Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Primary and maximal subautomata resulting from an active general fuzzy automaton

Mohammad Horry[1]

1. Department of Mathematical Sciences, Facculty of Chamran, Kerman Branch, Technical and Vocational University (TVU), Kerman, Iran.

E-mail: mhori@tvu.ac.ir

Article Info	ABSTRACT

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
8 June 2020
Revised form:
21 December 2020
Accepted:
11 January 2020
Published online:
22 November 2022

Keywords:
Fuzzy automaton;
Generator;
maximal;
Subautomaton.

Introduction

In computer science, the theory of automata or machine theory is the mathmatical stuty of computing machines and their ability to solve problems. In 1967, the fuzzy automaton was intruduced by Wee. In 2004, Doostfatemeh and Kremer developed the concept of fuzzy automaton and introduced the concept of general fuzzy automaton. In this paper, we are introduced the concepts primary and maximal subautomaton with threshold c and it is proved that any active general fuzzy automaton can be witten socially under distinct primary and maximal subautomata with threshold c.

Material and methods

In this scheme, first the active genaral fuzzy automaton is defined and then the primary and maximal subautomaton with threshold c is introduced, and then using the above definition, the subautomaton produced is introduced, then the conditions of the generated subautomata are stated.

Results and discussion

Examples of active general fuzzy automata were given to show the efficiency of the new definitions. Also, the examples given show that the definitions given are accurate.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- The conditions of a produced automaton were expressed.
- Any active general fuzzy automaton can be witten socially under distinct primary and maximal subautomata with threshold c.

How to cite: Horry, M., (2022) Primary and maximal subautomata resulting from an active general fuzzy automaton. *Mathematical Researches*, 8 (3), 68-79

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴٦-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵٤-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

زیر اتوماتاهای اولیه و ماکزیمال حاصل از یک اتوماتای فازی عمومی فعال

محمد حری[۱] ✉

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشکده شهید چمران، دانشگاه فنی و حرفه ای استان کرمان، کرمان، ایران. پست الکترونیکی: mhori@tvu.ac.ir

اطلاعات مقاله | **چکیده**

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۳/۱۹
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۱۰/۰۱
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۲۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۹/۰۱

واژه‌های کلیدی:
اتوماتای فازی،
مولد،
زیر اتوماتا،
ماکزیمال.

در این مقاله، زیر اتوماتاهای با آستانهٔ c از یک اتوماتای فازی عمومی فعال و مولد از یک اتوماتای فازی عمومی فعال تعریف خواهد شد و ارتباطات بین آن ها بررسی می شود. در ادامه زیر اتوماتاهای اولیه و ماکزیمال با آستانه c از یک اتوماتای فازی عمومی فعال تعریف خواهند شد و علاوه براین، ثابت می‌شود که هر اتوماتای فازی عمومی فعال را می‌توان به صورت اجتماعی از زیر اتوماتاهای متمایز اولیه و ماکزیمال با آستانه c نوشت.

استناد: حری، محمد؛ (۱۴۰۱). زیر اتوماتاهای اولیه و ماکزیمال حاصل از یک اتوماتای فازی عمومی فعال. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۳)، ۷۹-۶۸.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

در علوم نظری رایانه، نظریهٔ اتوماتا یا نظریهٔ ماشین‌ها، بررسی ریاضی ماشین‌های محاسبه‌گر و توانائی‌های آنها برای حل مسائل می‌باشد. در سال ۱۹۶۷ اتوماتای فازی توسط وی معرفی شد [۱]. درسال ۲۰۰۴ دوست فاطمه وکرمر مفهوم اتوماتای فازی را توسیع دادند و مفهوم اتوماتای فازی عمومی را معرفی کردند[۲].

فرض کنید S یک مجموعه و $|S|$ تعداد اعضای آن باشد و $1 \le |S| < \infty$. در این صورت نیم‌گروه یکه‌دار آزاد تولید شده توسط S با عمل کنار هم قراردادن را با علامت S^* نمایش می‌دهیم و هر عضو S^* را یک رشته می‌نامیم.

عضو همانی S^* را با Λ نمایش می‌دهیم و رشتهٔ تهی نامیده می‌شود و داریم:

$$S^* = \{a_1 a_2 ... a_n : a_i \in S\}$$

بنابراین یک رشته متعلق به S^*، دنباله‌ای به صورت $a_1 a_2 ... a_n$ می باشد که در آن $a_i \in S$.

یک زیرمجموعه از S^* را یک زبان صوری روی S گوییم و در علوم نظری رایانه، زبان‌های منظم به زیرمجموعه‌ای خاص از زبان‌های صوری گفته می‌شود. اعضای یک زبان منظم، توسط ماشین‌های حالت متناهی معین پذیرش می‌شوند و از زبان‌های منظم در طراحی زبان‌های برنامه‌نویسی استفاده می‌شود.

