







Kharazmi University

## The robust vertex centdian location problem with interval vertex weights on general graphs

Nazanin Eskandari Arjomand<sup>1</sup> ✉, Fahimeh Baroughi<sup>2</sup>   
Soudabeh Seyyedi Ghomi<sup>3</sup> , Behrooz Alizadeh<sup>4</sup> 

1. Department of Mathematics, Sahand University of Technology, Sahand, Iran.

✉E-mail: [n\\_gouchi\\_eskandari@yahoo.com](mailto:n_gouchi_eskandari@yahoo.com)

2. Department of Mathematics, Sahand University of Technology, Sahand, Iran.

E-mail: [baroughi@sut.ac.ir](mailto:baroughi@sut.ac.ir)

3. Department of Mathematics, Sahand University of Technology, Sahand, Iran.

E-mail: [s.seyyedighomi@gmail.com](mailto:s.seyyedighomi@gmail.com)

4. Department of Mathematics, Sahand University of Technology, Sahand, Iran.

E-mail: [alizadeh@sut.ac.ir](mailto:alizadeh@sut.ac.ir)

---

### Article Info

### ABSTRACT

---

#### Article type:

Research Article

#### Article history:

Received:

12 June 2020

Revised form:

20 January 2021

Accepted:

31 January 2021

Published online:

22 November 2022

#### Keywords:

Centdian location problem;  
Min-max regret riterion;  
Robust optimization.

#### Introduction

The problem of locating a new facility on a transportation graph in which each node represents a different customer has been considered in the literature according to different cost models. Most of the cost models define a monotone nondecreasing function of travel distances between the customers and the new server as the objective function that must be minimized. The median and center models are particular versions of such cost functions. The optimal locations of these two models exhibit good properties of efficiency and equity, respectively. Unfortunately, both models drive to, in general, different optimal locations. In order to reconcile both tendencies, the convex combination of the two criteria was introduced by Halpern who called the new cost function, centdian criterion. In this paper, we will study the robust vertex centdian location problem with uncertain vertex weights on general graphs. One of the criteria used in the literature in these text is the min- max regret criterion.

---

## Material and methods

In this method, let  $G = (V(G), E(G))$  be a connected, undirected graph with the vertex set  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  and the edge set  $E(G)$ . Also, let us assume that each vertex  $v_i \in V(G)$  has two nonnegative weights  $w_i$  and  $u_i$  such that

$$w_i \in [\underline{w}_i, \overline{w}_i] \text{ and } u_i \in [\underline{u}_i, \overline{u}_i], \quad (\underline{u}_i, \underline{w}_i \geq 0)$$

and each edge  $e \in E(G)$  has the positive length  $l(e)$ . For each vertex  $v \in V(G)$  on the graph  $G$ , the objective function of the centdian problem under the scenario  $s \in S$  is considered as follows:

$$f(v, s) = \lambda_1 f_1(v, s) + \lambda_2 f_2(v, s),$$

in which  $f_1(v, s)$  and  $f_2(v, s)$ , are the objective functions of the 1-center location problem and the objective function of the 1-median location problem under the scenario  $s$ , respectively. Then, The min-max regret criterion can be written as follows:

$$\min_{v \in V(G)} \max_{w \in V(G)} \max_{s \in S} (f(v, s) - f(w, s)).$$

We use some combinatorial methods to solve the problem.

## Results and discussion

Suppose that for both vertices  $v$  and  $w$  the objective function of the centdian problem is as follows:

$$f(v, s) - f(w, s) = \lambda_1 \left[ \max_{1 \leq i \leq n} u_i(s) d(v_i, v) - \max_{1 \leq i \leq n} u_i(s) d(v_i, w) \right] + \lambda_2 \left[ \sum_{i=1}^n w_i(s) (d(v_i, v) - d(v_i, w)) \right].$$

Instead of solving the problem on the set of scenarios of  $S$ , we can solve the problem on the set of scenarios  $S_m \times S_c$ .

Thus, the robust vertex centdian problem on general graphs under min-max regret criterion is solved in  $O(n^3)$  time.

## Conclusion

In this paper, we investigated the robust vertex centdian location problem with uncertain vertex weights on general graphs. We used the min-max regret criterion and solved the problem with objective function contains  $\lambda$  and proposed a polynomial time algorithm for the problem under investigation.

---

**How to cite:** Eskandari Arjomand, N., Baroughi, B., Seyyedi Ghomi, S., Alizadeh, B., (2022) The robust vertex centdian location problem with interval vertex weights on general graphs. *Mathematical Researches*, 8 (3), 15-26



## مسأله مکان‌یابی مرکز-میانه رأسی استوار با وزن‌های رأسی بازه‌ای روی گراف‌های کلی

نازنین اسکندری ارجمند<sup>۱</sup>، فهیمه باروقی<sup>۲</sup>✉، سودابه سیدی قمی<sup>۳</sup>، بهروز علی‌زاده<sup>۴</sup>

۱. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی سهند تبریز، تبریز، ایران. پست الکترونیکی: [n\\_gouchi\\_eskandari@yahoo.com](mailto:n_gouchi_eskandari@yahoo.com)

۲. نویسنده مسئول، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی سهند تبریز، تبریز، ایران. پست الکترونیکی: [baroughi@sut.ac.ir](mailto:baroughi@sut.ac.ir)

