Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Automorphism Group of Power Graphs of Finite Groups

Sayyed Heidar Jafari[1]

1. Faculty of Mathematical Sciences, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

E-mail: shjafari@shahroodut.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
9 November 2019
Revised form:
15 December 2020
Accepted:
22 December 2020
Published online:
22 November 2022

Keywords:
Power graph; automorphism group; abelian group; nilpotent group.

ABSTRACT

Introduction

The directed power graph of a semigroup S was defined by Kelarev and Quinn as the digraph $\Gamma(S)$ with vertex set S, in which there is an arc from x to y if and only if $x^m = y$ or $y = x^m$ for some positive integer m. Motivated by this, Chakrabarty et al. defined the (undirected) power graph $\Gamma(S)$, in which distinct x and y are joined if one is a power of the other. The concept of power graphs has been studied extensively by many authors.

Let Γ be a graph. We denote $V(\Gamma)$ and $E(\Gamma)$ for vertices and edges of Γ, respectively.

The (open) neighborhood $N(a)$ of vertex $a \in V(\Gamma)$ is the set of vertices adjacent to a. Also the closed neighborhood of a, $N[a] = N(a) \cup \{a\}$.

Throughout this paper, all groups and graphs are assumed to be finite and the following

notation is used: $Aut(G)$ denotes the group of automorphisms of G; Z_m the cyclic group of

order m; $Z_m{}^n$ the direct product of n copies of Z_m.

Results and discussion

The power graph of a group is the graph whose vertex set is the set of nontrivial elements of the group and two elements are adjacent if one is a power of the

other. We introduce some ways to find the automorphism groups of some graphs. Let L be a graph and

$\bar{x} = \{y \in V(L) \mid N[y] = N[x]\}$.

We define the weighted graph L as follows:

$V(\bar{L}) = \{\bar{x} \mid x \in V(L)\}$, $weight(x) = |\bar{x}|$,

And two vertices $\bar{x}$ and $\bar{y}$ are adjacent if x and y are adjacent in L. As an application, we describe the automorphism group of the power graph of a finite group G as:

$$Aut(P(G)) \cong Aut(\overline{P(G)}) \ltimes \prod_{\bar{x} \in V(\overline{P(G)})} S_{|\bar{x}|}.$$

Let G be a finite nilpotent group, $|G| = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_t^{n_t}$ and $G \cong P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_t$ where $|P_i| = p_i^{n_i}$ .We obtain the automorphism group of the power graph of abelian and

nilpotent groups by their sylow subgroups which is:

$$Aut(P(G)) \cong (Aut(\overline{P(P_1)}) \times Aut(\overline{P(P_2)}) \times \cdots \times Aut(\overline{P(P_t)})) \ltimes \prod_{\bar{x} \in V(\overline{P(G)})} S_{|\bar{x}|}.$$

Finally, we calculate the automorphism group of the power graph of homocyclic group $G \cong (Z_{p^m})^n$, $n > 1$ as:

$$Aut(P(G)) \cong ((\cdots(S_{k_m} \wr \cdots) \wr S_{k_2}) \wr S_{k_1}) \ltimes (\prod_{i=1}^{m} (S_{(p^i - p^{i-1})})^{r_i}),$$

How to cite: Jafari, H., (2022) Automorphism Group of Power Graphs of Finite Groups. *Mathematical Researches*, 8 (3), 56-67

شاپا چاپی: ۲۰۸۸-۲۰٤٦
شاپا الکترونیکی: ۲۰۸۸-۲۰۵٤

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

گروه خودریختی گراف توانی گروه‌های متناهی

سید حیدر جعفری[۱] ✉

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران. پست الکترونیکی: Jahangiri@khu.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۸/۱۸
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۹/۲۵
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۰۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۹/۰۱

واژه‌های کلیدی:
گراف توانی،
گروه خودریختی،
گروه آبلی،
پوچ‌توان.

چکیده

گراف توانی یک گروه گرافی است با مجموعه راس‌های عناصر نابدیهی گروه، و دو رأس مجاور هستند اگر و تنها اگر یکی توانی از دیگری باشد. در این مقاله ابتدا روشی کلی برای محاسبهٔ گروه خودریختی گراف‌ها ارائه می‌دهیم. سپس با استفاده از این قضایا توصیفی برای گروه خودریختی‌های گراف توانی به دست می‌آوریم. همچنین گروه خودریختی گراف توانی گروه‌های آبلی و پوچ‌توان را برحسب سیلو زیرگروه‌های آنها محاسبه می‌کنیم. در انتها گروه خودریختی گراف توانی گروه‌های همودوری را به طور دقیق به دست می‌آوریم.

استناد: جعفری، سید حیدر؛ (۱۴۰۱). گروه خودریختی گراف توانی گروه‌های متناهی. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۳)، ۶۷-۵۶.

