Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Goldie supplemented modules with respect to a preradical

Tayyebeh Amouzegar[1]

1. Department of Mathematics, Quchan University of Technology, Quchan, Iran.

E-mail: t.amouzgar@qiet.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
4 January 2020
Revised form:
10 January 2021
Accepted:
19 January 2021
Published online:
21 November 2022

Keywords:
H-supplemented module;
Strongly τ-H-supplemented module;
Goldie-τ-supplemented module.

ABSTRACT

Introduction

Throughout this paper R will denote an associative ring with identity, M a unitary right R-module. A functor $\tau$from the category of the right R-modules Mod-R to itself is called a preradicalif it satisfies the following properties:

(i) $\tau(M)$is a submodule of M, for every R-module M;

(ii) If $f: M' \to M$is an R-module homomorphism, then $f(\tau(M')) \leq \tau(M)$ and $\tau(f)$ is the restriction of $f$to $\tau(M')$.

For example Rad, Soc, and $Z_M$are preradicals. Note that if K is a summand of M, then $K \cap \tau(M) = \tau(K)$.

For a preradical τ, Al-Takhman, Lomp and Wisbauer defined and studied the concept of τ-lifting and τ-supplemented modules. A module M is called τ-lifting if every submodule N of M has a decomposition $N = A \oplus B$ such that A is a direct summand of M and $B \subseteq \tau(M)$.A submodule $K \subseteq M$ is called τ −supplement (weakτ-supplement) provided there exists some $U \subseteq M$such that $M = U + K$ and

$$U \cap K \subseteq \tau(K) \quad (U \cap K \subseteq \tau(M)).$$

M is called τ-supplemented (weakly τ-supplemented) if each of its submodules τ-supplement (weak τ-supplement) in M.Talebi, Moniri Hamzekolaei and Keskin-Tütüncü, defined τ-H-supplemented modules. A module M is calledτ-H-supplemented if for every $N \leq M$ there exists a direct summand D of Msuch that

$$(N + D)/N \subseteq \tau(M/N) \text{and} (N + D)/D \subseteq \tau(M/D).$$

The β^* relation is introduced and investigated by Birkenmeier, Takil Mutlu, Nebiyev, Sokmez and Tercan. Let X and Y be submodules of M. X and Yare β^* equivalent,

Xβ^*Y, provided $\frac{X+Y}{X} \ll \frac{M}{X}$ and $\frac{X+Y}{Y} \ll \frac{M}{Y}$.

Based on definition of β^* relation they introduced two new classes of modules namely

$Goldie^*$-lifting and $Goldie^*$ $-$supplemented.They showed that two concept of H-supplemented modules and $Goldie^*$ $-$lifting modules coincide.

In this paper, we introduce Goldie$-\tau-$supplemented and strongly τ-H-supplemented modules. We introduce the $\overline{\beta^*}$ relation. We investigate some properties of this relation and prove that this relation is an equivalence relation. We define Goldie$-\tau-$supplemented and strongly τ-H-supplemented modules. We call a module M, Goldie$-\tau-$supplemented (strongly τ-H-supplemented) if for any submodule N of M, there exists a τ-supplement submodule (a direct summand) D of M such thatN$\overline{\beta^*}$D. Clearly every strongly τ-H-supplemented module is Goldie τ -supplemented. We will study direct sums of Goldie τ -H-supplemented modules. Let $M = A \oplus B$ be a distributive module. Then M is Goldie τ -upplemented (strongly τ -H-supplemented) if and only if A and B are Goldie τ -supplemented (strongly τ -H-supplemented). We also define τ -H-cofinitely supplemented modules and obtain some conditions which under the factor module of a τ -H-cofinitely supplemented module will be τ -H-cofinitely supplemented.

Material and methods

In this paper, first we define and investigate the $\overline{\beta_\tau^*}$ relation on submodules of a module. We show that the $\overline{\beta_\tau^*}$relation is an equivalence relation. We apply this relation to define and investigate the classes of Goldie-τ -supplemented modules and stronglyτ-H-supplemented modules.