۳. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی سهند تبریز، تبریز، ایران. پست الکترونیکی: [s.seyyedighomi@gmail.com](mailto:s.seyyedighomi@gmail.com)

۴. گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی سهند تبریز، تبریز، ایران. پست الکترونیکی: [alizadeh@sut.ac.ir](mailto:alizadeh@sut.ac.ir)

### چکیده

### اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

در این مقاله، مسأله مکان‌یابی مرکز-میانه استوار رأسی با وزن‌های رأسی غیرقطعی روی گراف‌های کلی مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد. معیار مورد استفاده برای حل مسئله در این مقاله معیار مینی-ماکس پشیمانی است. این مسأله با تابع هدفی که دارای ضریبی از  $n$  بوده مورد بررسی قرار گرفته و یک الگوریتم با زمان اجرای چند جمله‌ای برای آن ارائه می‌شود. نشان داده می‌شود که مسأله مرکز-میانه استوار رأسی روی گراف‌های کلی در زمان  $O(n^3)$  حل می‌شود.

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۳/۲۳

تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۱۱/۰۱

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۱/۱۲

تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۹/۰۱

### واژه‌های کلیدی:

مسأله مکان‌یابی مرکز-میانه،

معیار مینی-ماکس پشیمانی،

بهینه‌سازی استوار.

استناد: اسکندری ارجمند، نازنین؛ باروقی، فهیمه؛ سیدی قمی، سودابه؛ علی‌زاده، بهروز؛ (۱۴۰۱). مسأله مکان‌یابی مرکز-میانه رأسی استوار با وزن‌های رأسی بازه‌ای روی گراف‌های کلی. پژوهش‌های ریاضی، ۸ (۳)، ۲۶-۱۵.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

## ۱. مقدمه

مسائل مکان‌یابی مرکز و میانه از مدل‌های معروف در نظریه مکان‌یابی می‌باشند که با توجه به کاربردهای فراوانی که در تئوری و عمل دارند، همواره مورد توجه محققین قرار گرفته‌اند. در مسائل مکان‌یابی  $p$ -مرکز هدف قرار دادن  $p$  تا سرویس‌دهنده روی شبکه است به طوری که ماکزیمم فاصله وزن‌دار مشتریان از نزدیکترین سرویس‌دهنده مینیمم شود. در مسائل مکان‌یابی  $p$ -میانه هدف قرار دادن  $p$  تا سرویس‌دهنده روی شبکه است به طوری که مجموع فواصل وزن‌دار مشتریان از نزدیکترین سرویس‌دهنده مینیمم شود. در ادبیات تحقیقی برای در نظر گرفتن معیار میانه و مرکز به طور همزمان توابع هدف و رویکردهای مختلفی را بررسی کرده‌اند. دو رویکردی که بیشتر مورد مطالعه قرار گرفته‌اند روش مقید و روش ترکیبی هستند. روش مقید نیازمند مینیمم کردن یک هدف است به طوری که تابع هدف دیگر از یک مقدار ثابت بزرگتر نباشد یا تا آن‌جا که امکان دارد مینیمم باشد. روش ترکیبی ترکیب محدب دو تابع هدف را به عنوان یک هدف جدید در نظر می‌گیرد.

سوین و روله اولین بار مسئله مرکز-میانه مقید را معرفی کردند و آن را مسئله مکان‌یابی تسهیلات مرکزی نامیدند [۱]. آنها  $p$  تا سرویس‌دهنده را به عنوان مکان‌های مرکز قرار دادند به طوری که تابع هدف میانه با تبدیل مسئله به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی مینیمم شود. هم‌چنین، سوین، تورگاس و برگمن مسئله مرکز-میانه مقید را با نام مسئله  $p$ -میانه اصلاح شده توصیف کردند [۲]. در مسئله  $p$ -میانه اصلاح شده  $p$  نقطه میانه باید طوری پیدا شوند که تابع هدف مرکز از یک مقدار داده شده تجاوز نکند. اخیراً محققان مسئله مرکز-میانه مقید را به عنوان یک حالتی از مسئله مرکز-میانه در نظر گرفتند. برای اطلاعات بیشتر به [۳, ۴, ۵, ۶] مراجعه کنید. مسئله مکان‌یابی مرکز-میانه با استفاده از روش ترکیبی اولین بار توسط هالپرن در سال ۱۹۷۶ معرفی شد. هالپرن تابع هدف این مدل را به صورت ترکیب محدب تابع هدف مرکز و میانه در نظر گرفت. مجموعه نقاط مرکز-میانه متناظر با  $p$  نقطه روی درخت است به طوری که کمترین مقدار تابع هدف را داشته باشد. برخی از محققان این‌گونه مسائل را مسائل مکان‌یابی  $\lambda$ -مرکز-میانه می‌نامند تا آن را از حالتی که تابع هدف مرکز-میانه به صورت جمع ساده توابع میانه و مرکز هست، متمایز کنند. بیشتر مطالعات اولیه در مسئله مکان‌یابی مرکز-میانه، برای حالتی است که تابع هدف میانه وزن‌دار و تابع هدف مرکز غیر وزن‌دار باشد. هالپرن مسئله مکان‌یابی ۱-مرکز-میانه روی درخت را در نظر گرفت و روش ساده‌ای برای پیدا کردن نقطه مرکز-میانه معرفی کرد [۷]. دو سال بعد هالپرن مسئله مکان‌یابی ۱-مرکز-میانه روی گراف‌های کلی را که تابع هدف مرکز غیر وزن‌دار بود، مورد مطالعه قرار داد [۸]. مسئله مکان‌یابی مرکز-میانه، مسئله مکان‌یابی مرکز-میانه جفت وزن‌دار نامیده می‌شود، هرگاه هم تابع هدف میانه و هم تابع هدف مرکز وزن‌دار باشند و این وزن‌ها با هم برابر نباشند. بعلاوه، مسئله مکان‌یابی مرکز-میانه به عنوان مسئله مرکز-میانه وزن‌دار نامیده می‌شود، هرگاه توابع هدف میانه و مرکز وزن‌دار باشند و این وزن‌ها برای هر دو مسئله با هم برابر باشند. بریتو و همکاران یک الگوریتمی با زمان اجرای  $O(m^2n^4)$  برای مسئله مکان‌یابی ۲-مرکز-میانه روی شبکه‌های کلی و الگوریتمی با زمان اجرای  $O(n^2)$  برای حل این مسئله روی شبکه‌های

