می‌شود رده برآوردگرهای هم‌وردای مکانی در این مدل بر رده برآوردگرهای کمترین توان‌های دوم تعمیم‌یافته منطبق می‌شود (کاریا و کورتا، ۲۰۰۴).

مثال ۲-۹: عمل گروه $G=O_n$ روی $\mathcal{X}=\mathbb{R}^n$ به صورت $\mathbf{x}\to\Gamma\mathbf{x}$ برای هر $\Gamma\in O_n$ و $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ انتقالی نیست. در حقیقت برای هر $\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^n$، O_n-مدار $\mathbf{x}_0$ به صورت کره‌ای در $\mathbb{R}^n$ با نرم $\|\mathbf{x}_0\|$ به صورت

$$G\mathbf{x}_0=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:\|\mathbf{x}\|=\|\mathbf{x}_0\|\}$$

است که یک زیرمجموعهٔ سره از $\mathbb{R}^n$ است و لذا $G\mathbf{x}_0\neq\mathbb{R}^n$. اما اگر $\mathcal{X}=G\mathbf{x}_0$ اختیار شود که $\mathbf{x}_0\in\mathcal{X}$ دلخواه است، عمل $G=O_n$ روی $\mathcal{X}$ انتقالی است. بنا بر این اگر $\mathbf{x}_0$ طوری انتخاب شود که $\|\mathbf{x}_0\|=1$، آن‌گاه O_n به طور انتقالی روی کره یکه $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:\|\mathbf{x}\|=1\}$ عمل می‌کند. در حالتی که $G=O_n$ روی $\mathcal{X}=\mathbb{R}^n$ عمل می‌کند، تابع ناوردای f روی $\mathbb{R}^n$ تحت G برای هر $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ و $\Gamma\in O_n$ در شرط $f(\Gamma\mathbf{x})=f(\mathbf{x})$ صدق می‌کند و تابع ناوردای بیشین تحت

O_n به صورت $m(\mathbf{x})=\mathbf{x}^t\mathbf{x}$ خواهد بود و لذا هر تابع ناوردای f می‌تواند به صورت $f(\mathbf{x})=\tilde{f}(\mathbf{x}^t\mathbf{x})$ نمایش داده شود که $\tilde{f}$ تابعی روی $(0,\infty)$ است. توزیع یک بردار تصادفی $n\times 1$ مثل $\mathbf{y}$ را کروی متقارن نامند، هرگاه برای هر $\Gamma\in O_n$، $\Gamma\mathbf{y}\overset{d}{=}\mathbf{y}$. اگر علاوه بر آن $\mathbf{y}$ دارای تابع چگالی $f(\mathbf{y})$ نسبت به اندازه لبگ روی $\mathbb{R}^n$ باشد، f برای هر $\Gamma\in O_n$ و $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ در $f(\Gamma\mathbf{y})=f(\mathbf{y})$ صدق می‌کند و لذا f می‌تواند به صورت $f(\mathbf{y})=\tilde{f}(\mathbf{y}^t\mathbf{y})$ نمایش داده شود که در آن $\tilde{f}:(0,\infty)\to(0,\infty)$. برای تابع مشخصه $\mathbf{y}$ می‌توان به نتیجه‌ای مشابه رسید.

همان‌طور که در مثال‌های قبلی مشاهده شد، تابع f ناورداست اگر و تنها اگر روی هر مدار $\mathcal{X}$ ثابت باشد، یعنی مقدار تابع به این که x یا gx مشاهده شود بستگی ندارد. همچنین یک تابع ناوردای بیشین علاوه بر خصوصیت ناوردایی، برای هر مدار، مقدار متفاوتی را اختیار می‌کند و این بهترین حالتی است که $\mathcal{X}$ به مدارهایی افراز می‌شود که تحت G معادل‌اند. در حقیقت توابع ناوردای بیشین یک شاخص مدار تشکیل می‌دهند که دانستن مقدار ناوردای بیشین f در x معادل دانستن مدار Gx است. بنا بر این تابع ناوردای بیشین همه اطلاعات راجع به مداری که x متعلق به آن است را شامل می‌شود. در حالتی که G روی $\mathcal{X}$ انتقالی باشد، خود $\mathcal{X}$ یک مدار است و لذا در حالت یک نمونه‌ای تنها توابع ناوردای بیشین توابع ثابت هستند. توجه کنید که تمام توابع ناوردای بیشین از این جهت معادل یکدیگرند که تجزیه مداری یکسانی روی $\mathcal{X}$ ایجاد می‌کنند. دو مثال زیر مطلب را روشن می‌سازد.

مثال ۲-۱۰: در خانواده مکانی با گروه جمعی آماره‌های

$$T_1(\mathbf{X})=(X_1-\bar{X},\ldots,X_n-\bar{X}),$$
$$T_2(\mathbf{X})=(X_1-X_2,X_2-X_3,\ldots,X_{n-1}-X_n),$$
$$T_3(\mathbf{X})=(X_1-X_n,\ldots,X_{n-1}-X_n)$$

همگی ناوردای بیشین‌اند و هر سه آماره افراز یکسانی روی $\mathcal{X}$ تولید می‌کنند. در حقیقت اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{x}'$ در یک مدار یکسان باشند، یعنی اگر $\mathbf{x}'=\mu\mathbf{e}_n+\mathbf{x}$ که در آن $\mathbf{e}_n=(1,\ldots,1)\in\mathbb{R}^n$، آن‌گاه $T_1(\mathbf{x})=T_1(\mathbf{x}')$، $T_2(\mathbf{x})=T_2(\mathbf{x}')$ و $T_3(\mathbf{x})=T_3(\mathbf{x}')$ و برعکس اگر دو نقطه تحت $T_1(.)$ مقدار یکسانی داشته باشند، آن دو نقطه تحت $T_2(.)$ و $T_3(.)$ نیز مقدار یکسانی خواهند داشت. در حالت $n=1$، گروه انتقالی بوده و تنها توابع ناوردا توابع ثابت‌اند.

مثال ۲-۱۱: گروه تبدیلات مقیاس روی $\mathbb{R}^n$، $(n>1)$ و $\mathcal{X}=\mathbb{R}^n-E$ را در نظر بگیرید که در آن $E=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n : x_1=\ldots=x_n\}$. عناصر گروه G به صورت $g(\mathbf{x})=(\sigma x_1,\ldots,\sigma x_n)$ هستند که $\sigma>0$. آماره‌های

$$T_1(\mathbf{X})=\left(\frac{X_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}},\ldots,\frac{X_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}\right),$$
$$T_2(\mathbf{X})=\left(\frac{X_1}{X_{(n)}-X_{(1)}},\ldots,\frac{X_n}{X_{(n)}-X_{(1)}}\right)$$

هر دو ناوردای بیشین هستند که روابط

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}}\Big)^2=1,$$
$$\max_i\{\frac{X_i}{X_{(n)}-X_{(1)}}\}-\min_i\{\frac{X_i}{X_{(n)}-X_{(1)}}\}=1 \qquad (۱)$$

بین درایه‌های آن برقرار است. بنا بر این آماره‌های ناوردای بیشین هریک σ-جبر یکسانی تولید کرده و در تناظر یک به یک با هم هستند.

در قضیه زیر در حالت کلی رابطه بین درایه‌های آماره‌های ناوردای بیشین ثابت می‌شود.