Results and discussion

We investigate some properties of this relation and prove that this relation is an equivalence relation. We define Goldie$-\tau-$supplemented and strongly τ-H-supplemented modules. We call a module M, Goldie$-\tau-$supplemented (strongly τ -H-supplemented) if for any submodule N of M, there exists a τ-supplement submodule (a direct summand) D of M such that N$\overline{\beta^*}$ D. Clearly every strongly τ -H-supplemented module is Goldie τ -supplemented. We will study direct sums of Goldie τ -H-supplemented modules. Let $M = A \oplus B$ be a distributive module. Then M is Goldie τ -upplemented (strongly τ -H-supplemented) if and only if A and B are Goldie τ -supplemented (strongly τ -H-supplemented). We also define τ -H-cofinitely supplemented modules and obtain some conditions which under the factor module of a τ -H-cofinitely supplemented module will be τ -H-cofinitely supplemented.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- Let $M = M_1 \oplus M_2$, where M_1 is a fully invariant submodule of M. Assume that τ is a cohereditary preradical. If M is strongly τ-H-supplemented, then M_1 and M_2 are strongly τ −H-supplemented.
- Let M be an τ-H-cofinitely supplemented module and let $N \leq M$ be a submodule. Suppose that for every direct summand K of M, there exists a submodule L of M such that $N \subseteq L \subseteq K + N$, L/N is a direct summand of M/N and$\frac{\frac{K+N}{N}}{L/N} \subseteq \frac{\tau\left(\frac{M}{N}\right)+\frac{L}{N}}{L/N}$. Then M/N is τ-H-cofinitelysupplemented.
- Let M be a module and let $N \leq M$ be a submodule such that for each decomposition $M = M_1 \oplus M_2$ we have $N = (N \cap M_1) \oplus (N \cap M_2)$. If M is τ-H-cofinitely supplemented, then M/N is τ-H-cofinitely supplemented.

How to cite: Amouzegar, T., (2022) Goldie supplemented modules with respect to a preradical. *Mathematical Researches*, 8 (3), 1-14

شاپا چاپی: ۲۵۸۸-۲۵۴۶
شاپا الکترونیکی: ۲۵۸۸-۲۵۵۴

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

مدول‌های گلدی مکمل‌پذیر در ارتباط با پیش رادیکال

طیبه آموزگار[۱]

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان، ایران. پست الکترونیکی: t.amouzgar@qiet.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۱۴
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۱۰/۲۱
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۳۰
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۹/۰۱

واژه‌های کلیدی:
مدول‌های-H مکمل‌پذیر،
مدول‌های به طور قوی τ-H-مکمل‌پذیر،
مدول‌های گلدی τ-مکمل‌پذیر.

چکیده

فرض کنید τ یک پیش رادیکال باشد. در این مقاله رابطه روی زیرمدول‌های یک مدول را تعریف و بررسی می کنیم. نشان می‌دهیم که رابطهٔ $\overline{\beta_\tau^*}$ یک رابطهٔ هم ارزی است. این رابطه را برای تعریف مدول‌های گلدی τ-مکمل‌پذیر و مدول‌های به طور قوی τ-H مکمل‌پذیر و بررسی ویژگی‌های آنها به کار می‌بریم.

استناد: آموزگار، طیبه؛ (۱۴۰۱). مدول‌های گلدی مکمل‌پذیر در ارتباط با پیش رادیکال. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۳)، ۱۴-۱.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

در این مقاله R حلقهٔ شرکت‌پذیر با عنصر همانی و M یک R-مدول راست یکانی است. نماد $N \leq^{\oplus} M$ نشان می‌دهد که N جمعوند مستقیم M است. $Rad(M)$ رادیکال جیکبسون[۱] از M را نشان می‌دهد. زیرمدول N را در M کوچک[۲] گویند و با $N \ll M$ نشان می‌دهند هرگاه برای هر $L \lneq M$، داشته باشیم $L + N \neq M$. مدول M را بالابرنده[۳] گویند هرگاه برای هر $A \leq M$، جمعوند مستقیم B از M وجود داشته باشد به طوری که $B \subseteq A$ و $A/B \ll M/B$ [۷].

فرض کنید K و N زیرمدول‌هایی از M باشند. K را یک مکمل[۴] از N در M گویند هرگاه $M = K + N$ و K نسبت به این ویژگی مینیمال باشد یا به طور معادل $M = K + N$ و $K \cap N \ll K$. M یک مدول مکمل پذیر[۵] نامیده می‌شود هرگاه هر زیر مدول از M دارای یک مکمل در M باشد. مطابق با [۷] مدول M، H-مکمل‌پذیر[۶] است هرگاه برای هر زیرمدول A از M جمعوند مستقیم D از M وجود داشته باشد به طوری که برای هر زیرمدول X از M، $A + X = M$ اگر و تنها اگر $D + X = M$.