درختی پیشنهاد داده‌اند [۹]. تامیر و همکاران مسأله مکان‌یابی  $p$ -مرکز-میانه جفت وزن‌دار روی درخت‌ها را در نظر گرفته و الگوریتم‌هایی با زمان اجرای  $O(pn^6)$  به‌ازای  $p \geq 4$  و  $O(n^p)$  به‌ازای  $p < 4$  معرفی کرده‌اند [۱۰]. مسأله مکان‌یابی  $p - \lambda$ -مرکز-میانه روی شبکه‌های کلی برای اولین بار توسط بریتو و مورنو مورد بررسی قرار گرفت و الگوریتمی با زمان اجرای  $O(n^{p+2}m^p)$  برای آن مطرح کردند [۱۱]. هالپرن همچنین ثابت کرد که روی گراف‌های کلی در بعضی حالت‌ها، مسأله مکان‌یابی ۱-مرکز-میانه نشان‌دهنده دوگان مسائل مرکز-میانه مقید است [۱۲]. در این بررسی، فرض بر این است که مکان مرکز-میانه با یک نقطه نشان داده می‌شود. آوریخ و برمن مسأله پیدا کردن مسیر بهینه روی درخت را با ترکیب معیار میانه و مرکز در نظر گرفتند [۱۳]. تامیر الگوریتمی با زمان اجرای  $O(n \log n)$  در یک شبکه‌ی درختی را پیشنهاد داد که تابع هدف مرکز-میانه برابر با مجموع توابع میانه وزن‌دار و مرکز وزن‌دار هستند [۱۴]. کولبروک و سیسیلیا مسأله مکان‌یابی مرکز-میانه چندمعیاره روی یک شبکه با چند وزن در هر گره و چند طول در هر یال را در نظر گرفتند [۱۵]. وانگ مسأله مرکز-میانه رأسی در یک جنگل کاملاً پویا را مورد بررسی قرار داد [۱۶]. کاندو اولین کسی بود که مسأله مرکز-میانه وزن‌دار دوگانه را با وزن‌های رأسی بازه‌ای روی گراف‌های درختی در نظر گرفت [۱۷]. لی و همکارانش مسأله  $\lambda$ -مرکز-میانه را با وزن‌های رأسی بازه‌ای یکسان برای هر دو مسأله مرکز و میانه روی گراف‌های کلی بررسی کردند و الگوریتمی با زمان اجرای  $O(n^3 \log n)$  برای آن ارائه دادند [۱۸].

رویکردهای بهینه‌سازی استوار با تحقیقات سویستر در سال ۱۹۷۳ بر روی یک مدل بهینه‌سازی خطی آغاز شد. در این رویکرد که مقدار هر داده از یک بازه انتخاب می‌شود، بدترین حالت برای مقدار هر داده در نظر گرفته شد [۱۹]. بنابراین، جواب بهینه بدست آمده با استفاده از این روش بسیار متفاوت‌تر از جواب بهینه مسأله اسمی است. رویکرد وی سال‌ها بعد توسط مال‌وی، در مسائل بهینه‌سازی گسسته مورد بررسی قرار گرفت [۲۰]. بن‌تال و نمیروفسکی در سال ۲۰۰۰ رویکرد دیگری ارائه دادند که از کارایی لازم برخوردار نبود [۲۱]. برتسیماس و سیم در سال ۲۰۰۴ رویکرد دیگری ارائه دادند که سطح محافظه‌کاری را کنترل می‌کرد. نتیجه‌ی رویکرد وی یک مدل برنامه‌ریزی خطی بود که همتای استوار مدل اولیه نامیده می‌شد [۲۲]. رویکرد بهینه‌سازی استوار از جمله تکنیک‌های برنامه‌ریزی تصادفی، بدون نیاز به تابع توزیع پارامتر غیرقطعی می‌باشد.