قضیه ۲-۷: اگر $\delta:\mathcal{X}\to G$ یک تابع هم‌وردا و $\delta:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ با ضابطه $f(x)=(\delta(x))^{-1}x$ ناوردای بیشین باشد (طبق قضیه ۲-۱)، آن‌گاه $\delta(f(x))=e$ و همچنین $f\circ f=f$.

برهان.

$$\delta(f(x))=\delta((\delta(x))^{-1}x)=(\delta(x))^{-1}\delta(x)=e,$$
$$f(f(x))=(\delta(f(x)))^{-1}f(x)=e^{-1}f(x)=f(x).$$

مثال ۲-۱۲: در مثال ۲-۱۱، $\delta_1(\mathbf{x})=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$ $(\delta_2(\mathbf{x})=x_{(n)}-x_{(1)})$ هم‌ورداست و در پی آن $f_1(\mathbf{x})=T_1(\mathbf{x})$ $(f_2(\mathbf{x})=T_2(\mathbf{x}))$ ناوردای بیشین است. لذا طبق قضیه ۲-۷،

$$\delta_1(f_1(\mathbf{x}))=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}}\Big)^2}=1$$

$$\Big(\delta_2(f_2(\mathbf{x}))=\max_i\{\frac{x_i}{x_{(n)}-x_{(1)}}\}-\min_i\{\frac{x_i}{x_{(n)}-x_{(1)}}\}=\frac{x_{(n)}-x_{(1)}}{x_{(n)}-x_{(1)}}=1\Big).$$

بنا بر این صحت روابط (۱) با استفاده از قضیه ۲-۷ تأیید شد.

مثال ۲-۱۳: در مثال ۲-۱۰، $\delta_1(x)=\bar{x}$ هم‌ورداست و $f_1(\mathbf{x})=T_1(\mathbf{x})$ ناوردای بیشین است و بنا بر این طبق قضیه ۲-۷،

$$\delta_1(f_1(\mathbf{x}))=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=0.$$

به طور مشابه $\delta_2(\mathbf{x})=x_n$ هم‌ورداست و لذا

$$f_2(\mathbf{x})=(x_1-x_n,\ldots,x_{n-1}-x_n,0)$$

(و همچنین $T_2(\mathbf{x})$) ناوردای بیشین است و از این رو طبق قضیه ۲-۷، $\delta_2(f_2(\mathbf{x}))=0$.

با توجه به قضیه ۲-۷ این نتیجه حاصل می‌شود که تحت شرایط قضیه، شرط $f\circ f=f$ برقرار است که این حقیقت را به راحتی می‌توان در مثال ۲-۱۰ و ۲-۱۱ مشاهده کرد. به عنوان مثال دیگر با مراجعه به مثال ۳-۱، از این که آماره ناوردای بیشین $f(z_1,z_2)=(\sqrt{z_1z_2},\sqrt{z_1z_2})$ از روی تابع هم‌وردای

$$\delta(z_1,z_2)=\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$$

ساخته می‌شود، می‌توان مشاهده کرد:

$$\delta(f(z_1,z_2))=\sqrt{\frac{\sqrt{z_1z_2}}{\sqrt{z_1z_2}}}=1.$$

۳. آماره‌های ناوردای بیشین و براوردگرهای هم‌وردا

در این بخش ارتباط بین آماره‌های ناوردای بیشین و براوردگرهای هم‌وردا مورد بررسی قرار می‌گیرد و سعی می‌شود به عنوان یک روش جدید، از روی براوردگرهای هم‌وردا، آماره‌های ناوردای بیشین ساخته شود و یک صورت کلی برای این آماره‌ها پیشنهاد می‌شود. سپس تحت برخی شرایط، یک آماره ناوردای بیشین توسط دو (یا بیشتر) براوردگر هم‌وردا ساخته می‌شود یک ارتباط مقدماتی بین توابع هم‌وردا و ناوردای بیشین در گزاره زیر آورده شده است.

گزاره ۳-۱: اگر $\mathcal{X}$، $\mathcal{Y}$ و $\mathcal{Z}$، سه G-فضا باشند، در این صورت:

الف) اگر $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ هم‌وردا و $h:\mathcal{Y}\to\mathcal{Z}$ ناوردا باشد، آن‌گاه $k_1=h\circ f:\mathcal{X}\to\mathcal{Z}$ ناورداست.

ب) اگر $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ یک به یک و $h:\mathcal{Z}\to X$ ناوردای بیشین باشد، در این‌صورت تابع $k_2=f\circ h:\mathcal{Z}\to\mathcal{Y}$ ناوردای بیشین است.

ج) اگر $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ هم‌وردا و تک‌وردا و $h:\mathcal{Y}\to\mathcal{Z}$ ناوردای بیشین باشد، در این صورت $k_1=h\circ f:\mathcal{X}\to\mathcal{Z}$ ناوردای بیشین است.

برهان. الف) تابع $k_1 = h \circ f$ ناوردا هست، زیرا برای هر $x \in \mathcal{X}$ و $g \in G$:

$$k_1(gx) = h(f(gx)) = h(gf(x)) = h(f(x)) = k_1(x).$$

ب) برای هر $x \in \mathcal{X}$ و $g \in G$، $k_2(gx) = f(h(gx)) = f(h(x)) = k_2(x)$ و بنا بر این k_2 ناورداست. همچنین اگر $k_2(x_1) = k_2(x_2)$، آن‌گاه $f(h(x_1)) = f(h(x_2))$ و با توجه به یک به یک بودن f و ناوردای بیشین بودن h، مقدار $g \in G$ وجود دارد به طوری که $x_1 = gx_2$. بنا بر این $k_2 = f \circ h$ ناوردای بیشین است.

ج) با توجه به قسمت (الف)، $k_1 = h \circ f$ ناورداست. حال اگر $k_1(x_1) = k_2(x_2)$، آن‌گاه $h(f(x_1)) = h(f(x_2))$ و با توجه به این که h ناوردای بیشین است مقدار $g \in G$ وجود دارد به قسمی که $f(x_1) = gf(x_2)$. از طرف دیگر f هم‌ورداست و از این رو $f(x_1) = gf(x_2) = f(gx_2)$. با توجه به گزاره ۲-۱ (ب) و این که f تک‌وردا است می‌توان نتیجه گرفت که f روی هر مدار Gx یک به یک است و در پی آن برای یک $g \in G$، $x_1 = gx_2$. بنا بر این $k_1 = h \circ f$ ناوردای بیشین است.

یک تابع ناوردای بیشین روی هر مدار ثابت است اما برای هر مدار مقادیر متفاوتی را اختیار می‌کند. اگر G روی $\mathcal{X}$ به طور انتقالی عمل کند، برای هر تابع ناوردا مثل f، اگر $f(x_1) = y_1$ و $f(x_2) = y_2$، در این صورت برای یک $g \in G$، $y_2 = f(x_2) = f(gx_1) = f(x_1) = y_1$ و از این طریق تنها توابع ناوردا توابع ثابت‌اند و بنا بر این گزاره ۳-۱ بدیهی است.