فرض کنید $\bullet$ یک عمل دوتایی باشد که برای هر دو عضو $a_1 a_2 ... a_n$ و $b_1 b_2 ... b_m$ از S^* به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(a_1 a_2 ... a_n) \bullet (b_1 b_2 .. b_m) = a_1 a_2 ... a_n b_1 b_2 .. b_m,$$

S^* شامل Λ نیز هست. اگر بخواهیم Λ در آن نباشد، از علامت S^+ استفاده می شود. پس $S^+ = S^* \setminus \{\Lambda\}$.

طول رشتهٔ $x \in S^*$ را با $\ell(x)$ نمایش می‌دهیم و برابر با تعداد حروف رشته x می‌باشد. بنابراین $\ell(\Lambda) = 0$.

دراین مقاله، با استفاده از [۳]، [۴]،[۵] و[۶]، زیر اتوماتاهای با آستانهٔ c از یک اتوماتای فازی عمومی فعال و مولد از یک اتوماتای فازی عمومی فعال تعریف خواهند شد. سپس زیر اتوماتاهای اولیه و ماکزیمال با آستانهٔ c از یک اتوماتای فازی عمومی فعال تعریف می‌شوند و ثابت می‌شود که هر اتوماتای فازی عمومی فعال را می‌توان به صورت اجتماعی از زیر اتوماتاهای متمایز اولیه و ماکزیمال با آستانهٔ c نوشت.

تعریف ۱: [۵] شش‌تائی $\tilde{F} = (Q, \Sigma, R, Z, \delta, \omega)$ را اتوماتای حالت متناهی فازی گوییم، هرگاه Q، Σ و Z مجموعه‌های غیرتهی متناهی باشند، $\delta : Q \times \Sigma \times Q \to [0,1]$، $R \subset Q$، $\omega : Q \to Z$، اعضا Q را حالت‌ها، اعضا Σ را الفبای ورودی، R را حالت آغازین اتوماتا، Z مجموعه الفبای خروجی، ω تابع غیرفازی خروجی و δ را تابع انتقال فازی گوییم و در این نوع اتوماتا، به هر انتقال مقدار عضویتی در فاصله $[0,1]$ تعلق می‌گیرد و این مقدار عضویت را، مقدار انتقال گوییم.

تعریف فوق در [۷]، [۸]،[۹] و[۱۰]، به عنوان تعریف اتوماتای حالت متناهی فازی در نظر گرفته شده است.

تعریف ۲: [۲] هشت‌تائی $\tilde{F} = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}, F_1, F_2)$ را اتوماتای فازی عمومی گوییم، هرگاه Q، Σ و Z مجموعه‌های غیرتهی متناهی، $\tilde{R} \subset \tilde{P}(Q)$ ، $\omega : Q \to Z$، $\tilde{\delta} : (Q \times [0,1]) \times \Sigma \times Q \to [0,1]$،

$F_1:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ ، $F_2:[0,1]^* \to[0,1]$ ، اعضا Q را حالت ها، اعضا $\sum$ را الفبای ورودی، $\widetilde{R}$ را مجموعه حالت‌های آغازین فازی، Z مجموعه الفبای خروجی، σ تابع غیر فازی خروجی، $\widetilde{\delta}$ را تابع انتقال تقویت شده، F_1 را تابع تعیین عضویت و F_2 را تابع رفع چند عضویتی گوییم. تابع F_1 برای تعیین عضویت حالت های فعال به کار می‌رود و تابع $F_1(\mu,\delta)$ توسط دو پارامتر μ و δ بدست می آید که در آن μ مقدار عضویت ما قبل بلا فصل و δ مقدار انتقال است.

در این تعریف، روندی که توسط انتقال از حالت q_i به حالت q_j روی مقدار a_k اتفاق می‌افتد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu^{t+1}(q_j)=\widetilde{\delta}((q_i,\mu^t(q_i)),a_k,q_j)=F_1(\mu^t(q_i),\delta(q_i,a_k,q_j)),$$

که مقدار عضویت حالت q_j در زمان $t+1$ توسط تابع F_1 و با استفاده از مقدار عضویت q_i در زمان t و مقدار انتقال محاسبه می‌شود.

فرض کنید $Q_{act}(t_i)$ مجموعه همه حالت‌های فعال در زمان t_i ,$i\geq 0$ باشد. آن‌گاه $Q_{act}(t_0)=\widetilde{R}$ و برای هر $i\geq 1$ ، $Q_{act}(t_i)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_{act}(t_i)=\{(q,\mu^{t_i}(q)):\exists q'\in Q_{act}(t_{i-1}),\exists a\in\Sigma,\delta(q',a,q)\in\Delta\},$$

که در آن Δ مجموعه همه مقادیر انتقال اتوماتای $\widetilde{F}$ است.