برای پیدا کردن جواب استوار یک مسأله معیارهای مختلفی وجود دارد. معیار استفاده شده در اکثر مسائل مکان‌یابی با رویکردهای ترکیبیاتی، معیار مینی-ماکس پشیمانی است. این معیار در حالت کلی یک جواب تقریبی به‌ازای همه سناریوها ارائه می‌کند. این جواب تقریبی از طریق مینیمم کردن ماکسیمم اختلاف مقدار تابع هدف روی همه سناریوها با مقدار بهینه‌ی تابع هدف مسأله روی آن سناریوها بدست می‌آید. اگرچه معیار مینی-ماکس پشیمانی برای مسائل مکان‌یابی میانه و مرکز به‌طور قابل ملاحظه‌ای بررسی شده است، ولی برای مسأله مکان‌یابی مرکز-میانه این معیار به‌طور محدودی بررسی شده است.

## ۲. بیان مسئله و بررسی ویژگی های آن

فرض کنید  $G = (V(G), E(G))$  یک گراف همبند، بدون جهت و ساده با مجموعه رأسی  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  و مجموعه یالی  $E(G)$  باشد، همچنین، فرض کنید به هر رأس  $v_i \in V(G)$  دو وزن نامنفی  $w_i$  و  $u_i$  اختصاص داده شده است که در آن  $w_i \in [\underline{w}_i, \overline{w}_i]$  و  $u_i \in [\underline{u}_i, \overline{u}_i]$  و هر یال  $e \in E(G)$  دارای طول مثبت  $l(e)$  است. مجموعه  $S$  را برابر با حاصلضرب دکارتی بازه های  $[\underline{w}_i, \overline{w}_i]$  و  $[\underline{u}_i, \overline{u}_i]$  به ازای  $i = 1, \dots, n$  قرار دهید. مجموعه  $S$  نشان دهنده تمامی رخدادهای ممکن برای وزن رأس های گراف می باشد که در آن هر رخداد ممکن از مجموعه  $S$  را یک سناریو می نامیم. به ازای هر سناریوی  $s \in S$ ،  $w_i(s)$  و  $u_i(s)$  به ترتیب برابر با وزن رأس  $v_i$  متناظر با مسئله ۱-میانه و ۱-مرکز روی سناریوی  $s$  می باشد. به ازای هر رأس  $v \in V(G)$  روی گراف  $G$ ، تابع هدف مسئله مرکز-میانه روی سناریوی  $s \in S$  به فرم زیر در نظر گرفته می شود:

$$f(v, s) = \lambda_1 f_1(v, s) + \lambda_2 f_2(v, s),$$

که در آن  $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$  و  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  و

$$f_1(v, s) = \max_{1 \leq i \leq n} u_i(s) d(v_i, v),$$

$$f_2(v, s) = \sum_{i=1}^n w_i(s) d(v_i, v),$$

به ترتیب تابع هدف مسئله مکان یابی ۱-مرکز و تابع هدف مسئله ۱-میانه تحت سناریوی  $s$  هستند. فرض کنید به ازای هر رأس  $v \in V(G)$ ،

$$Z(v) = \max_{s \in S} R(v, s),$$

که در آن

$$R(v, s) = f(v, s) - f(v_s^*, s).$$

توجه کنید که  $v_s^*$  مکان مرکز-میانه رأسی روی گراف  $G$  تحت سناریوی  $s$  می باشد. یعنی

$$f(v_s^*, s) = \min_{w \in V(G)} f(w, s)$$

پس می توان  $R(v, s)$  را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$R(v, s) = \max_{w \in V(G)} (f(v, s) - f(w, s)).$$

بنابراین به ازای  $v \in V(G)$  داریم:

$$Z(v) = \max_{s \in S} \max_{w \in V(G)} (f(v, s) - f(w, s)).$$

در نتیجه معیار مینی-ماکس پیشیمانی به فرم زیر خواهد بود:

$$\min_{v \in V(G)} \max_{w \in V(G)} \max_{s \in S} (f(v, s) - f(w, s)).$$

تعریف ۱. به ازای هر نقطه دلخواه  $v$  روی گراف  $G$  سناریوی بدترین حالت  $s_v$ ، سناریویی است که مقدار تابع هدف

$$R(v, s) = f(v, s) - f(v_s^*, s)$$

را ماکسیمم می کند.

به ازای هر جفت رأس  $v$  و  $w$ ، فرض کنید  $s(v, w)$  سناریویی باشد که در آن وزن رأس  $v_i$  به این فرم به دست آید:  
وزن رأس‌هایی که در شرط

$$d(v, v_i) - d(w, v_i) \geq 0$$

صدق می‌کنند را برابر کران بالای بازه‌ی وزن متناظرشان و وزن بقیه‌ی رأس‌ها را برابر کران پایین بازه‌ی وزن متناظرشان قرار دهید. فرض کنید:  $S_m = \cup \{s(v, w) : v, w \in V(G)\}$  آن‌گاه داریم:

لم ۱. مجموعه‌ی سناریوهای  $S_m$ ، شامل سناریوهای بدترین حالت برای مسأله مکان‌یابی ۱-میانه استوار به‌ازای تمامی نقاط روی گراف می‌باشد.