۱.مقدمه

گراف توانی جهت‌دار نیم گروه S اولین بار توسط کلارف و کویین در [۷] به صورت زیر تعریف شد. آنها مجموعه راس ها را S در نظر گرفتند و راس x را با یک یال جهت‌دار به راس y وصل کردند درصورتی که $x \neq y$ و y توانی از x باشد. چاکرابارتی و همکارانش در [۶] گراف توانی را تعریف کردند. برای مطالعه تاریخچه‌ای از گراف‌های توانی می‌توان به [۲ و ۵-۱۰] مراجع کرد.

فرض کنیم L یک گراف به ترتیب با مجموعهٔ رأس‌ها و مجموعهٔ یال‌های $V(L)$ و $E(L)$ باشد. ما علامت $a-b$ را برای مجاورت a و b به کار می‌بریم. همچنین برای زیرگراف H از L و $a \in V(H)$، نماد $H-a$ را برای زیرگراف تولید شده با راس‌های $V(H)-a$ استفاده می‌کنیم. همسایگی باز a که با $N(a)$ نمایش می‌دهیم مجموعهٔ همهٔ همسایه‌های a است. $N(a)\bigcup\{a\}$ را همسایگی بسته a می‌نامیم و با $N[a]$ نشان می‌دهیم. همچنین گروه خودریختی گروه یا گراف G را با $Aut(G)$ و گروه دوری از مرتبهٔ n را با Z_n نشان می‌دهیم.

تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد. گراف توانی G که با $P(G)$ نمایش می‌دهیم گرافی است که رأس‌های آن همه عناصر G، و دو رأس مجاورند اگر یکی توان مثبتی از دیگری باشد.

تنها گروه‌هایی که گراف توان آنها شامل حداقل یک عنصر نابدیهی هستند که با همه عناصر G مجاورند گروه‌های دوری یا کواترنیون تعمیم یافته هستند و دربقیه گروه‌های متناهی عضو همانی تنها عنصری است که با همه مجاور است، و تأثیری در محاسبهٔ گروه خودریختی‌ها ندارد. لذا در این مقاله عنصر همانی را کنار می‌گذاریم و همه جا $P(G)$ را بدون عضو همانی در نظر می‌گیریم.

در این مقاله ابتدا قضایایی کلی برای محاسبهٔ گروه خودریختی گراف‌ها ارائه می‌دهیم. سپس با استفاده از این قضایا توصیفی برای گروه خودریختی‌های گراف توانی به دست می‌آوریم. در انتها راهی برای محاسبهٔ گروه خودریختی گراف توانی گروه‌های آبلی، همودوری و پوچ‌توان ارائه می دهیم.

۲. گروه خودریختی گراف‌ها

در این بخش راه‌هایی را برای محاسبهٔ گروه خودریختی گراف‌ها ارائه می‌دهیم. تابع f از مجموعهٔ رأس‌ها و یال‌های دو گراف L_1 و L_2 را یک خودریختی گرافی می نامیم هرگاه f یک تناظر دوسویی بین رأس‌های L_1 و L_2 و یک تناظر دوسویی بین یال های L_1 و L_2 برقرار کند طوری که مجاورت‌ها و عدم مجاورت‌ها را حفظ کند.

زیرمجموعه K از $V(L)$ را یک M- مجموعه می‌نامیم در صورتی که هر دو عضو K دارای همسایگی‌های بسته یکسان باشند و K با این ویژگی‌ها مجموعهٔ ماکزیمال باشد. در این صورت برای $x \in V(K)$، K را با $\bar{x}$ نمایش می‌دهیم. گراف وزنی $\bar{L}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$V(\bar{L})=\{\bar{a} \mid a \in V(L)\}$ و دو رأس $\bar{a}$ و $\bar{b}$ مجاورند اگر و تنها اگر a و b در L مجاور باشند و وزن $\bar{a}$ را برابر $|\bar{a}|$ تعریف می‌کنیم.

همچنین خودریختی گراف‌های وزنی را طوری در نظر می‌گیریم که وزن‌ها را نیز حفظ کند. در ادامهٔ قضیه‌ای از [۴] که در ادامه استفادهٔ زیادی از آن خواهیم کرد را به صورت کامل می‌آوریم.

قضیهٔ ۲. ۱. ([۴] قضیه ۲. ۲) برای گراف متناهی L،

$$Aut(L) \cong Aut(\bar{L}) \ltimes \prod_{B \in V(\bar{L})} S_{|B|},$$

که در آن "$\ltimes$" همان ضرب نیم مستقیم گروه‌ها است.

با توجه به اثبات قضیهٔ در مقاله فوق $Aut(\bar{L}) = \{\bar{f} \mid f \in Aut(L)\}$ که در آن برای هر $x \in V(L)$ و $f \in Aut(L)$، $\bar{f}(\bar{x}) = \overline{f(x)}$.

فرض کنیم L و K دو گراف با رأس‌های مجزا باشند. در این صورت $L \cup K$ گرافی است که رأس‌های آن اجتماع رأس‌های L و K است و مجموعه یال های آن نیز اجتماع یال های L و یال های K است. در ادامه قضیه‌ای از ژوردان که استفاده زیادی در این مقاله دارد را می‌آوریم.