با توجه به تعریف ارائه شده، مشخص است که $Q_{act}(t_i)$ یک مجموعه فازی است. برای نشان دادن این‌که q متعلق به $Q_{act}(t_i)$ است باید بنویسیم q متعلق به دامنه $Q_{act}(t_i)$ و برای سهولت در نوشتن، به صورت $q\in Q_{act}(t_i)$ نمایش می‌دهیم.

تابع رفع چند عضویتی F_2، چند عضویتی حالت‌های فعالی مانند q_j را با استفاده از الگوریتم زیر برطرف می‌کند.

الگوریتم ۳: [۲] (روش رفع چند عضویتی)

اگر به طور هم‌زمان، چندین انتقال برای حالت فعال q_j در زمان $t+1$ موجود باشد، الگوریتم فوق یک مقدار عضویت یکتا را برای آن تعیین خواهد کرد.

۱) توسط تابع تعیین عضویت F_1، با در نظر گرفتن مقدار انتقال $\delta(q_i,a_k,q_j)$ همراه با مقدار عضویت ماقبل بلافصل متناظر $\mu^t(q_i)$، مقدار عضویتی تولید خواهد شد که v_i نامیده می‌شود.

$$v_i=\widetilde{\delta}((q_i,\mu^t(q_i)),a_k,q_j)=F_1(\mu^t(q_i),\delta(q_i,a_k,q_j)).$$

۲) این مقادیر عضویت، ممکن است برابر نباشند. بنابراین برای رفع مشکل فوق، از تابع F_2 استفاده می‌شود و نتیجهٔ به دست آمده توسط F_2 به صورت مقدار عضویت حالت فعال q_j تعیین خواهد شد. نحوهٔ تعیین مقدار عضویت حالت فعال، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\mu^{t+1}(q_j)=\underset{i=1}{\overset{n}{F_2}}[v_i]=\underset{i=1}{\overset{n}{F_2}}[F_1(\mu^t(q_i),\delta(q_i,a_k,q_j))].$$

که در آن n تعداد انتقال های همزمان در حالت فعال q_j در زمان $t+1$، $\delta(q_i, a_k, q_j)$ مقدار انتقال از حالت q_i به حالت q_j تحت الفبای ورودی a_k، $\mu^t(q_i)$ مقدار عضویت q_i در زمان t و $\mu^{t+1}(q_j)$ مقدار عضویت نهائی q_j در زمان $t+1$ است.

تعریف ۴: [۶] فرض کنید $\tilde{F} = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}, F_1, F_2)$ یک اتوماتای فازی عمومی باشد. $\tilde{F}^* = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}^*, F_1, F_2)$ را اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم-مینیمم گوییم که در آن $\tilde{\delta}^* : Q_{act} \times \Sigma^* \times Q \to [0,1]$ به صورت زیر تعریف می شود:

اگر
$$\tilde{\delta}^*((q, \mu^{t_i}(q)), \Lambda, p) = \begin{cases} 1 & , \ q = p \\ 0 & , \end{cases}$$

در غیر این‌صورت
$$\tilde{\delta}^*((q, \mu^{t_{i-1}}(q)), u_i, p) = \tilde{\delta}((q, \mu^{t_{i-1}}(q)), u_i, p), \quad \forall i, \quad i \geq 0$$

و برای هر $i \geq 1$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{\delta}^*((q, \mu^{t_{i-1}}(q)), u_i u_{i+1}, p) = \bigvee_{q' \in Q_{act}(t_i)} (\tilde{\delta}((q, \mu^{t_{i-1}}(q)), u_i, q') \wedge \tilde{\delta}((q', \mu^{t_i}(q')), u_{i+1}, p)),$$

و برای هر رشته $\omega = u_1 u_2 .. u_n$، به طور باز گشتی و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} &\tilde{\delta}^*((q, \mu^{t_0}(q)), u_1 u_2 .. u_n, p) \\ &= \vee \{ \tilde{\delta}((q, \mu^{t_0}(q)), u_1, p_1) \wedge \tilde{\delta}((p_1, \mu^{t_1}(p_1)), u_2, p_2) \wedge \ldots \wedge \\ &\tilde{\delta}((p_{n-1}, \mu^{t_{n-1}}(p_{n-1})), u_n, p) : \ p_1 \in Q_{act}(t_1), p_2 \in Q_{act}(t_2) \\ &, \ldots, \ p_{n-1} \in Q_{act}(t_{n-1}) \}, \end{aligned}$$

که در آن $Q_{act} = \{Q_{act}(t_0), Q_{act}(t_1), Q_{act}(t_2), \ldots\}$.

زیر اتوماتاهای اولیه و ماکزیمال حاصل از یک اتوماتای فازی عمومی فعال

در این بخش، مدلی برای ساختن زیر اتوماتاهای اولیه و ماکزیمال حاصل از یک اتوماتای فازی عمومی فعال بیان می‌شود.