در [۵]، اثبات شده است که M، H-مکمل‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر زیر مدول A از M جمعوند مستقیم D از M وجود داشته باشد به طوری که $\frac{A+D}{D} \ll \frac{M}{D}$ و $\frac{A+D}{A} \ll \frac{M}{A}$. مدول‌های H- مکمل‌پذیر در [۷] به عنوان تعمیم مدول‌های بالابرنده معرفی شده‌اند. برای اطلاعات بیشتر درباره مدول‌های H- مکمل‌پذیر به مراجع [۵]، [۶] و [۷] ارجاع می‌دهیم.

فانکتور τ از ردهٔ R-مدول‌های راست به خودش را یک پیش رادیکال[۷] گویند هرگاه در ویژگی‌های زیر صدق کند:

(۱) برای هر R-مدول M، $\tau(M)$ یک زیرمدول از M است.

(۲) اگر $f: M' \to M$ یک همریختی R-مدولی باشد، آن‌گاه $f(\tau(M')) \leq \tau(M)$ و $\tau(f)$ تحدید f به $\tau(M')$ است.

برای مثال Rad، Soc و Z_M پیش رادیکال هستند. توجه می‌کنیم که اگر K یک جمعوند مستقیم از M باشد آن‌گاه $K \cap \tau(M) = \tau(K)$. در [۲]، التخمان[۸]، لمپ[۹] و ویزباور[۱۰] مفهوم مدول های τ-بالابرنده و τ-مکمل‌پذیر، که در آن τ یک پیش رادیکال است، را بیان و مطالعه کردند. یک مدول M را τ-بالابرنده[۱۱] گویند هرگاه هر زیر مدول N از M دارای یک تجزیهٔ $N = A \oplus B$ باشد به طوری که A یک جمعوند مستقیم از M و $B \subseteq \tau(M)$. بنابر [۲]، یک زیرمدول $K \subseteq M$، τ-مکمل[۱۲] (τ-مکمل ضعیف[۱۳]) نامیده می‌شود هرگاه بعضی $U \subseteq M$ وجود داشته باشد به طوری که $M = U + K$ و $U \cap K \subseteq \tau(K)$ ($U \cap K \subseteq \tau(M)$). مدول M، τ-مکمل پذیر(τ-مکمل پذیر ضعیف) نامیده می‌شود هرگاه هر یک از زیر مدول های آن دارای یک τ-مکمل(τ-مکمل ضعیف) در M باشد. یک مدول M، τ-H-مکمل‌پذیر[۱۴] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $N \leq M$ یک جمعوند مستقیم D از M وجود داشته باشد به طوری که $\frac{N+D}{N} \subseteq \tau(M/N)$ و $\frac{N+D}{D} \subseteq \tau(M/D)$ [۹].

فرض کنید X و Y زیرمدول هایی از مدول M باشند. نویسندگان در [۳]، X و Y را هم ارز β^* نامیدند، $X\beta^*Y$، هرگاه $\frac{X+Y}{X} \ll$

---

[1] Jacobsonradical
[2] Small
[3] Lifting
[4] Supplement
[5] Supplemented
[6] H-Supplemented
[7] Preradical
[8] Al-Takhman
[9] Lomp
[10] Wisbauer
[11] τ-Lifting
[12] τ-Supplement
[13] Weakly τ-supplement
[14] τ-H- Supplemented

$\frac{M}{X}$ و $\frac{M}{Y} \ll \frac{X+Y}{Y}$. آنها بر اساس تعریف رابطهٔ β^* دو ردهٔ جدید از مدول‌ها به نام‌های گلدی *- بالابرنده و گلدی *-مکمل‌پذیر را معرفی کردند. آنها نشان دادند که دو مفهوم H-مکمل‌پذیر و گلدی *-بالابرنده بر هم منطبق هستند. نویسندگان در [۱۰]، برگرفته از [۳]، رابطه β^{**} را معرفی و با استفاده از این رابطه مدول‌های گلدی Rad-مکمل‌پذیر و H-Rad- -مکمل‌پذیر را تعریف و مطالعه کردند.