قضیهٔ ۲. ۲. (قضیهٔ ژوردان) فرض کنیم $L = L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_t$ یک گراف متناهی باشد، L_iها همبند باشند و $L_1 \cong L_2 \cong \cdots \cong L_t$. در این صورت

$$Aut(L) \cong Aut(L_1) \wr S_t,$$

که در آن "$\wr$" همان ضرب حلقوی گروه‌ها است.

۳. گروه خودریختی گراف‌های توانی گروه‌های متناهی

در این بخش گروه خودریختی ضرب گروه های متناهی و گروه های پوچتوان را توصیف می کنیم.

با استفاده از قضیهٔ ۲ . ۱، قضیهٔ زیر به دست می‌آید که مشابه قضیهٔ اصلی فنگ و همکارانش در [۵] است.

قضیهٔ ۳. ۱. برای گروه متناهی G،

$$Aut(P(G)) \cong Aut(\overline{P(G)}) \ltimes \prod_{\bar{x} \in V(\overline{P(G)})} S_{|\bar{x}|}.$$

مجموعهٔ همهٔ مولدهای گروه دوری $\langle a \rangle$ را با T_a نمایش می‌دهیم. در ادامه چند نتیجه زیر را که نقش پر رنگی در اثبات قضایای اصلی دارند را به صورت مستقیم از [۳] می‌آوریم.

لم ۳. ۲. ([۳]، گزاره ۲. ۸) فرض کنیم G یک گروه باشد و $a \in G$. در این صورت اگر $|C_G(a)|$ توانی از یک عدد اول نباشد آن‌گاه T_a یک M -مجموعه در $P(G)$ است.

لم ۳. ۳. ([۳]، گزاره ۲. ۹) فرض کنیم $\langle a \rangle$ زیرگروه دوری ماکزیمال گروه متناهی G باشد. دراین صورت اگر $C_G(a) \neq \langle a \rangle$، آنگاه برای هر $b \in \langle a \rangle$، T_b یک M- مجموعه است.

با اثباتی مشابه لم فوق در [۴]، لم زیر را داریم.

لم ۳. ۴. فرض کنیم a عنصری از مرتبه توانی از یک عدد اول p در باشد. دراین صورت اگر $C_G(a)$ شامل حداقل دو زیرگروه p-عضوی باشد آن‌گاه برای هر $b \in \langle a \rangle$ که $o(b) < o(a)$، T_b یک M-مجموعه است.

در لم بعدی فرم اصلاح شده قضیهٔ ۲. ۱۰ را با اثبات می‌آوریم.

لم ۳. ۵. ([۳]، قضیهٔ ۲. ۱۰) فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت K یک M-مجموعه در $P(G)$ است اگر و تنها اگر K در یکی از شرایط زیر صدق کند:

الف) برای عنصری مانند a، $K = T_a$

ب) برای زیر گروهی دوری ماکزیمال از مرتبه p^n مانند $\langle a \rangle$، $K = \langle a \rangle - \langle a^{p^t} \rangle$، که در آن $1 < t \leq n$، $N[a^{p^{t-1}}] = \langle a \rangle$ و $N[a^{p^t}] \neq \langle a \rangle$.

برهان. فرض کنیم K یک M-مجموعه باشد که در شرط الف صدق نکند و $b \in K$ از مرتبه ماکزیمم باشد. بنا بر لم ۳. ۲، $o(b)$ توانی از یک عدد اول مانند p است و در نتیجه $b^p \neq 1$ و $b^p \in K$. بنابر لم‌های ۳. ۲ و ۳. ۴، $C(b)$ p-گروهی است که فقط یک زیرگروه دوری از مرتبهٔ p دارد. در نتیجه $C(b)$ یا p-گروه دوری است یا با گروه کواترنیون تعمیم یافته یکریخت است. اگر $C(b)$ با گروه کواترنیون تعمیم یافته یکریخت باشد آن‌گاه b باید عضو مرکزی نابدیهی $C(b)$ باشد که عضوی از مرتبهٔ ۲ است که با انتخاب b تناقض دارد. پس $C(b)$ دوری است. حال فرض کنیم a عنصری از مرتبه ماکزیمم در $N[b]$ باشد. پس $b \in \langle a \rangle$. از اینجا $C(b) = \langle a \rangle$. از لم ۳. ۴، نتیجه می‌شود که $C(a) = \langle a \rangle$. در نتیجه $N[a] = N[b]$ و از این‌رو $a \in K$. پس $\langle b \rangle$ زیرگروه دوری ماکزیمال است. بقیه اثبات مشابه [۳] است.

لم ۳. ۶. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $a,b \in G - \{1\}$. در این صورت اگر $\bar{a}$ در شرط لم ۳. ۵ (ب) صدق کند و $\bar{b} \in N(\bar{a})$ آنگاه $\bar{b}$ در شرط لم ۳. ۵ (الف) صدق می‌کند.