تعریف ۱: فرض کنید $\tilde{F}^* = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}^*, F_1, F_2)$ یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم- مینیمم باشد. $\tilde{F}^*$ را یک اتوماتای فازی عمومی فعال گوییم، هرگاه

$$\forall q \in Q, \quad \exists i \in \{0,1,2,\ldots\} \ : \quad q \in Q_{act}(t_i).$$

فرض کنید $\tilde{F}^*$ یک اتوماتای فازی عمومی فعال، $q \in Q$، $x \in \Sigma^*$، $0 \leq c < 1$، $T \subseteq Q$. در این صورت $x_c(q)$، $\Sigma_c(q)$ و $\Sigma_c(T)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_c(q)=\{p\in Q:\tilde{\delta}^*((q,\mu^{t_i}(q)),x,p)>c\},$$

$$\Sigma_c(q)=\bigcup_{x\in\Sigma^*}x_c(q),$$

$$\Sigma_c(T)=\cup\{\Sigma_c(q):q\in T\}.$$

قضیهٔ ۲: فرض کنید $\tilde{F}^*=(Q,\Sigma,\tilde{R},Z,\omega,\tilde{\delta}^*,F_1,F_2)$ یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم- مینیمم فعال باشد، $p,q,r\in Q$ و $0\le c<1$. آن‌گاه

i) $q\in\Sigma_c(q)$،

ii) اگر $p\in\Sigma_c(q)$ و $q\in\Sigma_c(r)$، آنگاه $p\in\Sigma_c(r)$.

اثبات: i) داریم:

$$\tilde{\delta}^*((q,\mu^t(q)),\Lambda,q)=1>c\Rightarrow q\in\Lambda_c(q).$$

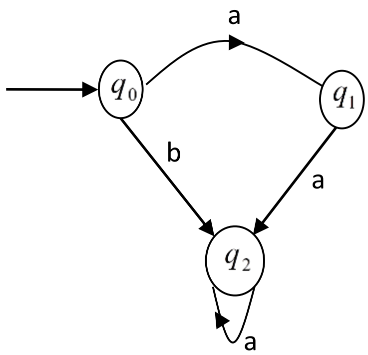
بنابراین $q\in\Sigma_c(q)$.

ii) چون $q\in\Sigma_c(r)$، بنابراین $x\in\Sigma^*$ وجود دارد به طوری که $q\in x_c(r)$. در نتیجه $\tilde{\delta}^*((r,\mu^{t_i}(r)),x,q)>c$. همچنین، چون $p\in\Sigma_c(q)$، بنابراین $y\in\Sigma^*$ وجود دارد به طوری که $p\in y_c(q)$. در نتیجه $\tilde{\delta}^*((q,\mu^{t_j}(q)),y,p)>c$. حال داریم:

$$\tilde{\delta}^*((r,\mu^{t_i}(r)),xy,p)=\bigvee_{q'\in Q_{act}(t_j)}(\tilde{\delta}((r,\mu^{t_i}(r)),x,q')\wedge\tilde{\delta}((q',\mu^{t_j}(q')),y,p))\geq$$
$$\tilde{\delta}^*((r,\mu^{t_i}(r)),x,q)\wedge\tilde{\delta}^*((q,\mu^{t_j}(q)),y,p)>c.$$

بنابراین $p\in(xy)_c(r)$. در نتیجه $p\in\Sigma_c(r)$.

مثال ۳: فرض کنید $\tilde{F}^*=(Q,\Sigma,\tilde{R},Z,\omega,\tilde{\delta}^*,F_1,F_2)$ یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم- مینیمم باشد که در شکل ۱ نمایش داده شده و جدول انتقال آن در جدول ۱ نمایش داده شده که در آن $Q=\{q_0,q_1,q_2\}$ مجموعه



شکل ۱

حالت‌ها، $\Sigma=\{a,b\}$ مجموعه الفبای ورودی، $Z=\phi$ ، ω غیر قابل اجرا، $Q_{act}(t_0)=\widetilde{R}=\{(q_0,1)\}$، $F_1(\mu,\delta)=Min(\mu,\delta)$، $c=0.1$ ، $\delta(q_0,a,q_1)=0.4$، $\delta(q_0,b,q_2)=0.5$، $\delta(q_1,a,q_2)=0.3$ و $\delta(q_2,a,q_2)=0.2$.

جدول ۱

$Q \backslash \Sigma$	a	b
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
q_1	$\{q_2\}$	ϕ
q_2	$\{q_2\}$	ϕ