حال فرض کنید  $s_i$  سناریویی باشد که وزن رأس  $v_i$  برابر با کران بالای بازه‌ی متناظرش یعنی  $\bar{u}_i$  و وزن بقیه‌ی رأس‌ها برابر با کران پایین بازه‌ی متناظرشان یعنی  $\underline{u}_i$  باشند. همچنین، فرض کنید  $\bar{s}_i$  سناریویی باشد که در شرط زیر صدق می‌کند:

به‌ازای  $v_i \in V(G)$ ، اگر

$$f_c(v_i, \bar{s}) \geq \bar{u}_v d(v_i, v) \quad \forall v \in V(G),$$

آن‌گاه،  $\bar{u}_v = \bar{u}_v$ ، اگر

$$f_c(v_i, \bar{s}) < \bar{u}_v d(v_i, v),$$

آن‌گاه  $\bar{u}_v = \frac{f_c(v_i, \bar{s})}{d(v, v_i)}$ . قرار دهید  $S_c = \cup \{\bar{s}_i, s_i : v_i \in V(G)\}$  در این صورت داریم:

لم ۲. مجموعه‌ی سناریوهای  $S_c$ ، شامل سناریوهای بدترین حالت به‌ازای تمامی نقاط روی گراف برای مسأله مکان‌یابی ۱-مرکز استوار می‌باشد.

لم ۳. مجموعه سناریوهای  $S_m \times S_c$  مجموعه سناریوهای بدترین حالت برای مسأله مرکز-میانه استوار است.

اثبات: به‌ازای هر رأس  $v$  روی گراف  $G$  و به‌ازای هر سناریو دلخواه  $s \in \bar{S}$ ،

$$f_1(v, s) - f_1(w, s) \leq \max_{s \in S_c} (f_1(v, s) - f_1(w, s))$$

با ضرب رابطه فوق در  $\lambda_1$  داریم:

$$\lambda_1 (f_1(v, s) - f_1(w, s)) \leq \lambda_1 \left[ \max_{s \in S_c} (f_1(v, s) - f_1(w, s)) \right].$$

از طرفی چون  $\lambda_1 \geq 0$  پس به‌ازای هر  $s \in \bar{S}$  نتیجه می‌شود:

$$\lambda_1 (f_1(v, s) - f_1(w, s)) \leq \max_{s \in S_c} \lambda_1 (f_1(v, s) - f_1(w, s)).$$

با فرض آن که  $\bar{S}$  برابر با حاصلضرب دکارتی بازه‌های متناظر با مسأله مرکز باشد داریم:

$$\max_{s \in \bar{S}} \lambda_1 (f_1(v, s) - f_1(w, s)) \leq \max_{s \in S_c} \lambda_1 (f_1(v, s) - f_1(w, s)).$$

همچنین، فرض کنید  $S'$  برابر با حاصلضرب دکارتی بازه‌های متناظر با وزن رأس‌های مسأله ۱-میانه باشد. در این صورت به‌ازای هر  $s \in S'$  داریم:

$$f_2(v, s) - f_2(w, s) \leq \max_{s \in S_m} (f_2(v, s(v, w)) - f_2(w, s(v, w)))$$

با ضرب رابطه فوق در  $\lambda_2$  داریم:

$$\lambda_2(f_2(v, s) - f_2(w, s)) \leq \lambda_2 \left[ \max_{s \in S_m} (f_2(v, s(v, w)) - f_2(w, s(v, w))) \right].$$

از طرفی چون  $\lambda_2 \geq 0$ ، پس به ازای هر  $s \in S'$  نتیجه می‌شود:

$$\lambda_2(f_2(v, s) - f_2(w, s)) \leq \max_{s \in S_m} \lambda_2(f_2(v, s(v, w)) - f_2(w, s(v, w))).$$

پس به ازای  $s \in \bar{S} \times S'$  می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} & \lambda_1(f_1(v, s) - f_1(w, s)) + \lambda_2(f_2(v, s) - f_2(w, s)) \\ & \leq \max_{s \in S_c} \lambda_1(f_1(v, s) - f_1(w, s)) + \max_{s \in S_m} \lambda_2(f_2(v, s) - f_2(w, s)) \\ & = \max_{s \in S_m \times S_c} [\lambda_1(f_1(v, s) - f_1(w, s)) + \lambda_2(f_2(v, s) - f_2(w, s))]. \end{aligned}$$

که تساوی آخر از مستقل بودن  $S_c$  و  $S_m$  نتیجه می‌شود. بنابراین

$$\begin{aligned} Z(v) &= \max_{w \in V(G)} \max_{s \in S'} (\lambda_1(f_1(v, s) - f_1(w, s)) + \lambda_2(f_2(v, s(v, w)) - f_2(w, s(v, w)))) \\ &= \max_{w \in V(G)} \max_{s \in S_c} (\lambda_1(f_1(v, s) - f_1(w, s)) + \lambda_2(f_2(v, s(v, w)) - f_2(w, s(v, w)))) \\ &= \max_{w \in V(G)} \max_{s \in S_c \times \bigcup_{w \in V(G)} s(v, w)} (f(v, s) - f(w, s)). \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\min_{v \in V(G)} Z(v) = \min_{v \in V(G)} \max_{w \in V(G)} \max_{s \in S_m \times S_c} (f(v, s) - f(w, s)).$$

### ۳. رویکرد جواب برای حل مسئله مکان‌یابی مرکز-میانه استوار رأسی روی گراف‌های کلی

فرض کنید به‌ازای هر دو رأس  $v$  و  $w$  تابع هدف مسئله مرکز-میانه به فرم زیر باشد:

$$f(v, s) - f(w, s) = \lambda_1 \left[ \max_{1 \leq i \leq n} u_i(s) d(v_i, v) - \max_{1 \leq i \leq n} u_i(s) d(v_i, w) \right] + \lambda_2 \left[ \sum_{i=1}^n w_i(s) (d(v_i, v) - d(v_i, w)) \right].$$