برهان. فرض کنیم $o(b) < o(a)$ و $\bar{b}$ در شرط لم ۳. ۵ (الف) صدق نکند. بنا بر لم قبل $\bar{a} = \langle a_1 \rangle - \langle a_1^{p^t} \rangle$ و $\bar{b} = \langle b_1 \rangle - \langle b_1^{q^s} \rangle$، که در آن $\langle a_1 \rangle$ و $\langle b_1 \rangle$ دوری ماکزیمال هستند. اما باید $b_1 \in N[a_1]$ و در نتیجه $b_1 \in \langle a_1 \rangle$ که با دوری ماکزیمال بودن $\langle b_1 \rangle$ تناقض است. ■

تبصره. فرض کنیم m و n دو عدد طبیعی باشند و $m \mid n$. در این صورت $\varphi(m) \leq \varphi(n)$ (تابع φ اویلر). به علاوه تساوی زمانی برقرار است که m عددی فرد باشد و $n = 2m$.

با استفاده از لم‌های بالا و تبصره فوق نتیجهٔ زیر را داریم.

نتیجهٔ ۳. ۷. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $x \in G$. اگر x در یک M-مجموعه با ویژگی لم ۳. ۴ (ب) قرار نگیرد آن‌گاه هر خودریختی گرافی $f \in P(G)$ مرتبه x را حفظ می‌کند یعنی $o(x) = o(f(x))$.

برهان. فرض کنیم f یک خودریختی گرافی $P(G)$ باشد و x در یک M-مجموعه با ویژگی لم ۳. ۵ (ب) قرار نداشته باشد. در این صورت اگر $b \in N[a]$ و $\bar{b}$ در شرط لم۳. ۵ (ب) صدق کند آن‌گاه برای زیر گروهی دوری از

مرتبهٔ p^n مانند $\langle a\rangle$، $\bar{b}=\langle a\rangle-\langle a^{p^t}\rangle$، که در آن $N[a^{p^{t-1}}]=\langle a\rangle$ و $N[a^{p^t}]\neq\langle a\rangle$. از لم‌های ۳. ۲، ۳. ۳ و ۳. ۵ $\langle a\rangle$ یک زیر گروه دوری ماکزیمال است. در نتیجه $x\in\langle a\rangle$. فرض کنیم $o(x)=p^s$ که $s\leq t$. حال

$$|\bar{x}|=p^{s-1}(p-1)<p^{n-1}(p-1)=p^n-p^{n-1}\leq p^n-p^t=|\bar{b}|.$$

درنتیجه اگر $|\bar{x}|<|\bar{b}|$ آنگاه $b\in\langle x\rangle$. برای کامل کردن اثبات، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت اول) برای هر $b\in N[x]$ که $\bar{b}\neq\bar{x}$، $|\bar{x}|\neq|\bar{b}|$. در این صورت برای هر $c\in N[f(x)]$ نیز این شرط باید برقرار باشد. اما $\langle x\rangle=\{1\}\cup(\bigcup_{\bar{b}:b\in N[x],|\bar{b}|\leq|\bar{x}|}\bar{b})$ و در نتیجه $o(x)=1+\sum_{\bar{b}:b\in N[x],|\bar{b}|\leq|\bar{x}|}|\bar{b}|$. چون f همسایگی‌ها و وزن M-مجموعه‌ها را حفظ می‌کند پس $o(x)=o(f(x))$. حالت دوم) x عضوی از مرتبهٔ $2m$ باشد که m عددی فرد است. در این صورت عضو منحصر به فرد $\bar{b}\in N[\bar{x}]$ وجود دارد که $\bar{b}\neq\bar{x}$، $|\bar{x}|=|\bar{b}|$ و $o(b)=m$. چون $o(x)=2m$ پس $\langle a\rangle$ شامل یک عنصر منحصر به فرد از مرتبهٔ ۲ مانند y است و چون مرتبهٔ مرکزساز y عددی غیر اول است پس $|\bar{y}|=1$. اما $N[b]$ شامل چنین عنصری نیست. در نتیجه $f(x)$ نیز باید در شرایط x صدق کند یعنی $|\overline{f(x)}|=|\overline{f(b)}|$ و $N[f(x)]$ باید شامل عنصر منحصر به فردی از مرتبهٔ ۲ باشد توجه شود که فقط M-مجموعهٔ متناظر با یک عضو مرتبهٔ ۲، تک عضوی است. لذا برای عددی فرد مانند k، $o(f(x))=2k$ و $o(f(b))=k$. از طرفی $o(x)=1+\sum_{\bar{c}:c\in N[x],|\bar{c}|\leq|\bar{x}|}|\bar{c}|$ و چون f وزن‌ها را حفظ می‌کند پس $o(x)=o(f(x))$ و $o(b)=o(f(b))$. ■

لم ۳. ۸. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت

$$Aut(\overline{P(G)})=\{\bar{f}\mid \text{مرتبه عناصر } G \text{ را حفظ کند } f\}.$$