اگر ورودی را $x=aa..a$ انتخاب کنیم، داریم:

$$Q_{act}(t_1)=\{(q_1,\mu^{t_1}(q_1))\},Q_{act}(t_i)=\{(q_2,\mu^{t_i}(q_2))\},\forall i\geq 2,$$

$$\mu^{t_1}(q_1)=\widetilde{\delta}((q_0,\mu^{t_0}(q_0)),a,q_1)=F_1(\mu^{t_0}(q_0),\delta(q_0,a,q_1))=F_1(1,0.4)=0.4,$$

$$\mu^{t_2}(q_2)=\widetilde{\delta}((q_1,\mu^{t_1}(q_1)),a,q_2)=F_1(\mu^{t_1}(q_1),\delta(q_1,a,q_2))=F_1(0.4,0.3)=0.3,$$

$$\mu^{t_3}(q_2)=\widetilde{\delta}((q_2,\mu^{t_2}(q_2)),a,q_2)=F_1(\mu^{t_2}(q_2),\delta(q_2,a,q_2))=F_1(0.3,0.2)=0.2,$$

$$\mu^{t_4}(q_2)=\widetilde{\delta}((q_2,\mu^{t_3}(q_2)),a,q_2)=F_1(\mu^{t_3}(q_2),\delta(q_2,a,q_2))=F_1(0.2,0.2)=0.2,$$

$$\mu^{t_i}(q_2)=0.2,\forall i\geq 5,$$

$$\widetilde{\delta}^*((q_0,\mu^{t_0}(q_0)),\Lambda,q_0)=1>c\Rightarrow q_0\in\Lambda_c(q_0)\Rightarrow q_0\in\Sigma_c(q_0),$$

$$\widetilde{\delta}^*((q_1,\mu^{t_1}(q_1)),\Lambda,q_1)=1>c\Rightarrow q_1\in\Lambda_c(q_1)\Rightarrow q_1\in\Sigma_c(q_1),$$

$$\widetilde{\delta}^*((q_0,\mu^{t_0}(q_0)),a,q_1)=0.4>c\Rightarrow q_1\in a_c(q_0)\Rightarrow q_1\in\Sigma_c(q_0),$$

$$\widetilde{\delta}^*((q_0,\mu^{t_0}(q_0)),aa,q_2)=0.4\wedge 0.3=0.3>c\Rightarrow q_2\in(aa)_c(q_0)\Rightarrow q_2\in\Sigma_c(q_0),$$

$$\widetilde{\delta}^*((q_0,\mu^{t_0}(q_0)),aaa,q_2)=0.4\wedge 0.3\wedge 0.2=0.2>c\Rightarrow q_2\in\Sigma_c(q_0),$$

$$\widetilde{\delta}^*((q_0,\mu^{t_0}(q_0)),a^n,q_2)=0.2>c,\forall n\geq 4\Rightarrow q_2\in\Sigma_c(q_0),$$

$$\widetilde{\delta}^*((q_1,\mu^{t_1}(q_1)),a,q_2)=0.3>c\Rightarrow q_2\in\Sigma_c(q_1).$$

قضیهٔ ۴: فرض کنید $\widetilde{F}^*=(Q,\Sigma,\widetilde{R},Z,\omega,\widetilde{\delta}^*,F_1,F_2)$ یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم- مینیمم فعال باشد، $T,T_1,T_2\subseteq Q$ و $0\leq c<1$. آن‌گاه

i) $T \subseteq \Sigma_c(T)$،

ii) اگر $T_1 \subseteq T_2$ ، آنگاه $\Sigma_c(T_1) \subseteq \Sigma_c(T_2)$،

iii) $\Sigma_c(\Sigma_c(T)) = \Sigma_c(T)$،

iv) $\Sigma_c(T_1 \bigcup T_2) = \Sigma_c(T_1) \bigcup \Sigma_c(T_2)$،

v) $\Sigma_c(T_1 \bigcap T_2) \subseteq \Sigma_c(T_1) \bigcap \Sigma_c(T_2)$.

اثبات: i) فرض کنید $q \in T$. چون $q \in \Sigma_c(q)$، در نتیجه $q \in \Sigma_c(q) \subseteq \Sigma_c(T)$. بنابراین $T \subseteq \Sigma_c(T)$.

ii) فرض کنید $p \in \Sigma_c(T_1)$. بنابراین $q \in T_1$ وجود دارد به طوری که $p \in \Sigma_c(q)$. چون $T_1 \subseteq T_2$، بنابراین $q \in T_2$ و $p \in \Sigma_c(q)$. در نتیجه $p \in \Sigma_c(T_2)$. بنابراین $\Sigma_c(T_1) \subseteq \Sigma_c(T_2)$.

iii) طبق قسمت (i)، داریم $\Sigma_c(T) \subseteq \Sigma_c(\Sigma_c(T))$.

فرض کنید $p \in \Sigma_c(\Sigma_c(T))$. بنابراین $q \in \Sigma_c(T)$ وجود دارد به طوری که $p \in \Sigma_c(q)$. در نتیجه $r \in T$ وجود دارد به طوری که $q \in \Sigma_c(r)$. حال چون $p \in \Sigma_c(q)$ و $q \in \Sigma_c(r)$، طبق قسمت (ii)، نتیجه می‌شود $p \in \Sigma_c(r)$. بنابراین $p \in \Sigma_c(T)$ و در نتیجه $\Sigma_c(\Sigma_c(T)) \subseteq \Sigma_c(T)$.