برای دیدن کاربرد گزاره ۳-۱، فرض کنید $G = \mathbb{R}$ روی $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ توسط $g\mathbf{x} = \mathbf{x} + g\mathbf{e}_n$ عمل می‌کند که $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$، $g \in \mathbb{R}$ و $\mathbf{e}_n = (1,\dots,1) \in \mathbb{R}^n$. اگر $\delta_0(\mathbf{x}) = \bar{x}$، یک براوردگر G-هم‌وردا باشد، آن‌گاه

$$h(\mathbf{x}) = (\delta_0(\mathbf{x}))^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x} - \bar{x}\mathbf{e}_n = (x_1 - \bar{x},\dots,x_n - \bar{x})$$

ناوردای بیشین است (مثال ۲-۲). اکنون می‌توان از گزاره ۳-۱ (ج) استفاده کرد و برای تابع G-تک‌وردا و G-هم‌وردای $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ به صورت

$$f(\mathbf{x}) = \left(f_1(\mathbf{x}),\dots,f_n(\mathbf{x})\right)$$

این نتیجه حاصل می‌شود که

$$k_1(\mathbf{x}) = h \circ f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}) - \overline{f(\mathbf{x})},\dots,f_n(\mathbf{x}) - \overline{f(\mathbf{x})})$$

ناوردای بیشین است که در آن $\overline{f(\mathbf{x})} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x})$. در حالت خاص اگر $f(\mathbf{x}) = (x_{(1)},\dots,x_{(n)})$، می‌توان نتیجه گرفت که

$$k_1(\mathbf{x}) = (x_{(1)} - \bar{x},\dots,x_{(n)} - \bar{x})$$

ناوردای بیشین است. به‌علاوه با اختیار کردن برآوردگر G-هم‌وردای دیگری مثل $\delta_0'(\mathbf{x}) = x_n$ توسط قضیه ۲-۱، به طور مشابه

$$h'(\mathbf{x}) = (x_1 - x_n,\dots,x_{n-1} - x_n)$$

ناوردای بیشین است و با استفاده از گزاره ۳-۱ (ج)،

$$k_1'(\mathbf{x}) = h' \circ f\,(\mathbf{x}) = (x_{(1)} - x_{(n)}, \ldots, x_{(n-1)} - x_{(n)})$$

نیز آماره ناوردای بیشین خواهد بود.

ایتون (۱۹۸۹) روش کلی برای ساختن توابع ناوردای بیشین از روی توابع هم‌وردا ارائه داد (قضیه۲-۱). قضیه زیر نشان می‌دهد چگونه یک ناوردای بیشین توسط دو تابع هم‌وردا ساخته می‌شود. در روش جدید به جای استفاده از یک برآوردگر هم‌وردا از دو برآوردگر هم‌وردا استفاده می‌شود.

قضیه ۳-۱: فرض کنید توابع هم‌وردای $\tau_i : \mathcal{X} \to G$ ، $i = 1, 2$ وجود داشته باشند. حال اگر تابع $f : \mathcal{X} \to G$ به صورت $f(x) = (\tau_1(x))^{-1}\tau_2(x)$ تعریف شده باشد، در این صورت:

الف) f ناورداست.

ب) اگر حداقل یکی از τ_iها تک‌وردا باشند، f ناوردای بیشین است.

برهان. الف) f ناورداست، زیرا

$$f(gx) = (\tau_1(gx))^{-1}\tau_2(gx) = (\tau_1(x))^{-1} g^{-1} g \tau_2(x) = f(x).$$

ب) بدون کاستن از کلیت فرض کنید مثلاً τ_2، تک‌وردا باشد. از این که τ_2، G-تک‌وردا و G-هم‌وردا است با توجه به گزاره ۲-۱ (ب)، τ_2 روی هر مدار Gx یک به یک است. بنا بر این توسط قسمت (الف) کافی است نشان داده شود که f بیشین است. برای دیدن این حقیقت فرض کنید

$$f(x_1) = (\tau_1(x_1))^{-1}(\tau_2(x_1)) = (\tau_1(x_2))^{-1}(\tau_2(x_2)) = f(x_2).$$

با قرار دادن $g_1 = (\tau_1(x_1))^{-1}$ و $g_2 = (\tau_1(x_2))^{-1}$ داریم $g_1\tau_2(x_1) = g_2\tau_2(x_2)$. از این که τ_2، G-هم‌وردا است، $\tau_2(g_1x_1) = \tau_2(g_2x_2)$. از طرف دیگر τ_2 روی هر مدار Gx یک به یک است. بنا بر این $x_1 = gx_2$ که $g = g_1^{-1}g_2 \in G$.

مثال ۳-۱: فرض کنید $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ یک نمونه تصادفی از تابع چگالی توأم $(\sigma e^{-\sigma x})(\frac{1}{\sigma} e^{-\frac{y}{\sigma}})$ باشند، که در آن $\sigma > 0$ و $x, y > 0$. این مدل به مسأله نیل معروف است که توسط فیشر (۱۹۷۳) مطرح شد. به وضوح $(Z_1, Z_2) = (\bar{X}, \bar{Y})$ یک آماره بسنده مینیمال برای σ است. فرض کنید عمل $G = \mathbb{R}^+$ روی $\mathcal{X} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ و $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^+$ برای هر $g \in G$، $(z_1, z_2) \in \mathcal{X}$ و $y \in \mathcal{Y}$ به صورت $g \times (z_1, z_2) = (gz_1, gz_2)$ و $g \otimes y = gy$ باشد.

با توجه به این که برای هر $(z_1, z_2) \in \mathcal{X}$، $G(z_1, z_2) = \mathcal{X}$ و $G_{(z_1, z_2)} = \{1\}$، می‌توان گفت عمل G روی $\mathcal{X}$ به طور یکتا انتقالی است. توابع $\tau_i : \mathcal{X} \to G$ ، $i = 1, 2$ داده شده توسط $\tau_1(z_1, z_2) = \sqrt{z_1 z_2}$ و $\tau_2(z_1, z_2) = z_2$ دو تابع G-هم‌وردا هستند. با توجه به قضیهٔ ۳-۱،

$$f(z_1,z_2)=(\tau_1(z_1,z_2))^{-1}\tau_2(z_1,z_2)=\frac{z_2}{\sqrt{z_1z_2}}=\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$$

ناورداست. در ضمن $G_{(z_1,z_2)}=G_{\tau_1(z_1,z_2)}=\{1\}$ و بنا بر این τ_1، تک‌وردا است. لذا با توجه به قضیه ۳-۱ (ب)،

$$f(z_1,z_2)=\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$$

ناوردای بیشین است.

قضیه ۳-۱ را می‌توان با استفاده از به‌کارگیری چند براوردگر هم‌وردا برای ساختن آماره ناوردای بیشین به صورت زیر گسترش داد.

فرع ۳-۱: فرض کنید $\tau_i:\mathcal{X}\to G$، $i=1,\ldots,2n$ تابع‌های G-هم‌وردا باشند. در این صورت تابع $f:\mathcal{X}\to G$ تعریف شده به صورت $f(x)=\Pi_{i=1}^n(\tau_{2i-1}(x))^{-1}\tau_{2i}(x)$ ناوردای بیشین است اگر حداقل یکی از τ_1 یا τ_{2n} تک‌وردا باشند.