با توجه به نتایج ارائه شده در بخش قبل می‌توان به جای حل مسئله روی مجموعه سناریوهای  $S$ ، مسئله را روی مجموعه

سناریوهای  $S_m \times S_c$  حل کرد. رویکرد پیشنهادی برای حل مسئله را می‌توان به فرم زیر بیان کرد:

#### الگوریتم ۱:

۱. ماتریس فاصله بین رأس‌های گراف را محاسبه کنید.
۲. به ازای هر جفت رأس  $v$  و  $w$  مقادیر زیر را محاسبه کنید.
  - ۱.۲. به ازای  $i = 1, \dots, n$  مقادیر  $d(v_i, v) - d(v_i, w)$  را حساب کنید.
  - ۲.۲. وزن همه رأس‌هایی که در شرط  $d(v_i, v) - d(v_i, w) \geq 0$  صدق می‌کنند را برابر با کران بالای بازه متناظرشان قرار دهید.
- ۳.۲. وزن رأس‌های باقی‌مانده را برابر با کران پایین بازه‌ی متناظرشان قرار دهید.
۳. به ازای هر جفت رأس  $v$  و  $w$  مقادیر

$$\sum_{\{i: d(v_i, v) \geq d(v_i, w)\}} \bar{w}_i (d(v_i, v) - d(v_i, w)) + \sum_{\{i: d(v_i, v) < d(v_i, w)\}} \underline{w}_i (d(v_i, v) - d(v_i, w))$$

را محاسبه کنید.

۴. مجموعه  $S_c$  را تشکیل دهید.

۵. به ازای هر جفت رأس  $v$  و  $w$ ، مقدار تابع هدف مرکز را روی سناریوهای  $S_c$  محاسبه کنید.

۶. به ازای هر جفت رأس  $v$  و  $w$ ، مقدار  $\max_{s \in S_m \times S_c} (f(v, s) - f(w, s))$  را محاسبه کنید.

۷. رأس  $w^*$  را طوری پیدا کنید که مقدار  $\max_{s \in S_m \times S_c} (f(v, s) - f(w, s))$  را ماکزیمم کند.

۸. رأس  $v^*$  را طوری پیدا کنید که مقدار  $\max_{s \in S_m \times S_c} (f(v, s) - f(w^*, s))$  را مینیمم کند.

قضیه ۱. الگوریتم ۱، جواب بهینه مسئله مکان‌یابی مرکز-میانه استوار رأسی را روی گراف‌های کلی تحت معیار پشیمانی مینی-ماکس در زمان  $O(n^3)$  به دست می‌آورد.

اثبات: گام ۱ الگوریتم با استفاده از اجرای الگوریتم فلوید-وارشال در زمان  $O(n^3)$  محاسبه می‌شود. گام ۲ الگوریتم در زمان  $O(n^3)$  اجرا می‌شود. گام ۳ و گام ۴ الگوریتم هر کدام در زمان  $O(n)$  انجام می‌شود. برای محاسبه گام ۵ الگوریتم زمان  $O(n^3)$  مورد نیاز است. این کار به این صورت انجام می‌شود: به ازای هر جفت رأس  $v$  و  $w$  دو ماتریس  $A_v$  و  $A_w$  را به این فرم تشکیل دهید که سطر  $i$  ام آن ماتریس متناظر با سناریوی  $i$  ام باشد. در واقع سطر اول را برابر با سناریوی در نظر بگیرید که وزن رأس  $v_i$  برابر با کران بالای بازه متناظرش و وزن بقیه رأس‌ها برابر با کران پایین بازه متناظرشان باشند و به همین ترتیب، سطر  $n$  ام متناظر با سناریوی  $S_n$  باشد که در آن وزن رأس  $v_n$  برابر با کران بالای بازه متناظرش و وزن بقیه رأس‌ها برابر با کران پایین بازه متناظرشان هستند. پس می‌توان برای محاسبه تمامی مؤلفه‌های ماتریس  $A_v$  و  $A_w$ ، سطر اول آنها را محاسبه کرده و بقیه مؤلفه‌های سطرهای دیگر را از روی آن به دست آورد. پس ابتدا سطر اول ماتریس  $A_v$  و  $A_w$  را محاسبه کنید. تفاوت سطر اول و سطر دوم در مؤلفه اول و دوم این سطرها می‌باشد. زیرا در سطر دوم وزن رأس  $v_2$  برابر با کران بالا و وزن بقیه رأس‌ها برابر با کران پایین بازه متناظرشان می‌باشند. هم‌چنین، برای محاسبه مؤلفه‌های سطر سوم کافی است مؤلفه اول و سوم سطر اول را تغییر دهیم. در واقع تمامی مؤلفه‌های سطر  $i$  ام به جز مؤلفه  $i$  ام و اول آنها برابر با مؤلفه‌های سطر اول هستند. زمان اجرای محاسبه سطر اول برابر با  $O(n)$  و زمان اجرای محاسبه هر کدام از سطرهای دیگر برابر با  $O(2)$  می‌باشد. پس زمان اجرای محاسبه ماتریس‌های  $A_v$  و  $A_w$  برابر با  $O(n)$  می‌باشد. حال باید مقدار ماکزیمم هر سطر را برای محاسبه تابع هدف متناظر با مسئله مرکز روی همه سناریوها پیدا کنیم. برای این کار باید مؤلفه ماکزیمم هر سطر را در ماتریس‌های  $A_v$  و  $A_w$  پیدا کنیم. برای این منظور کافی است مؤلفه ماکزیمم هر سطر ماتریس  $A_v$  را پیدا کنیم. برای  $A_w$  نیز روند مشابه خواهد بود. برای پیدا کردن مؤلفه‌های