در این مقاله، با انگیزه از مراجع [۲]، [۳] و [۱۰]، مدول‌های گلدی τ-مکمل‌پذیر و به طور قوی τ-H-مکمل‌پذیر را معرفی و بررسی می‌کنیم. در بخش ۲، رابطه $\overline{\beta_\tau^*}$ را معرفی و بعضی از ویژگی‌های این رابطه را بررسی می کنیم. فرض کنید X و Y زیرمدول‌هایی از مدول M باشند. X و Y را نسبت به رابطه $\overline{\beta_\tau^*}$ هم‌ارز نامیم هرگاه $X + Y \subseteq \tau(M) + X$ و $X + Y \subseteq \tau(M) + Y$. نشان می‌دهیم این رابطه یک رابطهٔ هم ارزی است. در بخش ۳، مدول‌های گلدی τ-مکمل‌پذیر و به طور قوی τ-H-مکمل‌پذیر را تعریف می‌کنیم. با انگیزه از [۳] و بر اساس تعریف رابطهٔ $\overline{\beta_\tau^*}$ مدول M را گلدی τ-مکمل‌پذیر[۱۵] (به طور قوی τ-H-مکمل‌پذیر[۱۶]) گوییم هرگاه برای هر زیر مدول N از M، زیر مدول τ-مکمل (یک جمعوند D) از M وجود داشته باشد به طوری که $N\overline{\beta_\tau^*}D$. به وضوح هر مدول به طور قوی τ-H-مکمل‌پذیر، گلدی τ-مکمل‌پذیر است. در این متن مجموع مستقیم مدول‌های به طور قوی τ-H-مکمل‌پذیر و نیز گلدی τ-مکمل‌پذیر را بررسی خواهیم کرد. فرض کنید مدول $M = A \oplus B$ یک مدول توزیع‌پذیر باشد. در این صورت M، گلدی τ-مکمل‌پذیر (به طور قوی τ-H-مکمل‌پذیر) است اگر و تنها اگر A و B، گلدی τ-مکمل‌پذیر (به طور قوی τ-H-مکمل‌پذیر) باشند (قضیهٔ ۹). همچنین مدول‌های هم متناهی τ-H-مکمل‌پذیر را تعریف می‌کنیم و شرایطی را به دست می‌آوریم که تحت آنها مدول کسری از یک مدول هم متناهی τ -H-مکمل‌پذیر یک مدول هم متناهی τ-H-مکمل‌پذیر باشد.

رابطهٔ $\overline{\beta_\tau^*}$

در این بخش رابطهٔ $\overline{\beta_\tau^*}$ روی زیرمدول‌های یک مدول تعریف و بررسی می‌شود. فرض کنید X و Y زیرمدول‌هایی از مدول M باشند. X و Y را نسبت به رابطهٔ $\overline{\beta_\tau^*}$ هم‌ارز نامیم

هرگاه

$$X + Y \subseteq \tau(M) + Y \text{ و } X + Y \subseteq \tau(M) + X.$$

لم ۱. رابطهٔ $\overline{\beta_\tau^*}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

اثبات: ویژگی‌های تقارن و بازتابی بدیهی هستند. برای خاصیت تعدی، فرض کنید $X\overline{\beta_\tau^*}Y$ و $Y\overline{\beta_\tau^*}Z$ بنابراین داریم

$$X + Y \subseteq \tau(M) + X \quad ; \quad X + Y \subseteq \tau(M) + Y$$

$$Y + Z \subseteq \tau(M) + Y \quad ; \quad Y + Z \subseteq \tau(M) + Z.$$

[15]Goldie-τ-supplemented [16]Strongly τ-H-supplemented

به آسانی دیده می‌شود که $X + Z \subseteq \tau(M) + X$ و $X + Z \subseteq \tau(M) + Z$. در نتیجه $X\overline{\beta_\tau^*}Z$.$\square$

بدیهی است که هر زیرمدولی که مشمول در $\tau(M)$ باشد با زیرمدول صفر نسبت به رابطهٔ $\overline{\beta_\tau^*}$ هم‌ارز است. توجه می‌کنیم که دو زیرمدول ممکن است یکریخت باشند ولی نسبت به رابطهٔ $\overline{\beta_\tau^*}$ هم‌ارز نباشند. برای مثال، فرض کنید F یک میدان، $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$، $X = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$.

فرض کنید $\tau = Rad$. در این صورت X ، $R-$ یکریخت با Y لست اما X نسبت به رابطهٔ $\overline{\beta_{Rad}^*}$ با Y هم‌ارز نیست زیرا $Rad(R_R) = X$.

به علاوه، اگر $M = \mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ آن‌گاه $m\mathbb{Z}\overline{\beta_{Rad}^*}n\mathbb{Z}$ اگر و تنها اگر m و n توسط اعداد اول یکسانی تقسیم‌پذیر باشند.