برهان. اگر G، p-گروه دوری باشد آن‌گاه حکم واضح است. اگر G گروه دوری باشدکه p-گروه نباشد آن‌گاه بنا بر نتیجه ۳. ۷، حکم برقرار است. فرض کنیم G گروه دوری نباشد و $\bar{f}\in Aut(\overline{P(G)})$. به برهان خلف فرض کنیم برای هر $g\in Aut(P(G))$ که $\bar{g}=\bar{f}$، g مرتبهٔ بعضی از عناصر را حفظ نکند. فرض کنیم g_1 طوری باشد که کمترین تغییرات را در مرتبهٔ عناصر داشته باشد. فرض کنیم g_1 مرتبهٔ b را حفظ نکند. لذا M-مجموعه‌ای مانند K با شرط لم ۳. ۵ (ب) وجود دارد که $b\in K$. فرض کنیم. $K=\langle a\rangle-\langle a^{p^t}\rangle$ پس گراف القایی متناظر با $N[b]=K$ یک گراف کامل است. در نتیجه گراف متناظر با $N[f(b)]$ نیز کامل است. اگر $a^{p^t}=1$، آنگاه $N[b]=K$ یک مؤلفه همبندی $P(G)$ است که کامل نیز می باشد. اما گراف القایی متناظر با یک همسایگی $N[c]$ یک مؤلفه کامل است اگر و تنها اگر $\langle c\rangle$ فقط در یک q-گروه دوری منحصربفرد ماکزیمال قرار گیرد. لذا $f(b)$ نیز در یک q-گروه دوری منحصربفرد ماکزیمال مانند $\langle y\rangle$ قرار می گیرد. اما $|N[b]|=|N[f(b)]|$. پس $p^n-1=q^m-1$ که در آن $o(y)=q^m$. از این جا $p=q$ و $m=n$. حال با تغییر تعریف g_1 روی $\langle a\rangle$، به صورت یکریختی گروهی از $\langle a\rangle$ به $\langle y\rangle$، به یک خودریختی گرافی جدید g_2 می‌رسیم که تعداد عناصری که مرتبه آن ها را تغییر می‌دهد از g_1 کمتر است و $\overline{g_2}=\bar{f}$ که تناقض است. پس $a^{p^t}\neq 1$ چون g_1^{-1} نیز یک خودریختی گرافی است که

$o(g_1^{-1}(g_1(b)) \neq o(g_1(b))$ پس $g_1(b)$ نیز در شرایط b صدق می‌کند یعنی زیرگروه دوری $\langle y \rangle$ وجود دارد که $\overline{g_1(b)} = K_1 = \langle y \rangle - \langle y^{q^s} \rangle$، $o(y) = q^m$ و $y^{q^s} \neq 1$. در نتیجه $|N[f(b)]| = |N[g_1(b)]| = q^m - 1$ مشابه حالت قبل به تناقض می رسیم. ■

قضیهٔ ۳. ۹. فرض کنیم $G = H \times K$ و $(|H|, |K|) = 1$. در این صورت

$$Aut(\overline{P(H \times K)}) \cong Aut(\overline{P(H)}) \times Aut(\overline{P(K)}).$$

برهان. اگر H یا K گروه بدیهی باشند حکم واضح است. پس فرض می‌کنیم هم H و هم K نابدیهی باشند. فرض کنیم $(a,b) \in G$ و $\bar{f} \in Aut(\overline{P(G)})$ که در آن $f \in Aut(P(G))$. در این صورت $C_G(a,b) = C_H(a) \times C_K(b)$. اگر $a \neq 1$ و $b \neq 1$ آن گاه $\langle a \rangle \times \langle b \rangle \subseteq C_G(a,b)$.همچنین $C_G(a,1) = C_H(a) \times K$ و $C_G(1,b) = H \times C_K(b)$. در هر صورت $|C_G(a,b)|$ توانی از یک عدد اول نیست. بنابر لم ۳. ۲ و نتیجه ۳. ۷، f مرتبه هر عنصر را حفظ می کند یعنی $o(x) = o(f(x))$. بنابر خواص ضرب مستقیم گروه های با مرتبه‌های متباین، $f(H) = H$ و $f(K) = K$ (عناصری از G که مرتبهٔ آنها عدد $|H|$ را عاد می‌کنند فقط عناصر H هستند). فرض کنیم $(a,b) \in G$، $f(a) = a_1$ و $f(b) = b_1$. با توجه به شرایط قضیهٔ $(o(a), o(b)) = 1$ و در نتیجه $a, b \in N[(a,b)]$. پس $a_1, b_1 \in N[f(a,b)]$. به عبارت دیگر $\langle f(a,b) \rangle$ شامل a_1 و b_1 است. چون تنها زیرگروه دوری از مرتبهٔ $o(a_1)o(b_1)$ که شامل a_1 و b_1 باشد برابر $\langle (a_1, b_1) \rangle$ است و $\langle f(a,b) \rangle$نیز زیرگروهی دوری با شرایط فوق است پس $\langle f(a,b) \rangle = \langle (a_1, b_1) \rangle$ و در نتیجه $\overline{f(a,b)} = \overline{(a_1, b_1)}$. بنابراین

$$\theta : Aut(\overline{P(H \times K)}) \to Aut(\overline{P(H)}) \times Aut(\overline{P(K)}),$$

با تعریف $\theta(\bar{f}) = (\overline{f_{|H}}, \overline{g_{|K}})$ یک همریختی یک به یک است.