برهان. قضیه ۳-۱ (الف) نتیجه می‌دهد توابع $f_i(x)=(\tau_{2i-1}(x))^{-1}(\tau_{2i}(x))$، $i=1,\ldots,n$ ناوردا هستند. بنا بر این $f(x)=\Pi_{i=1}^n f_i(x)$ ناورداست. بدون این که به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود فرض کنید τ_{2n}، G-تک‌ورداست. با استفاده از گزاره ۲-۱ (ب)، τ_{2n} روی هر مدار Gx یک به یک است. حال اگر $f(x_1)=f(x_2)$، آن‌گاه:

$$\Pi_{i=1}^{n-1}f_i(x_1)(\tau_{2n-1}(x_1))^{-1}\tau_{2n}(x_1)=\Pi_{i=1}^{n-1}f_i(x_2)(\tau_{2n-1}(x_2))^{-1}\tau_{2n}(x_2).$$

از این که $g_1,g_2\in G$ وجود دارند به قسمی که

$$\Pi_{i=1}^{n-1}f_i(x_j)(\tau_{2n-1}(x_j))^{-1}=g_j,\ j=1,2$$

داریم $g_1\tau_{2n}(x_1)=g_2\tau_{2n}(x_2)$. با به‌کارگیری این حقیقت که τ_{2n}، G-هم‌وردا و روی هر مدار Gx یک به یک است مشابه اثبات قضیه ۳-۱ (ب) نتیجه حاصل می‌شود.

مثال ۳-۲: فرض کنید $X_1,\ldots,X_n\overset{i.i.d.}{\sim}N\left(\theta,\sigma^2\right)$ که $\sigma^2>0$ معلوم و θ نامعلوم است و $G=\mathbb{R}$ روی $\mathcal{X}=\mathbb{R}^n$ و $\mathcal{Y}=\mathbb{R}$ برای هر $g\in G$، $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathcal{X}$ و $y\in\mathcal{Y}$ به‌ترتیب به صورت $g\times\mathbf{x}=(x_1+g,\ldots,x_n+g)$ و $g\otimes y=y+g$ عمل می‌کند. توابع $\tau_i:\mathcal{X}\to G$ به صورت $\tau_i(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{j=1}^n m_{i,j}x_j$ برای $i=1,\ldots,2n$ توابع G-هم‌وردا هستند که $m_{i,j}$ها برای $i=1,\ldots,2n$ و $j=1,\ldots,n$ به‌گونه‌ای تعیین می‌شوند که برای هر $i=1,\ldots,2n$، $\sum_{j=1}^n m_{i,j}=1$. فرع ۳-۱ نشان می‌دهد

$$f(x_1,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(\tau_{2i}(x_1,...,x_n)-\tau_{2i-1}(x_1,...,x_n))$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left[m_{2i,j}-m_{2i-1,j}\right]x_j\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}w_jx_j$$

ناورداست که $w_j=\sum_{i=1}^{n}(m_{2i,j}-m_{2i-1,j})$، $j=1,...,n$. در این حالت طبق قضیه ۲-۱

$$h(x_1,...,x_n)=(\sum_{j=1}^{n}m_{i,j}x_j)^{-1}\times(x_1,...,x_n)=(x_1-\sum_{j=1}^{n}m_{i,j}x_j,...,x_n-\sum_{j=1}^{n}m_{i,j}x_j)$$

یک ناوردای بیشین است. در حالت خاص اگر $\tau_i(x_1,...,x_n)=\bar{x}$، (یعنی $m_{i,j}=\frac{1}{n}$) ناوردای بیشین معمول یعنی $(x_1-\bar{x},...,x_n-\bar{x})$ تبدیل می‌شود.

مثال ۳-۳: فرض کنید $X_1,\ldots,X_n\overset{i.i.d.}{\sim}f_\sigma(x)=\sigma e^{-\sigma x}$ که $\sigma>0$، $x>0$ و $G=\mathbb{R}^+$ روی $\mathcal{X}=(\mathbb{R}^+)^n$ و $\mathcal{Y}=\mathbb{R}^+$ توسط $g\times\mathbf{x}=g(x_1,...,x_n)=(gx_1,...,gx_n)$ و $g\otimes y=gy$ برای هر $g\in G$، $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)\in\mathcal{X}$ و $y\in\mathcal{Y}$ عمل می‌کند. توابع $\tau_i:\mathcal{X}\to G$ که در آن $\tau_i(x_1,...,x_n)=\prod_{j=1}^{n}x_j^{m_{i,j}}$ و $i=1,...,2n$، G-هم‌وردا هستند که $m_{i,j}$ ها برای $i=1,...,2n$ و $j=1,...,n$ در $\sum_{j=1}^{n}m_{i,j}=1$ صدق می‌کنند. با توجه به فرع ۳-۱،

$$f(x_1,...,x_n)=\Pi_{i=1}^{n}\frac{\tau_{2i}(x_1,...,x_n)}{\tau_{2i-1}(x_1,...,x_n)}=\prod_{j=1}^{n}x_j^{\sum_{i=1}^{n}(m_{2i,j}-m_{2i-1,j})}$$

ناورداست. فرض کنید n یک عدد طبیعی زوج باشد و برای $j=1,...,n$ قرار دهید

$$w_j=\sum_{i=1}^{n}(m_{2i,j}-m_{2i-1,j}).$$

اگر برای $j=1,...,n/2$ و یک عدد طبیعی فرد k، $w_{2j}=-k$ و $w_{2j-1}=k$، بنا بر این می‌توان نتیجه گرفت که

$$f(x_1,...,x_n)=\Pi_{j=1}^{n}x_j^{w_j}=\Pi_{j=1}^{n/2}(\frac{x_{2j-1}}{x_{2j}})^k$$

ناوردا و در حالت $n=2$ ناوردای بیشین است. لذا طبق قضیه ۲-۱،

$$h(x_1,...,x_n)=(\Pi_{j=1}^{n}x_j^{m_{i,j}})^{-1}\times(x_1,\ldots,x_n)=(\frac{x_1}{\prod_{j=1}^{n}x_j^{m_{i,j}}},\ldots,\frac{x_n}{\prod_{j=1}^{n}x_j^{m_{i,j}}})$$

یک ناوردای بیشین است.

۴. ناوردای بیشین تحت گروه‌های به طور یکتا انتقالی

در این بخش با محدود کردن روی گروه‌های به طور یکتا انتقالی، فضای پارامتر را می‌توان به عنوان یک گروه با عمل دوتایی جدید در نظر گرفت. بر این اساس توابع هم‌وردا را می‌توان به برآوردگرهای هم‌وردا تبدیل کرد و از این طریق می‌توان توابع ناوردای بیشین را توسط این برآوردگرها پیدا کرد. مزیت این حالت این است که چون در آمار معمول است که به جای

توابع هم‌وردا از برآوردگرهای هم‌وردا استفاده شود، در حالت گروه به طور یکتا انتقالی پیدا کردن این توابع ساده‌تر خواهد بود. در حالت خاص که گروه شامل یک زیرگروه به طور یکتا انتقالی و نرمال است مسأله بررسی خواهد شد. بعد از آن یک راه ساده برای یافتن ناوردای بیشین بر اساس برآوردگرهای هم‌وردا ارائه می‌شود.