اثبات قسمت‌های (iv) و (v) به طور مشابه صورت می‌گیرند.

مثال بعد، نمونه‌ای است که نشان می‌دهد تساوی در قسمت (v) قضیه قبل برقرار نیست.

مثال ۵: فرض کنید $\tilde{F}^* = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}^*, F_1, F_2)$ اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم- مینیمم در مثال ۳ باشد، $T_1 = \{q_0\}$ و $T_2 = \{q_1\}$. حال داریم:

$$\Sigma_c(T_1) = \{q_0, q_1, q_2\},$$

$$\Sigma_c(T_2) = \{q_1, q_2\},$$

$$\Sigma_c(T_1) \bigcap \Sigma_c(T_2) = \{q_1, q_2\},$$

$$\Sigma_c(T_1 \bigcap T_2) = \phi.$$

بنابراین در مثال فوق داریم $\Sigma_c(T_1 \bigcap T_2) \subsetneq \Sigma_c(T_1) \bigcap \Sigma_c(T_2)$.

تعریف ۶: فرض کنید $\tilde{F}^* = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}^*, F_1, F_2)$ یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم- مینیمم فعال باشد، $T \subseteq Q$، $0 \le c < 1$ و $\tilde{F}^{*\prime} = (T, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}^{*\prime}, F_1, F_2)$. در این صورت $\tilde{F}^{*\prime}$ را یک زیر اتوماتا با آستانهٔ c از $\tilde{F}^*$ گوییم هرگاه $\Sigma_c(T) \subseteq T$ به طوری که $\tilde{\delta}^{*\prime}$ تحدید از $\tilde{\delta}^*$ روی $T \times \Sigma^* \times (Q_{act})_{\tilde{F}^*}$ می‌باشد.

مثال ۷: فرض کنید $\tilde{F}^* = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}^*, F_1, F_2)$ یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم- مینیمم فعال باشد، $T \subseteq Q$، $0 \le c < 1$.

حال چون $\Sigma_c(\Sigma_c(T))=\Sigma_c(T)$، درنتیجه $L=(\Sigma_c(T),\Sigma,\widetilde{R},Z,\omega,\widetilde{\delta}^{*\prime},F_1,F_2)$ یک زیراتوماتا با آستانهٔ c از $\widetilde{F}^*$ می‌باشد به طوری که $\widetilde{\delta}^{*\prime}$ تحدید از $\widetilde{\delta}^*$ روی $(Q_{act})_L\times\sum^*\times\Sigma_c(T)$ می‌باشد.

قضیهٔ ۸: فرض کنید $\widetilde{F}^*=(Q,\Sigma,\widetilde{R},Z,\omega,\widetilde{\delta}^*,F_1,F_2)$ یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم- مینیمم فعال باشد، $0\le c<1$، $\widetilde{F}_i^*=(T_i,\Sigma,\widetilde{R},Z,\omega,\widetilde{\delta}_i^*,F_1,F_2)$ خانواده‌ای از زیر اتوماتاهای با آستانهٔ c از $\widetilde{F}^*$ باشند به طوری که $\widetilde{\delta}_i^*$ تحدید از $\widetilde{\delta}^*$ روی $(Q_{act})_{\widetilde{F}_i^*}\times\sum^*\times T_i$ است و $T_i\subseteq Q$ برای هر $i\in I$. آن‌گاه

i) $\bigcap_{i\in I}\widetilde{F}_i^*=(\bigcap_{i\in I}T_i,\Sigma,\widetilde{R},Z,\omega,\bigcap_{i\in I}\widetilde{\delta}_i^*,F_1,F_2)$ یک زیر اتوماتا با آستانهٔ c از $\widetilde{F}^*$ است،

ii) $\bigcup_{i\in I}\widetilde{F}_i^*=(\bigcup_{i\in I}T_i,\Sigma,\widetilde{R},Z,\omega,\widetilde{\delta}_i^{*\prime},F_1,F_2)$ یک زیر اتوماتا با آستانهٔ c از $\widetilde{F}^*$ است به طوری که $\widetilde{\delta}^{*\prime}$ تحدید از $\widetilde{\delta}^*$ روی $(Q_{act})_{\bigcup_{i\in I}\widetilde{F}^{*\prime}}\times\sum^*\times\bigcup_{i\in I}T_i$ می‌باشد.