ماکزیمم هر سطر ماتریس  $A_v$  مؤلفه ماکزیمم سطر اول را پیدا کنید. فرض کنید

$$w_j^*(s_1)d(v_j^*, v) = \max_{1 \leq j \leq n} u_j(s_1)d(v_j, v),$$

یعنی  $v_j^*(s_1)$  نقطه‌ی کلیدی  $v$  روی سناریوی ۱ باشد. هم‌چنین، فرض کنید

$$u_k^*(s_1)d(v_k^*, v) = \max_{1 \leq j \leq n} u_j(s_1)d(v_j, v).$$

با استفاده از این مقادیر مشخص شده، مقدار ماکزیمم سطرهای بعدی و به عبارت دیگر مقدار ماکزیمم روی سناریوهای

بعدی نیز مشخص می‌شود. برای پیدا کردن مؤلفه ماکزیمم سطر  $i$  ام نیز به فرم زیر عمل می‌کنیم:

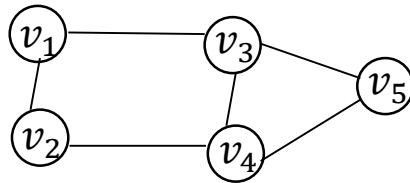
اگر  $i = j^*$ ، آن‌گاه مؤلفه  $i$ ام در سطر  $i$ ام نیز مؤلفهٔ ماکزیمم است. یعنی

$$u_i(s_i)d(v_i, v) = u_{j^*}(s_i)d(v_{j^*}, v) = \max_{1 \leq i \leq n} u_j(s_i)d(v_j, v).$$

اگر  $i, j^* \neq 1$ ، آن‌گاه مؤلفهٔ ماکزیمم سطر  $i$ ام، یا مؤلفهٔ  $i$ ام است یا مؤلفهٔ  $j^*$ . اگر  $j^* = 1$ ، آن‌گاه مؤلفهٔ ماکزیمم یا مؤلفهٔ  $k^*$  است یا مؤلفهٔ  $i$ ام یا مؤلفهٔ  $j^*$ ام. پس مؤلفهٔ ماکزیمم سطر اول در زمان  $O(n)$  و مؤلفهٔ ماکزیمم هر کدام از سطرهای دیگر در زمان  $O(3)$  پیدا می‌شود. پس زمان اجرای پیدا کردن ماکزیمم مقدار (در واقع مقدار تابع هدف مرکز) روی همه سناریوها در زمان  $O(n)$  صورت می‌گیرد. پس به ازای هر جفت رأس  $v$  و  $w$ ، روی همه سناریوها مقدار تابع هدف مرکز در زمان  $O(n^3)$  محاسبه می‌شود. گام ۶ الگوریتم چون به‌ازای هر جفت رأس مقدار تابع هدف مرکز-میانه را محاسبه می‌کند، در نتیجه زمان اجرای این گام  $O(n^3)$  است. گام ۷ و ۸ الگوریتم چون رأس‌های  $w^*$  و  $v^*$  را به ازای سناریوهای  $S_m \times S_c$  پیدا می‌کند در نتیجه هر کدام در زمان  $O(n^2)$  اجرا می‌شوند.

#### ۴. مثال عددی

در این بخش نتیجهٔ عددی به دست آمده از پیاده‌سازی روش برای حل مسئله مکان‌یابی مرکز-میانه رأسی استوار با وزن‌های رأسی بازه‌ای روی گراف‌های کلی را ارائه می‌دهیم. برای این منظور گراف زیر را در نظر بگیرید.



بازه‌های متناظر با وزن رأس‌ها و فاصله بین رأس‌ها به شرح زیر می‌باشد:

$$w_1 \in [1, 2], w_2 \in [1, 4], w_3 \in [1, 3], w_4 \in [1, 5], w_5 \in [1, 6]$$

$$u_1 \in [2, 3], u_2 \in [2, 5], u_3 \in [2, 4], u_4 \in [2, 6], u_5 \in [2, 7]$$

$$d(v_1, v_2)=1, d(v_1, v_3)=2, d(v_2, v_4)=3, d(v_3, v_4)=2, d(v_3, v_5)=1, d(v_4, v_5)=2$$

به ازای  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  و به ازای هر جفت رأس  $v$  و  $w$  مقادیر  $d(v_i, v) - d(v_i, w)$  را حساب کرده و  $w_i(s)$  متناظر با هر یک را به دست می‌آوریم.