فرض کنید G یک گروه و Θ یک G-فضا باشد. زمانی که G روی Θ به طور یکتا انتقالی عمل کند، می‌توان G را توسط Θ اندیس‌گذاری کرد. می‌توان یک نقطه پایه دلخواه $\theta_0 \in \Theta$ را در نظر گرفت و هر عضو $\theta \in \Theta$ را به طور یکتا به صورت $g_\theta \theta_0 = \theta$ نوشت. به وضوح e متناظر با θ_0 خواهد بود. از این که G روی Θ به طور یکتا انتقالی است، G روی Θ به طور آزاد عمل می‌کند و لذا تساوی $g_{h\theta}\theta_0 = h\theta = hg_\theta\theta_0$ نتیجه می‌دهد که برای هر $\theta \in \Theta$ و $h \in G$، $g_{h\theta} = hg_\theta$. همچنین $\eta : \Theta \to G$ با ضابطه $\eta(\theta) = g_\theta$ یک تابع دوسویی هم‌ورداست. از این که G روی Θ به طور انتقالی عمل می‌کند، می‌توان نتیجه گرفت که در حالت یک نمونه‌ای توابع ناوردا ثابت‌اند.

مثال ۴-۱: فرض کنید Θ رده تمام توابع توزیع پیوسته و صعودی و G رده تمام توابع پیوسته اکیداً صعودی و دوسویی است که روی $\mathcal{X}$ به صورت مختصات‌وار عمل می‌کند. G روی Θ به صورت $g \bullet F = F \circ g^{-1}$ عمل می‌کند که این عمل به طور یکتا انتقالی است، زیرا برای هر $F_1, F_2 \in \Theta$، تبدیل g داده شده توسط $g^{-1}(x) = F_1^{-1}F_2(x)$ یک عضو یکتا از G است که در $g \bullet F_1 = F_2$ صدق می‌کند. یک نقطه دلخواه $\theta_0 = F_0 \in \Theta$ را در نظر بگیرید و تعریف کنید g_F عضو یکتای $g \in G$ که برای هر $F \in \Theta$ در $g \bullet F_0 = F$ صدق کند. در این صورت $g_F = F^{-1}F_0$.

اگر $\mathcal{P}$ خانواده تمام توزیع‌های پیوسته روی $\mathbb{R}$ باشد که میانه یکتا دارند و گروه G شامل توابع صعودی دوسویی با مقادیر حقیقی روی $\mathbb{R}$ به طور مختصات‌وار روی $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ عمل کند، این عمل گروه روی $\mathcal{X}$ یک عمل گروه روی $\Theta = \mathbb{R}$ القا می‌کند. برای $P \in \mathcal{P}$ قرار دهید $\tau(P) = F_P^{-1}(1/2)$ که F_P تابع توزیع متناظر با P است. بنا بر این $\tau(P)$ میانه متناظر با P است. تابع $\tau : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$، G-هم‌ورداست، زیرا برای هر $g \in G$ و $P \in \mathcal{P}$،

$$\tau(gP) = F_{gP}^{-1}(1/2) = (g \bullet F_P)^{-1}(1/2) = (F_P \circ g^{-1})^{-1}(1/2) = gF_P^{-1}(1/2) = g\tau(P).$$

برک (۱۹۶۷) ثابت کرد توابع هم‌وردا برای میانه، آماره‌های ترتیبی هستند.

لم ۴-۱: فرض کنید G شامل یک زیرگروه نرمال H باشد که روی Θ به طور یکتا انتقالی عمل می‌کند. اگر نقطه دلخواه $\theta_0 \in \Theta$ در نظر گرفته شود و h_θ به عنوان عضو یکتای $h \in H$ که در $h\theta_0 = \theta$ صدق می‌کند، آن‌گاه:

الف) برای هر $g \in G_{\theta_0}$، $\theta \in \Theta$ و یک $h_\theta \in H$، $h_{g\theta} = gh_\theta g^{-1}$.

ب) $\eta : \Theta \to H$ با ضابطه $\eta(\theta) = h_\theta$، G_{θ_0}-هم‌ورداست.

برهان. الف) برای هر $g \in G$ قرار می‌دهیم $\theta = g\theta_0$. با توجه به این که H روی Θ به طور یکتا انتقالی عمل می‌کند، یک $h_\theta \in \Theta$ یکتا وجود دارد به‌قسمی که $\theta = h_\theta\theta_0$. بنا بر این $g_0 = h_\theta^{-1}g \in G_{\theta_0}$ و لذا $g = h_\theta g_0 \in HG_{\theta_0}$. این

مطلب ثابت می‌کند $G = HG_{\theta_0}$ و این منجر به این حقیقت می‌شود که H و G_{θ_0} گروه G را تولید می‌کنند. برای هر $g \in G_{\theta_0}$، تساوی $h_{g\theta}\theta_0 = g\theta = gh_\theta\theta_0$ نشان می‌دهد که $g_0 = h_{g\theta}^{-1}gh_\theta \in G_{\theta_0}$. با توجه به این که $H \lhd G$، می‌توان $h' \in H$ را طوری پیدا کرد که $gh_\theta = h_{g\theta}g_0 = g_0h'$. بنا بر این $g_0^{-1}g = h'h_\theta^{-1} \in H \cap G_{\theta_0}$ و از این رو $g_0^{-1}g\theta_0 = \theta_0$ که در آن $g_0^{-1}g \in H$. اما H به طور یکتا انتقالی و نرمال است و از این رو $g = g_0 = h_{g\theta}^{-1}gh_\theta$ و در پی آن برای هر $g \in G_{\theta_0}$ و $\theta \in \Theta$ و یک $h_\theta \in H$، $h_{g\theta} = gh_\theta g^{-1}$.

ب) با توجه به قسمت (الف) برای هر $g \in G_{\theta_0}$ و $\theta \in \Theta$، $\eta(g\theta) = h_{g\theta} = g\eta(\theta)g^{-1}$ که عمل G_{θ_0} روی H یک عمل مزدوجی است، یعنی عمل g روی $\eta(\theta)$ به صورت $g \bullet \eta(\theta) = g\eta(\theta)g^{-1}$ است. از این رو برای هر $g \in G_{\theta_0}$ و $\theta \in \Theta$، $\eta(g\theta) = g \bullet \eta(\theta)$ که نشان می‌دهد، تابع η یک تابع G_{θ_0}-هم‌وردا هست.

قضیه ۴-۱: اگر G شامل یک زیرگروه نرمال H باشد که روی Θ به طور یکتا انتقالی عمل می‌کند و $\tau_0 : \Theta \to G_{\theta_0}$ و $\tau : \Theta \to \Theta$ توابع G_{θ_0}-هم‌وردا باشند که در آن τ روی هر مدار $H\theta$ یک به یک است، در این صورت

$$f'(\theta) = (\tau_0 \circ \tau(h_\theta^{-1}\theta))^{-1}\tau(h_\theta^{-1}\theta)$$

روی Θ ناوردای بیشین است که h_θ عضو یکتای H است که برای ثابت $\theta_0 \in \Theta$، $h_\theta\theta_0 = \theta$.