برای پوشایی بنا بر لم ۳. ۸، فرض می کنیم $\bar{f} \in Aut(\overline{P(H)})$ و $\bar{g} \in Aut(\overline{P(K)})$ که f و g به ترتیب مرتبه عناصر را در H و K حفظ کنند. برای هر دو عنصر $(a,b), (c,d) \in H \times K$، چون $(|H|, |K|) = 1$، پس (a,b) توانی از (c,d)است اگر و تنها اگر a توانی از c و b توانی از d باشد. لذا $(f, g) : P(G) \to P(G)$ با تعریف $(f, g)(h,k) = (f(h), g(k))$ یک خودریختی گرافی $P(G)$است و $\theta(\overline{f, g}) = (\bar{f}, \bar{g})$. بنابراین θ پوشا است و حکم ثابت شده است.■

می دانیم هر گروه پوچ‌توان متناهی و در نتیجه آبلی متناهی را می‌توان به حاصل ضرب مستقیم سیلو زیرگروه‌های متمایز آن نوشت. نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ فوق برای گروه‌های پوچ‌توان و به ویژه برای گروه‌های آبلی است که به صورت زیر می‌توان بیان کرد.

قضیهٔ ۳. ۱۰. فرض کنیم G یک گروه متناهی و پوچ‌توان باشد، $|G| = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_t^{n_t}$ و $G \cong P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_t$ که در آن $|P_i| = p_i^{n_i}$. در این صورت

$$Aut(P(G)) \cong (Aut(\overline{P(P_1)}) \times Aut(\overline{P(P_2)}) \times \cdots \times Aut(\overline{P(P_t)})) \ltimes \prod_{\bar{x} \in V(\overline{P(G)})} S_{|\bar{x}|}.$$

همچنین در حالت خیلی خاص، برای گروه دوری نتیجه زیر را داریم که مشابه نتیجهٔ اصلی [۵] است.

نتیجهٔ ۳. ۱۱. فرض کنیم G یک گروه دوری متناهی از مرتبهٔ n باشد که n توانی از یک عدد اول نباشد. در این صورت $Aut(P(G)) \cong \prod_{d|n, d>1} S_{\varphi(d)}$.

برهان. از قضیهٔ ۳. ۱،

$$Aut(P(G)) \cong Aut(\overline{P(G)}) \ltimes \prod_{\bar{x} \in V(\overline{P(G)})} S_{|\bar{x}|}.$$

فرض کنیم $|G| = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_t^{n_t}$. چون G یک گروه دوری است پس $G \cong P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_t$ که P_i-ها p_i- سیلو زیرگروه‌های G هستند. حال از قضیهٔ ۳. ۱۰،

$$Aut(\overline{P(G)}) \cong Aut(\overline{P(P_1)}) \times Aut(\overline{P(P_2)}) \times \cdots \times Aut(\overline{P(P_t)}).$$

اما P_i-ها p_i-زیرگروه های دوری نیز هستند پس $P(P_i)$ یک گراف کامل است و در نتیجه $\overline{P(P_i)}$ تک نقطه‌ای است. لذا

$$Aut(\overline{P(P_1)}) = Aut(\overline{P(P_2)}) = \cdots = Aut(\overline{P(P_t)}) = 1.$$

پس $Aut(\overline{P(G)}) = 1$. از طرفی برای هر x، $|C_G(x)| = |G| = n$ توانی از یک عدد اول نیست پس برای هر عضو نابدیهی x، $|\bar{x}| = \varphi(o(x))$. لذا $|\bar{x}| = \varphi(d)$. از طرفی دیگر هر گروه دوری متناهی فقط یک زیرگروه d عضوی مانند $\langle x \rangle$ دارد که $d|n$. پس

$$Aut(P(G)) \cong \prod_{d|n, d>1} S_{\varphi(d)},$$

که اثبات را کامل می کند. ■

۴. گروه‌های همودوری

در این بخش به صورت دقیق گروه خودریختی گروه‌های همودوری را به دست می‌آوریم و سپس با استفاده از آن گروه خودریختی بعضی از گروه‌های آبلی را محاسبه می‌کنیم.

گروه نادوری G را همودوری می‌نامیم هرگاه با $(Z_{p^m})^n = Z_{p^m} \times Z_{p^m} \times \cdots \times Z_{p^m}$ یکریخت باشد یا به عبارت دیگر با ضرب نسخه‌هایی از یک گروه دوری p^n عضوی یکریخت باشد. در ابتدا قضیهٔ مشهوری از نظریهٔ گروه‌ها که نقش مهمی در این بخش ایفا می‌کند را می‌آوریم.

قضیهٔ ۴. ۱. فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی و $x \in G$ از مرتبه ماکزیمم باشد. در این صورت زیرگروه H وجود دارد که $G = H \times \langle x \rangle$.

فرض کنیم G یک p-گروه آبلی متناهی باشد و $x \in G$. ارتفاع x را که با $h(x)$ نمایش می‌دهیم، برابر با بزرگترین عدد به شکل p^n است که $x \in G^{p^n}$.