اثبات: i) چون $\widetilde{\delta}_i^*$ تحدید از $\widetilde{\delta}^*$ روی $(Q_{act})_{\widetilde{F}_i^*}\times\sum^*\times T_i$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$(\bigcap_{i\in I}\widetilde{\delta}_i^*)((q,\mu^t(q)),x,p)=\bigwedge_{i\in I}\widetilde{\delta}_i^*((q,\mu^t(q)),x,p)=\widetilde{\delta}^*((q,\mu^t(q)),x,p).$$

همچنین چون $\Sigma_c(T_i)\subseteq T_i$، در نتیجه داریم:

$$\Sigma_c(\bigcap_{i\in I}T_i)\subseteq\bigcap_{i\in I}\Sigma_c(T_i)\subseteq\bigcap_{i\in I}T_i.$$

بنابراین $\bigcap_{i\in I}\widetilde{F}_i^*$ یک زیر اتوماتا با آستانهٔ c از $\widetilde{F}^*$ می‌باشد.

ii) چون $\Sigma_c(T_i)\subseteq T_i$، در نتیجه داریم:

$$\Sigma_c(\bigcup_{i\in I}T_i)=\bigcup_{i\in I}\Sigma_c(T_i)\subseteq\bigcup_{i\in I}T_i.$$

بنابراین $\bigcup_{i\in I}\widetilde{F}_i^*$ یک زیر اتوماتا با آستانهٔ c از $\widetilde{F}^*$ می‌باشد.

تعریف ۹: فرض کنید $\widetilde{F}^*=(Q,\Sigma,\widetilde{R},Z,\omega,\widetilde{\delta}^*,F_1,F_2)$ یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم- مینیمم فعال باشد، $T\subseteq Q$، $0\le c<1$ و $\{L_i:i\in I\}$ خانواده‌ای از همه زیر اتوماتاهای با آستانهٔ c از $\widetilde{F}^*$ باشد که مجموعه حالت-های آنها شامل T است. زیر اتوماتای تولید شده توسط T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$<T>=\bigcap\{L_i:i\in I\}.$$

قضیهٔ ۱۰: فرض کنید $\widetilde{F}^*=(Q,\Sigma,\widetilde{R},Z,\omega,\widetilde{\delta}^*,F_1,F_2)$ یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم- مینیمم فعال، $T\subseteq Q$، $0\le c<1$ و $L=(\Sigma_c(T),\Sigma,\widetilde{R},Z,\omega,\widetilde{\delta}^{*\prime},F_1,F_2)$ به طوری که $\widetilde{\delta}^{*\prime}$ تحدید از $\widetilde{\delta}^*$ روی $(Q_{act})_L\times\sum^*\times\Sigma_c(T)$ است. آن‌گاه $<T>=L$.

اثبات: فرض کنید $\{L_i:i\in I\}$ خانواده‌ای از همه زیر اتوماتاهای با آستانه c از $\widetilde{F}^*$ باشد که مجموعه حالت‌های آنها شامل T است که در آن $L_i=(T_i,\Sigma,\widetilde{R},Z,\omega,\widetilde{\delta}_i^*,F_1,F_2)$. بنابراین داریم:

$$<T>=(\bigcap_{i\in I}T_i,\Sigma,\widetilde{R},Z,\omega,\bigcap_{i\in I}\widetilde{\delta}_i^*,F_1,F_2).$$

کافی است نشان دهیم $\Sigma_c(T)=\bigcap_{i\in I}T_i$.

چون $L=(\Sigma_c(T),\Sigma,\widetilde{R},Z,\omega,\widetilde{\delta}^{*\prime},F_1,F_2)$ یک زیر اتوماتا با آستانهٔ c از $\widetilde{F}^*$ می‌باشد که $T\subseteq\Sigma_c(T)$، در نتیجه $\Sigma_c(T)\supseteq\bigcap_{i\in I}T_i$.

فرض کنید $p\in\Sigma_c(T)$. بنابراین $q\in T$ وجود دارد به طوری که $p\in\Sigma_c(q)$. حال چون $T_i\supseteq T$ برای هر $i\in I$ در نتیجه $q\in\bigcap_{i\in I}T_i$. حال چون $<T>$ یک زیر اتوماتای با آستانه c از $\widetilde{F}^*$ می باشد، در نتیجه $\Sigma_c(\bigcap_{i\in I}T_i)\subseteq\bigcap_{i\in I}T_i$ بنابراین داریم:

$$p\in\Sigma_c(q)\subseteq\Sigma_c(\bigcap_{i\in I}T_i)\subseteq\bigcap_{i\in I}T_i.$$

در نتیجه $\Sigma_c(T)\subseteq\bigcap_{i\in I}T_i$. بنابراین $\Sigma_c(T)=\bigcap_{i\in I}T_i$.

تعریف ۱۱: فرض کنید $\widetilde{F}^*=(Q,\Sigma,\widetilde{R},Z,\omega,\widetilde{\delta}^*,F_1,F_2)$ یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم- مینیمم فعال باشد، $0\le c<1$ و L یک زیر اتوماتا با آستانه c از $\widetilde{F}^*$ باشد.

i) L را یک زیر اتوماتای اولیه با آستانه c از $\widetilde{F}^*$ گوییم، هرگاه $q\in Q$ موجود باشد به طوری که $L=<q>$،

ii) فرض کنید L یک زیر اتوماتای اولیه با آستانه c از $\widetilde{F}^*$ باشد. گوییم L یک زیر اتوماتای ماکزیمال با آستانه c از $\widetilde{F}^*$ است، هرگاه $L\neq\widetilde{F}^*$ و $L\subseteq<p>$ برای هر $p\in Q$ نتیجه دهد که $L=<p>$.