برهان. برای $\theta_0 \in \Theta$ با توجه به فرضیات قضیه تابع $f_0 : \Theta \to \Theta$ با ضابطه $f_0(\theta) = (\tau_0(\theta))^{-1}\theta$، یک آماره G_{θ_0}-ناوردای بیشین است. اگر تابع $f_H : \Theta \to \Theta$ به صورت $f_H(\theta) = \tau(h_\theta^{-1}\theta)$ تعریف شود که در آن $h_\theta \in H$ عضو یکتای H به‌قسمی که $h_\theta\theta_0 = \theta$ باشد، با استفاده از لم ۴-۱ (الف)، برای هر $g \in G$ و $\theta \in \Theta$:

$$f_H(g\theta) = \tau\left(h_{g\theta}^{-1}g\theta\right) = \tau\left(gh_\theta^{-1}g^{-1}\theta\right) = gf_H(\theta) \qquad (۲)$$

و از این رو f_H، یک تابع G_{θ_0}-هم‌ورداست. به‌راحتی ثابت می‌شود برای هر $h' \in H$ و $\theta \in \Theta$:

$$f_H(h'\theta) = \tau(h_{h'\theta}^{-1}h'\theta) = \tau(h_\theta^{-1}h'^{-1}h'\theta) = f_H(\theta).$$

بنا بر این f_H یک تابع H-ناورداست. در حالتی که تابع τ روی هر مدار $H\theta$ یک به یک باشد، f_H، یک تابع H-ناوردای بیشین نیز هست. اکنون تابع $f' : \Theta \to \Theta$ با ضابطه $f' = f_0 \circ f_H$ در نظر گرفته می‌شود. با توجه به لم ۴-۱، $G = HG_{\theta_0}$ به این معنی است که برای هر $g \in G$، می‌توان یک $g_0 \in G_{\theta_0}$ و $h_\theta \in H$ طوری پیدا کرد که $g = h_\theta g_0$ و در پی آن برای هر $g \in G$ و $\theta \in \Theta$:

$$f'(g\theta) = f_0 \circ f_H(h_\theta g_0\theta) = f_0 \circ f_H(g_0\theta) = f_0(g_0 f_H(\theta)) = f_0(f_H(\theta)) = f'(\theta)$$

که در تساوی سوم از رابطه (۲) و در تساوی چهارم از این که f_0 یک تابع G_{θ_0}-ناورداست و در تساوی اول و آخر از تعریف f' استفاده شده است. این مطلب ثابت می‌کند که f'، G-ناورداست. اگر

$$f'(\theta_1) = f_0(f_H(\theta_1)) = f_0(f_H(\theta_2)) = f'(\theta_2),$$

از G_{θ_0}-ناوردای بیشین بودن f_0 و G_{θ_0}-هم‌وردا بودن f_H می‌توان نتیجه گرفت برای یک $g_0 \in G_0$،

$$f_H(\theta_1) = g_0 f_H(\theta_2) = f_H(g_0\theta_2).$$

اما f_H یک تابع H-ناوردای بیشین و τ برای هر θ روی H یک به یک است. لذا $h_\theta \in H$ وجود دارد به‌قسمی که $\theta_1 = h_\theta g_0 \theta_2$. بنا بر این برای یک $g \in G$، $\theta_1 = g\theta_2$ و از این رو تابع

$$f'(\theta) = f_0\left[\tau\left(h_\theta^{-1}\theta\right)\right] = \left[\tau_0 \circ \tau\left(h_\theta^{-1}\theta\right)\right]^{-1} \tau\left(h_\theta^{-1}\theta\right) = \left[\gamma\left(h_\theta^{-1}\theta\right)\right]^{-1} \tau\left(h_\theta^{-1}\theta\right)$$

G-ناوردای بیشین است که در آن تابع $\gamma : \Theta \to G_{\theta_0}$ به صورت $\gamma = \tau_0 \circ \tau$ تعریف می‌شود و یک تابع G_{θ_0}-هم‌ورداست به طوری که برای هر $g_0 \in G_{\theta_0}$ و $x \in \mathcal{X}$، $\gamma(g_0 x) = g_0 \gamma(x)$ و تابع G_{θ_0}-هم‌وردای $\tau : \Theta \to \Theta$ روی هر مدار $H\theta$ یک به یک است.

مثال ۴-۲: فرض کنید

$$G = \{ diag(a_1, \ldots, a_n) : a_1, \ldots, a_n > 0 \}$$

گروه ماتریس‌های قطری $n \times n$ باشد و روی

$$\Theta = \{ \boldsymbol{\theta} = (\theta, \ldots, \theta) : \theta \in \mathbb{R} \}$$

توسط $(g, \boldsymbol{\theta}) \to g\boldsymbol{\theta}$ برای هر $g \in G$ و $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ عمل کند. (این حالت زمانی که بردارهای تصادفی از یک توزیع نرمال $N_p(\boldsymbol{\theta}, \Sigma)$ با $\boldsymbol{\theta} = (\theta, \ldots, \theta)^t \in \Theta$ مجهول و Σ معلوم می‌آیند کاربرد دارد.) به وضوح G شامل زیرگروه نرمال

$$H = \{ diag(a, \ldots, a) : a > 0 \} \leq G$$

هست که روی G به طور یکتا انتقالی است. با در نظر گرفتن نقطه ثابت $\boldsymbol{\theta}_0 = (\theta_0, \ldots, \theta_0)^t \in \Theta$ و اندیس‌گذاری G توسط Θ، $h_{\boldsymbol{\theta}}$ را عضو یکتای $h \in H$ که در رابطه $h_{\boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{\theta}$ صدق کند تعریف می‌کنیم. در این حالت $G_{\boldsymbol{\theta}_0} = \{I\}$ که I ماتریس همانی $n \times n$ و عضو خنثی گروه است. بنا بر این G آزاد است و از این رو، به طور یکتا انتقالی روی Θ عمل می‌کند. فرض کنید $\tau_0 : \Theta \to G_{\boldsymbol{\theta}_0}$ یک تابع $G_{\boldsymbol{\theta}_0}$-هم‌وردا باشد و $\tau : \Theta \to \Theta$ یک تابع $G_{\boldsymbol{\theta}_0}$-هم‌وردا که

$$H\boldsymbol{\theta} = \{ a\boldsymbol{\theta} = (a\boldsymbol{\theta}, a\boldsymbol{\theta})^t : \boldsymbol{\theta} > 0 \} = \Theta$$

برای هر $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ یک به یک باشد. طبق قضیه ۴-۱،

$$f'(\boldsymbol{\theta}) = (\tau_0 \tau(\boldsymbol{\theta}_0))^{-1} \tau(\boldsymbol{\theta}_0) = \tau(\boldsymbol{\theta}_0)$$

ناوردای بیشین است.

در حالتی که G روی Θ به طور یکتا انتقالی عمل کند، از این که $G\theta = \Theta$ و $G_\theta = \{e\}$ نتیجه گرفته می‌شود که تابع $\lambda : G \to \Theta$ با ضابطه $g \mapsto g\theta_0$ یک همسانریختی است که $\theta_0 \in \Theta$ یک نقطه ثابت است. بنا بر این اعضای گروه متناظر با اعضای فضای پارامتر Θ هستند. عمل G روی $\mathcal{X}$ باعث می‌شود که $(\Theta, *)$ نیز یک گروه باشند که عمل

دوتایی * به صورت $g_\theta g_w = g_{\theta * w}$ تعریف می‌شود. از این که $\lambda(e) = e\theta_0 = \theta_0$ مشاهده می‌شود که $e \in G$ متناظر با $\theta_0 \in \Theta$ است و از این رو اگر تعریف کنیم $g_\theta \in G$ عضو یکتای G به طوری که $g_\theta \theta_0 = \theta$، در این صورت داریم:

$$\lambda(g_\theta) = \theta,$$
$$\theta * w = g_\theta g_w \theta_0 = \lambda^{-1}(\theta)\lambda^{-1}(w)\lambda^{-1}(e).$$

بنا بر این $(\Theta,*)$ یک گروه با عضو همانی $\theta_0 = \lambda(e)$ و عضو وارون $\theta^{-1} = g_\theta^{-1}\theta_0$ است. عمل گروه روی $\mathcal{X}$ یک عمل گروه روی Θ القا می‌کند به طوری که برای هر $g_\theta \in G$، یک $\theta \in \Theta$ وجود دارد که $g_\theta w = \theta * w$.