لم ۴. ۲. فرض کنیم $G \cong (Z_{p^m})^n$ یک گروه همودوری باشد و $1 \le t \le m$. در این صورت $Aut(G)$ و در نتیجه $Aut(P(G))$ روی $A_t = \{x \in G \mid o(x) = p^t\}$ به صورت متعددی عمل می‌کند.

برهان. فرض کنیم $G \cong (Z_{p^m})^n$ یک گروه با عمل ضرب باشد و a و b عناصری با مرتبه p^t باشند. چون G همودوری است پس $h(a) = h(b)$. لذا عناصر x و y با مرتبه p^m در G وجود دارند که $x^{p^{m-t}} = a$ و $y^{p^{m-t}} = b$. بنابر قضیهٔ ۴. ۱، زیرگروه های H_1 و H_2 طوری وجود دارند که $G = H_1 \times \langle x \rangle$ و $G = H_2 \times \langle y \rangle$. از این‌جا $H_1 \cong H_2$ و در نتیجه خودریختی گروهی مانند f از G وجود دارد که $f(x) = y$ و $f(H) = K$.
پس $f(a) = f(x^{p^{m-t}}) = f(x)^{p^{m-t}} = y^{p^{m-t}} = b$. لذا حکم برقرار است. ■

قضیهٔ ۴. ۳. برای $G \cong (Z_{p^m})^n$ و $n > 1$،

$$Aut(P(G)) \cong ((\cdots(S_{k_m} \wr \cdots) \wr S_{k_2}) \wr S_{k_1}) \ltimes (\prod_{i=1}^{m} (S_{(p^i - p^{i-1})})^{r_i}),$$

که در آن $r_t = (p^{nt} - p^{n(t-1)}) / (p^t - p^{t-1})$، $k_1 = r_1$ و $k_{i+1} = r_{i+1} / r_i$.

برهان. بنا به قضیهٔ ۲. ۱، $\prod_{B \in V(\overline{P(G)})} S_{|B|} \ltimes Aut(\overline{P(G)}) \cong Aut(P(G))$. چون G آبلی است پس مرکزساز هر عنصر برابر G است که p-گروه دوری نیست و بنا به لم ۳. ۴، هر M-مجموعه به صورت T_a است. پس $|\overline{a}| = |T_a| = p^t - p^{t-1}$، که در آن $o(a) = p^t$. قرار می دهیم $R_t = \{\overline{x} \mid o(x) = p^t\}$ و $r_t = |R_t|$. می دانیم G داری $p^{nt} - p^{n(t-1)}$ عضو از مرتبه p^t است و چون هر گروه دوری از مرتبه p^t فقط شامل $p^t - p^{t-1}$ عنصر از مرتبهٔ p^t است و با این عناصر به طور کامل مشخص می شود، پس $r_t = (p^{nt} - p^{n(t-1)}) / (p^t - p^{t-1})$. لذا بخش دوم صورت قضیه به دست می‌آید. حال کافی است $Aut(\overline{P(G)})$ را بیابیم.

در یک p-گروه، دو عنصر a و b در یک مؤلفه همبندی قرار می‌گیرند اگر و تنها اگر $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \ne 1$. به عبارت دیگر زیرگروه‌های دوری تولید شده توسط همه عناصر یک مؤلفه همبندی باید شامل یک زیرگروه p-عضوی منحصر به فرد باشند. بنابراین G دارای r_1 مؤلفه همبندی است. از طرف دیگر بنا بر لم ۴. ۲، $Aut(G)$ به صورت متعددی بر مجموعه عناصر از مرتبه p عمل می کند و لذا روی R_1 نیز متعدی است. در نتیجه همهٔ مؤلفه‌های همبندی $P(G)$ یکریخت هستند. همچنین هر خودریختی گرافی هر مؤلفه همبندی را به یک مؤلفه همبندی تصویر می‌کند. با استفاده از قضیهٔ ۲. ۲، $Aut(\overline{P(G)}) \cong Aut(K_1) \wr S_{k_1}$ که در آن K_1 یک مؤلفه همبندی $\overline{P(G)}$ است. اما فقط یک عنصر مانند $\overline{a}$ در K_1 است که $N[\overline{a}] = K_1$. (توجه داریم که $o(a) = p$) در نتیجه هر خودریختی گرافی K_1، $\overline{a}$ را ثابت نگه می‌دارد. بنابراین $Aut(K_1) = Aut(K_1 - \overline{a})$. حال دو عنصر $\overline{b}$ و $\overline{c}$ در یک مؤلفهٔ همبندی در $K_1 - \overline{a}$ قرار می‌گیرند اگر و تنها اگر $\langle b \rangle \cap \langle c \rangle \ne \langle a \rangle$ و در نتیجه زیرگروه p^2-عضوی $\langle b \rangle$ باید در $\langle c \rangle$ قرار گیرد. لذا $K_1 - \overline{a}$

به تعداد زیرگروه‌های p^2-عضوی شامل $\langle a\rangle$، مؤلفهٔ همبندی دارد. پس $K_1-\bar{a}$ دارای $k_2=r_2/r_1$ مؤلفهٔ همبندی است که شبیه مرحلهٔ اول همگی یکریخت بوده و در نتیجه $Aut(K_1)\cong Aut(K_2)\wr S_{k_2}$.