قضیهٔ ۱۲: فرض کنید $\widetilde{F}^*=(Q,\Sigma,\widetilde{R},Z,\omega,\widetilde{\delta}^*,F_1,F_2)$ یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم- مینیمم فعال باشد، $0\le c<1$ و $\tau=\{L_1,L_2,\ldots,L_n\}$ مجموعه تمام زیر اتوماتاهای متمایز اولیه و ماکزیمال با آستانه c از $\widetilde{F}^*$ باشد. آن‌گاه

i) $\widetilde{F}^*=\bigcup_{i=1}^{n}L_i$،

ii) $\widetilde{F}^*\neq\bigcup_{i=1,i\neq j}^{n}L_i$ برای هر $j\in\{1,2,\ldots,n\}$.

اثبات: i) فرض کنید $q_0\in Q$. چون Q متناهی می باشد، در نتیجه یا $<q_0>\in\tau$ یا عدد صحیح k موجود است به طوری که $<q_0>\subset<q_k>$ و $<q_k>\in\tau$. بنابراین $Q=\bigcup_{i=1}^{n}\Sigma_c(p_i)$ که در آن $L_i=<p_i>$ برای $i=1,2,\ldots,n$ در نتیجه $\widetilde{F}^*=\bigcup_{i=1}^{n}L_i$.

ii) فرض کنید $\mathrm{M}=\bigcup_{i=1,i\neq j}^{n}L_i$ و $L_j=<p_j>$. اگر $p_j\in\bigcup_{i=1,i\neq j}^{n}\Sigma_c(p_i)$، آنگاه $p_j\in\Sigma_c(p_i)$ برای $i\neq j$. در نتیجه $L_j=<p_j>\subset L_i=<p_i>$ و $L_j\neq L_i$ که با ماکزیمال بودن L_j در تناقض است. در نتیجه $p_j\notin\bigcup_{i=1,i\neq j}^{n}\Sigma_c(p_i)$. بنابراین $\widetilde{F}^*\neq\mathrm{M}$.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، مدلی برای ساختن زیر اتوماتاهای اولیه و ماکزیمال با آستانهٔ c از یک اتوماتای فازی عمومی فعال بیان شد. در ابتدا زیر اتوماتاهای با آستانهٔ c از یک اتوماتای فازی عمومی فعال و مولد از یک اتوماتای فازی عمومی فعال

تعریف شد و ارتباطات بین آنها بررسی شد و در ادامه زیر اتوماتاهای اولیه و ماکزیمال با آستانۀ c از یک اتوماتای فازی عمومی فعال تعریف شد و ثابت شد که هر اتوماتای فازی عمومی فعال را می توان به صورت اجتماعی از زیر اتوماتاهای متمایز اولیه و ماکزیمال با آستانۀ c نوشت.

References

1. Wee, W.G., "On generalization of adaptive algorithm and application of the fuzzy sets concept to pattern classification", Ph.D. dissertation Purdue University, IN (1967).

2. Doostfatemeh, M., Kremer, S.C., "New directions in fuzzy automata", International Journal of Approximate Reasoning, 38 (2005) 175-214.

3. Horry, M., Zahedi, M.M., "Fuzzy subautomata of an invertible general fuzzy automaton", Annals of fuzzy sets, fuzzy logic and fuzzy systems, 2 (2013) 29-47.

4. Jine, J., Li, Q. , Li, Y., " Algebric properties of L-fuzzy finite automata", Information Sciences, 234 (2013) 191-208.

5. Mordeson, J.N., Malik, D.S., "Fuzzy automata and languages, theory and applications", London: Chapman and Hall (2002).

6. Zahedi, M.M., Horry M. and Abolpor, KH. , "Bifuzzy (General) topology on max-min general fuzzy automata", Advanced in Fuzzy Mathematics, 3 (2008) 51-68.

7. Omlin, W., Giles, K. K., Thornber, K. K., "Equivalence in knowledge representation: automata, rnns, and dynamic fuzzy systems", Proc. IEEE, 87(9) (1999) 1623–1640.

8. Omlin, W., Giles, K. K., Thornber, K. K., " Fuzzy finite-state automata can be deterministically encoded into recurrent neural networks", IEEE Trans. Fuzzy Syst. 5(1)(1998) 76–89.

9. Malik, D. S., Mordeson, J. N., Sen, M. K., "On subsystems of fuzzy finite state machines",Fuzzy Sets and Systems, **68** (1994), 83–92.

10. Mizumoto, M., Tanaka, J., Tanaka, K., "Some consideration on fuzzy automata", J. Compute. Systems Sci. **3** (1969) 409–422.