مثال ۴-۳: در مدل مکان-مقیاس $X = \mu + \sigma Z$ که Z دارای تابع چگالی f_0 است و فضای پارامتر $\Theta = \{(\mu,\sigma) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+\}$ یک عمل گروه توسط $g_{\boldsymbol{\theta}} x = g_{(\mu,\sigma)} x = \mu + \sigma x$ تعریف می‌شود و از این رو عملگر گروه عبارت است از:

$$g_{(\mu_1,\sigma_1)} g_{(\mu_2,\sigma_2)} = \mu_1 + \sigma_1\mu_2 + \sigma_1\sigma_2 = g_{(\mu_1+\sigma_1\mu_2, \sigma_1\sigma_2)} = g_{(\mu_1,\sigma_1)*(\mu_2,\sigma_2)}.$$

مجموعه چنین تبدیلاتی بسته و دارای عضو همانی $g_{(0,1)}$ و عضو وارون $g^{-1}_{(\mu,\sigma)} = g_{(-\frac{\mu}{\sigma},\frac{1}{\sigma})}$ است و لذا

$$G = \{g_{(\mu,\sigma)} : (\mu,\sigma) \in \Theta\}$$

تشکیل یک گروه با عمل دوتایی ترکیب توابع می‌دهد. عمل گروه القایی روی Θ به صورت زیر است:

$$g_{(\mu_1,\sigma_1)}(\mu_2,\sigma_2) = (\mu_1,\sigma_1)*(\mu_2,\sigma_2) = (\mu_1 + \sigma_1\mu_2, \sigma_1\sigma_2).$$

عضو همانی و وارون گروه Θ به ترتیب

$$\theta_0 = \lambda(g_{(0,1)}) = (0,1)$$

و

$$\theta^{-1} = g^{-1}_{(\mu,\sigma)}\theta_0 = g_{(-\frac{\mu}{\sigma},\frac{1}{\sigma})}\theta_0 = (-\frac{\mu}{\sigma},\frac{1}{\sigma})$$

است. نمونه تصادفی $\mathbf{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ از این مدل را در نظر بگیرید. در این حالت $\tau(\mathbf{X}) = (\bar{X},S)$ یک براوردگر هم‌وردا است که در آن $\bar{X}$ و S^2 در مثال ۲-۴ آمده است، زیرا:

$$\tau\left(g_{(\mu,\sigma)}\boldsymbol{X}\right) = \left(\mu + \sigma\bar{X}, \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\mu + \sigma X_i - \mu - \sigma\bar{X}\right)^2}\right)$$
$$= \left(\mu + \sigma\bar{X}, \sigma S\right) = g_{(\mu,\sigma)}\tau\left(\boldsymbol{X}\right)$$

و لذا

$$f(\mathbf{X}) = g^{-1}_{\tau(\mathbf{X})}\mathbf{X} = g^{-1}_{(\bar{X},S)}\mathbf{X} = g_{(-\frac{\bar{X}}{S},\frac{1}{S})}\mathbf{X} = -\frac{\bar{X}}{S} + \frac{1}{S}\mathbf{X} = (\frac{X_1 - \bar{X}}{S}, \frac{X_n - \bar{X}}{S})$$

ناوردای بیشین است.

در نتیجه زیر آماره ناوردای بیشین بر اساس یک براوردگر هم‌وردا در حالتی که گروه روی فضای پارامتر به طور یکتا انتقالی است ساخته می‌شود.

فرع ۴-۱: فرض کنید G به طور انتقالی روی Θ عمل کند. قرار دهید $\theta_0 \in \Theta$ یک نقطه ثابت باشد و هر عضو $\theta \in \Theta$ به صورت یکتا به عنوان $g\theta_0 = \theta$ نوشته شود. تابع $\lambda : G \to \Theta$ داده شده به صورت $\lambda(g_\theta) = \theta$، G-هم‌ورداست.

برهان. تابع λ، G-هم‌ورداست، زیرا برای هر $g \in G$ و $\theta \in \Theta$،

$$\lambda(gg_\theta) = gg_\theta\theta_0 = g\theta = g\lambda(g_\theta).$$

بنا بر این λ یک دوسویی G-هم‌ورداست.

توابع هم‌وردا به‌راحتی توسط گزاره زیر به برآوردگرهای هم‌وردا تبدیل می‌شوند و برعکس.

گزاره ۴-۱: تحت فرض‌های فرع ۴-۱، فرض کنید G روی Θ به طور یکتا انتقالی عمل کند. برای یک تابع G-هم‌وردای $\tau : \mathcal{X} \to G$ یک برآوردگر هم‌وردای $\delta : \mathcal{X} \to \Theta$ داده شده توسط $\delta = \lambda \circ \tau$ وجود دارد. برعکس یک تابع G-هم‌وردای $\tau : \mathcal{X} \to G$ با ضابطه $\tau = \lambda^{-1} \circ \delta$ وجود دارد به طوری که $\delta : \mathcal{X} \to \Theta$ یک برآوردگر G-هم‌ورداست.

برهان. فرض کنید τ یک تابع G-هم‌وردا باشد. با توجه به فرع ۴-۱، تابع $\lambda : G \to \Theta$ یک تابع G-هم‌ورداست و از این رو برای هر $g \in G$ و $x \in \mathcal{X}$،

$$\begin{aligned}\delta(gx) &= \lambda(\tau(gx)) \\ &= \lambda(g\tau(x)) \\ &= g\lambda(\tau(x)) \\ &= g\delta(x).\end{aligned}$$

بنا بر این δ یک برآوردگر G-هم‌وردا خواهد بود. برعکس اگر δ یک برآوردگر G-هم‌وردا باشد، با توجه به این که برای هر $\theta \in \Theta$ و $h \in G$، $g_{h\theta} = hg_\theta$، می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $g \in G$ و $x \in \mathcal{X}$،

$$\begin{aligned}\tau(gx) &= \lambda^{-1}[\delta(gx)] \\ &= \lambda^{-1}[g\delta(x)] \\ &= g_{g\delta(x)} \\ &= gg_{\delta(x)} \\ &= g\lambda^{-1}(\delta(x)) \\ &= g\tau(x).\end{aligned}$$

بنا بر این τ یک تابع G-هم‌وردا است.