با ادامه این روند برهان کامل می‌شود.■

مثال. برای $G=Z_9\times Z_9$، $r_1=(3^2-1)/(3-1)=4$، $r_2=(3^4-3^2)/(3^2-3)=12$، $k_1=r_1=4$ و $k_2=r_2/r_1=3$. در نتیجه $Aut(P(G))\cong(S_3\wr S_4)\ltimes({S_2}^4\times{S_6}^{12})$.

توجه داریم که در حالت خیلی خاص $m=1$، در قضیهٔ فوق، نتیجه زیر را برای گروه‌های آبلی مقدماتی به دست می‌آید.

نتیجهٔ ۴. فرض کنیم G یک p-گروه آبلی مقدماتی از مرتبهٔ p^n باشد. در این صورت $Aut(P(G))\cong S_{r_1}\ltimes\left(S_{p-1}\right)^{r_1}$ که در آن $r_1=(p^n-1)/(p-1)$.

همچنین با استفاده از قضیهٔ ۳. ۱۰ و نتیجهٔ فوق، نتیجهٔ زیر را داریم.

نتیجهٔ۴. فرض کنیم $G\cong P_1\times P_2\times\cdots\times P_m$ که $m>1$ و برای هر i، P_i، p_i-گروه آبلی مقدماتی از مرتبهٔ $p_i^{n_i}$ است (ممکن است $n_i=1$). در این صورت

$$Aut(P(G))\cong(S_{k_1}\times\cdots\times S_{k_m})\ltimes\left(\prod_{\{p_{t_1},p_{t_2},\ldots,p_{t_s}\}\subseteq\{p_1,p_2,\ldots,p_m\}}(S_{\varphi(p_{t_1}p_{t_2}\cdots p_{t_s})})^{\alpha(p_{t_1}p_{t_2}\cdots p_{t_s})}\right),$$

که در آن $k_i=(p_i^{n_i}-1)/(p_i-1)$ و $\alpha(p_{t_1}\ldots p_{t_s})=k_{t_1}k_{t_2}\ldots k_{t_s}$.

برهان. از قضیهٔ ۳. ۹،

$$Aut(\overline{P(G)})\cong Aut(\overline{P(P_1)})\times Aut(\overline{P(P_2)})\times\cdots\times Aut(\overline{P(P_t)}).$$

اما $Aut(\overline{P(P_i)})\cong S_{k_i}$ و در نتیجه $Aut(\overline{P(G)})\cong S_{k_1}\times\cdots\times S_{k_m}$. از طرفی می‌دانیم G، دارای $|P_{t_1}-1||P_{t_2}-1||P_{t_s}-1|$ عنصر از مرتبهٔ $p_{t_1}p_{t_2}\ldots p_{t_s}$ است و برای هر عضو از مرتبهٔ $p_{t_1}p_{t_2}\cdots p_{t_s}$ مانند a، $\langle a\rangle$ دقیقا شامل $\varphi(o(a))$ مولد است. در نتیجه G دارای

$$\alpha(p_{t_1}p_{t_2}\ldots p_{t_s})=|P_{t_1}-1||P_{t_2}-1|\ldots|P_{t_s}-1|/((p_{t_1}-1)(p_{t_2}-1)\cdots(p_{t_s}-1))$$

M- مجموعه $(p_{t_1}-1)(p_{t_2}-1)\cdots(p_{t_s}-1)$ عضوی است. لذا از قضیه ۳. ۱۰، حکم ثابت می شود.■

References

1. Bosk J., "The graphs of semigroups", in: Theory of Graphs and Application, Academic Press, New York., 1964, 119-125.

2. Doostabadi A., Erfanian A., Jafarzadeh A., "Some results on the power graphs of finite groups", Science Asia., 41 (2015) 73-78.

3. Jafari S.H., "Some properties of power graphs in finite group", Asian-European J. Math. 93 (2016) 1650079 (6 pages).

4. Jafari S.H., "A note on the commuting graphs of a conjugacy class in symmetric groups", Journal of Algebraic Systems. 5(1) (2017) 85-90.

5. Feng M., Ma X., Wang K., "The full automorphism group of the power (di) graph of a finite group", European Journal of Combinatorics. 52(A) (2016) 197-206.

6. Chakrabarty I., Ghosh S., Sen M.K., "Undirected power graphs of semigroups", Semigroup Forum. 78 (2009) 410-426.

7. Kelarev A.V., Quinn S.J., "Directed graph and combinatorial properties of semigroups", J. Algebra 251(2002) 16-26.

8. Mirzargar M., Ashrafi A.R. Nadjafi-Arani M.J., "On the power graph of a finite group", Filomat. 26 (2012), 1201-1208.

9. Moghaddamfar A.R., Rahbariyan S., Shi W.J., "Certain properties of the power graph associated with a finite group", J. Algebra Appl., 13 (2014) 1450040(18 pages).

10. Tamizh Chelvam T., Sattanathan M., "Power graph of finite abelian groups", Algebra Discrete Math. 16 (2013), 33-41.