به ازای  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  سناریوهای متناظر با تابع هدف مرکز را محاسبه می‌کنیم، در این صورت داریم:

در سناریو  $s_1$

$$u_1(s) = 3, u_2(s) = 2, u_3(s) = 2, u_4(s) = 2, u_5(s) = 2$$

در سناریو  $s_2$

$$u_1(s) = 2, u_2(s) = 4, u_3(s) = 2, u_4(s) = 2, u_5(s) = 2$$

در سناریو  $s_3$

$$u_1(s) = 2, u_2(s) = 2, u_3(s) = 5, u_4(s) = 2, u_5(s) = 2$$

در سناریو  $s_4$

$$u_1(s) = 2, u_2(s) = 2, u_3(s) = 2, u_4(s) = 6, u_5(s) = 2$$

در سناریو  $s_5$

$$u_1(s) = 2, u_2(s) = 2, u_3(s) = 2, u_4(s) = 2, u_5(s) = 7$$

به ازای هر جفت رأس  $v$  و  $w$  مقادیر تابع هدف مرکز روی سناریوهای  $s_1, s_2, s_3, s_4$  و  $s_5$  را محاسبه می‌کنیم. سپس به ازای هر  $v, w^*$  را که ماکزیمم مقدار دارد انتخاب می‌کنیم و از بین این ماکزیمم‌های به دست آمده، مینیمم مقدار را انتخاب می‌کنیم که رأس متناظر با آن رأس مرکز-میانه استوار خواهد بود. از آن جایی که تابع هدف دارای ضریبی از  $\lambda$  است، پس می‌توان برای آن مقادیر مختلفی در نظر گرفت. در نهایت به ازای  $v = v_3$  و  $w^* = v_4$  و مقدار تابع هدف  $10\lambda_1 + 5\lambda_2$ ، رأس  $v_3$  رأس مرکز-میانه استوار است.

## ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسأله مکان‌یابی مرکز-میانه‌ی رأسی استوار با وزن‌های رأسی غیرقطعی روی گراف‌های کلی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. معیار مورد استفاده برای حل مسأله در این مقاله معیار مینی-ماکس پشیمانی است. این مسأله با تابع هدفی که دارای ضریبی از  $\lambda$  بوده مورد بررسی قرار گرفت و الگوریتم چند جمله‌ای برای آن ارائه شد.

## References

1. Revelle CS., Swain RW., "Central facilities location", *Geographical Analysis*, 2 (1970) 30-42.
2. Toregas CR., Swain R. and Bergman L., "The location of emergency service facilities", *Operation Research*, 19 (1971) 1363-1373.
3. Berman O., Yang EK., "Medi-center location problems", *Journal of the Operational Research Society*, 42 (1991) 313-322.
4. Handler GY., "Medi-centers of a tree", *Transportation Science*, 19 (1985) 246-260.
5. Khumawala BM., "An efficient algorithm for the p-median problem with maximum distance constraints", *Geographical Analysis*, 5 (1973) 309-321.
6. Toregas CR., Revelle CS., "Optimal location under time or distance constraints", *Paper of the Regional Science Association*, 28 (1972) 131-143.
7. Halpern J., "The location of a center- median convex combination on an undirected tree", *Journal of Regional Science*, 16 (1976) 237-245.
8. Halpern J., "Finding minimal center-median convex combination (cent-dian) of a graph", *Management Science*, 24 (1978) 535-544.

9. Perez-Brito D., Moreno-Perez JA., and Rodriguez-Martin I., "The 2-facility centdian network problem", *Location Science*, 6 (1998) 369-381.
10. Tamir A., Perez-Brito D., and Moreno-perez JA., "A polynomial algorithm for the p-centdian problem on a tree", *Networks*, 32 (1998) 255-262.
11. Perez-Brito D., Moreno-Perez JA., "The generalized p-centdian on network", *Top*, 8 (2000) 265-285.
12. Halpern J., "Duality in the cent-dian of a graph, ", *Operations Research*, 28 (1980) 722-735.
13. Averbakh I., Berman O., "Algorithms for path medi-centers of a tree", *Computers & Operation Research*, 26 (1999) 1395-1409.
14. Tamir A., Puerto J. and Perez-Brito D., "The centdian subtree on tree networks", *Discrete Applied Mathematics*, 118 (2002) 263-278.
15. Colebrook M., Sicilia J., "A polynomial algorithm for the multicriteria cent-dian location problem", *European Journal of Operational Research*, 179 (2007) 1008-1024.
16. Wang H-L., "Maintaining centdians in a fully dynamic forest with top trees", *Discrete Applied Mathematics*, 181 (2015) 310-315.
17. Conde, E., "A note on the minmax regret centdian location on trees", *Operations Research Letters*, 36 (2008) 271-275.
18. Li, Hongmei, Taibo Luo, Yinfeng Xu, and Jiuping Xu. "Minimax regret vertex centdian location problem in general dynamic networks", *Omega*, 75 (2018) 87-96.
19. Soyster, A. L., "Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming." *Operations Research*, 21 (1973) 1154-1157.
20. Mulvey, John M., Robert J. Vanderbei, and Stavros A. Zenios. "Robust optimization of large-scale systems." *Operations Research*, 43 (1995) 264-281.
21. Ben-Tal, Aharon, and Arkadi Nemirovski. "Robust solutions of uncertain linear programs." *Operations Research letters* 25 (1999) 1-13.
22. Bertsimas, D., and Melvyn S. "The price of robustness." *Operations Research* 52 (2004) 35-53.