مثال۴-۴: فرض کنید $X_1,\dots,X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta,\theta^2)$ که $\theta>0$. به وضوح

$$(Z_1,Z_2)=(\bar{X},\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2)$$

برای $\theta>0$ بسنده است. فرض کنید $G=\mathbb{R}^+$ روی $\mathcal{Z}=\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ به صورت

$$g\times(Z_1,Z_2)=(gZ_1,g^2Z_2)$$

عمل می‌کند. برآوردگر G-هم‌وردای $\delta_0=\mathcal{Z}\to G$ را به صورت $\delta_0(Z_1,Z_2)=\sqrt{Z_2}$ تعریف کنید و لذا

$$f(Z_1,Z_2)=(\delta_0(Z_1,Z_2))^{-1}\times(Z_1,Z_2)=(\frac{Z_1}{\sqrt{Z_2}},1)$$

و در پی آن $h(Z_1,Z_2)=Z_1/\sqrt{Z_2}$ ناوردای بیشین است. روی G

$$\Theta=\{(\theta_1,\theta_2):\theta_1=\theta_1\theta_2=\theta^2\}$$

به طور یکتا انتقالی عمل می‌کند و عمل گروه $(g,(\theta_1,\theta_2)\mapsto(g\theta_1,g^2\theta_2))$ است و می‌توان $g_{(\theta_1,\theta_2)}$ را به عنوان عضو یکتای $g\in G$ تعریف کرد که در شرط $(g,(1,1))\mapsto(\theta_1,\theta_2)$صدق کند. بنا بر این:

$$g_{(\theta_1,\theta_2)}=\theta_1=\sqrt{\theta_2}=\theta,\lambda(g_{(\theta_1,\theta_2)})=(\theta_1,\theta_1^2).$$

همچنین $(\Theta,*)$ یک گروه است به طوری که

$$(\theta_1,\theta_2)*(w_1,w_2)=\lambda(g_{(\theta_1,\theta_2)}g_{(w_1,w_2)})=\lambda(\theta_2w_2)=(\theta_2w_2,(\theta_2w_2)^2).$$

از این که δ_0، G-هم‌ورداست توسط گزاره ۴-۱ یک براوردگر G-هم‌وردای $\delta:\mathcal{Z}\to\Theta$ وجود دارد که:

$$\begin{aligned}\delta(Z_1,Z_2)&=\lambda\left(\delta_0(Z_1,Z_2)\right)\\&=\lambda\left(\sqrt{Z_2}\right)\\&=\left(Z_1,Z_2^2\right)\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2,\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right)^2\right).\end{aligned}$$

بحث و نتیجه‌گیری

همان طور که در این مقاله مشاهده شد اصول ناوردایی با ایجاد محدودیت روی قواعد تصمیم ناوردا یا هم‌وردا اطلاعات نمونه را خلاصه می‌کنند. در این مقاله روش‌های به دست آوردن آماره ناوردای بیشین توسط توابع هم‌وردا مطرح شدند که در حالت خاص که گروه به طور یکتا انتقالی است و در اکثر مثال‌های آماری این خاصیت برقرار است، امکان گسترش توابع هم‌وردا به براوردگرهای هم‌وردا پیدا شد.

References

1. Andersson, S., 1982, Distributions of Maximal Invariants using Quotient Measures, Ann. Statist.,10(3), pp. 955-961.

2. Anderson, T. W., 2003, An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, 3rd edition, John Wiley, Hoboken, N. J.

3. Barndorff-Nielsen, O., Blaesild, P., Jensen, J. L. and Jørgensen, B., 1982, Exponential Transformation Models, Proc. Roy. Soc., London, Ser. A., 379(1776), pp. 41–65.

4. Berk, R. H., 1967, A Special Group Structure and Equivariant Estimation, Ann. Math. Statist., 38(5), pp. 1436-1445.

5. Bhowmik, J. L., and King, M. L., 2007, Maximal Invariant Likelihood Based Testing of Semi-Linear Models, Stat. Pap., 48, pp. 357-383.

6. Bondar, J. V., 1976, Borel Cross-Sections and Maximal Invariants, Ann. Statist., 4(5), pp. 866-877.

7. Deitmar, A. and Echterhoff, S., 2009, Principles of Harmonic Analysis, Springer, New York.

8. Eaton, M. L., 1983, Multivariate Statistics: A Vector Space Approach, Wiley, New York.

9. Eaton, M. L., 1989, Group Invariance Applications in Statistics, Institute of Mathematical Statistics and American Statistical Association, Hayward, California.

10. Fisher, R. A., 1973, Statistical Methods and Scientific Inference, Hafner, New York.

11. Fluch, M., 2007, First Steps in Topological Transformation Groups, Gliwice, Poland.

12. Folland, G. B., 1995, A Course in Abstract Harmonic Analysis, CRC Press, Boca Raton.

13. Fraser, D. A. S., 1966, On Sufficiency and Conditional Sufficiency, Sankhya, bf 28, pp. 145-150.

14. Hall, W. J., Wijsman, R. A. and Ghosh, J. K., 1965, The Relationship between Sufficiency and Invariance with Applications in Sequential Analysis, Ann. Math. Statist., 36, pp. 575-614.

15. Jensen, D. R., 1984, Invariant Ordering and Order Preservation, IMS Lecture Notes-Monograph Series, 5, Inequalities in Statistics and Probability, pp. 26-34.

16. Kariya, T. and Kurata, H., 2004, Generalized Least Squares, Chichester, West Sussex, Hoboken, N.J. Wiley.

17.Keifer, J., 1957, Invariance, Minimax Sequential Estimation and Continuous Time Processes, Ann. Math. Statist., 28, pp. 573-601.

18. Lehmann, E. L. and Romano, J. P., 2005, Testing Statistical Hypotheses, 3rd edition, Springer, New York.

19. Neusel, M. D., 2007, Invariant Theory, Providence, R.I. Am. Math. Soc.

20. Palais, R. S., 1960, Slices and Equivariant Imbeddings, Seminar on transformation groups, Borel, A. Annals of Mathematics Studies, 46, Princeton University, Press, pp. 101-115.

21. Peisakoff, M., 1950, Transformation Parameters, Thesis, Princeton University, Princeton, N.J.

22. Pitman, E. J. G., 1939, The Estimation of Location and Scale Parameters of Continuous Population of any Givan form, Biometrika, 39, pp. 391-421.

23. Robert, G. and Staudte, Jr, 1971, A Characterization of Invariant Loss Functions, Ann. Math. Stat., 42(4), pp. 1322-1327.

24. Robinson, D. J. S., 1995, A Course in the Theory of Groups, Springer-Verlag, New York.

25. Small, C. G., 1983, Characterization of Type from Maximal Invariant Spectra, Ann. Statist., 11(3), pp. 979-983.

26. Wijsman, R. A., 1967, Cross-Sections of Orbits and their Application to Densities of Maximal Invariants, Proc. Fifth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob., 1, Univ. of Calif. Press, pp. 389-400.

27. Wijsman, R. A., 1978, Distribution of Maximal Invariants, using Global and Local Cross-Sections, Preprint, Univ. of Illinois at Urbana-Champaign.

28. Wijsman, R. A., 1985, Proper Action in Steps, with Application to Density Ratios of Maximal Invariants, Ann. Statist., 13, pp. 395-402.

29. Wijsman, R. A., 1986, Global Cross-Sections as a Tool for Factorization of Measures and Distribution of Maximal Invariants, Sankhya A, 48, pp. 1-42.

30. Wijsman, R. A., 1990, Invariant Measures on Groups and their Use in Statistics, IMS Lecture Notes-Monograph Series, 14, Hayward, California.

31. Young, G. A. and Smith, R. L., 2005, Essentials of Statistical Inference, Cambridge, UK, New York.