گزارهٔ ۲. فرض کنید $f: M \to N$ یک یروریختی باشد. اگر $X, Y \leq M$ به طوری که $X\overline{\beta_\tau^*}Y$، آن‌گاه $f(X)\overline{\beta_\tau^*}f(Y)$.

اثبات: فرض کنید برای بعضی زیرمدول‌های X, Y از M، $X\overline{\beta_\tau^*}Y$. آن‌گاه $X + Y \subseteq \tau(M) + X$ و $X + Y \subseteq \tau(M) + Y$. بنابراین

$$f(X) + f(Y) \subseteq \tau(N) + f(X) \text{ و } f(X) + f(Y) \subseteq \tau(N) + f(Y).$$

این نتیجه می‌دهد که $f(X)\overline{\beta_\tau^*}f(Y)$. $\square$

گزارهٔ ۳. فرض کنید X_1، X_2، Y_1، و Y_2 زیرمدول‌هایی از M باشند به طوری که $X_1\overline{\beta_\tau^*}Y_1$ و $X_2\overline{\beta_\tau^*}Y_2$، در این صورت

$$(X_1 + X_2)\overline{\beta_\tau^*}(Y_1 + Y_2) \text{ و } (X_1 + Y_2)\overline{\beta_\tau^*}(Y_1 + X_2).$$

اثبات: فرض کنید $X_1\overline{\beta_\tau^*}Y_1$ و $X_2\overline{\beta_\tau^*}Y_2$. در این صورت

$$X_1 + Y_1 \subseteq \tau(M) + X_1; X_1 + Y_1 \subseteq \tau(M) + Y_1$$

$$X_2 + Y_2 \subseteq \tau(M) + X_2; X_2 + Y_2 \subseteq \tau(M) + Y_2.$$

بنا بر نامساوی‌های بالا داریم $(X_1 + X_2)\overline{\beta_\tau^*}(Y_1 + Y_2)$ و $(X_1 + Y_2)\overline{\beta_\tau^*}(Y_1 + X_2)$. $\square$

نتیجهٔ ۴. فرض کنید X ، $Y \leq M$ و $K \subseteq \tau(M)$. در این صورت $X\overline{\beta_\tau^*}Y$ اگر و تنها اگر $X\overline{\beta_\tau^*}(Y + K)$.

اثبات: $(\Rightarrow)$از گزارهٔ ۳ و این حقیقت که $0\,\overline{\beta_\tau^*}K$ نتیجه می‌شود.

$(\Leftarrow)$چون $K \subseteq \tau(M)$، داریم $Y\overline{\beta_\tau^*}(Y + K)$. نتیجه بنا بر ویژگی تعدی رابطهٔ $\overline{\beta_\tau^*}$ برقرار است.$\square$

نتیجهٔ ۵. فرض کنید X، Y_1، ....، $Y_n \leq M$ اگر $X\overline{\beta_\tau^*}Y_i$ برای هر $i = 1, \dots, n$، در این صورت $X\overline{\beta_\tau^*} \sum_{i=1}^n Y_i$.

مدول‌های گلدی τ-مکمل‌پذیر

در این بخش مدول‌های گلدی τ-مکمل‌پذیر و به طور قوی H-τ-مکمل‌پذیر را بررسی می‌کنیم.

تعریف. فرض کنید M یک مدول باشد.

(۱) M را گلدی τ-مکمل‌پذیر گوییم هرگاه برای هر زیرمدول N از M، یک زیرمدول τ-مکمل S در M وجود داشته باشد به طوری که $N\overline{\beta_\tau^*}S$.

(۲) M را به طور قوی H-τ-مکمل‌پذیر گویند هرگاه برای هر زیرمدول N از M جمعوند D از M وجود داشته باشد به طوری که $N\overline{\beta_\tau^*}D$.

بدیهی است که هر مدول به طور قوی H-τ-مکمل‌پذیر، H-τ-مکمل‌پذیراست و عکس آن زمانی برقرار است که τ پیش رادیکال هم‌ارثی باشد. به آسانی دیده می‌شود که هر مدول به طور قوی H-τ-مکمل‌پذیر، گلدی τ-مکمل‌پذیر است. توجه می‌کنیم که اگر M مدولی با این ویژگی باشد که هر زیرمدول τ-مکمل یک جمعوند مستقیم باشد، آن‌گاه گلدی τ-مکمل‌پذیر و به طور قوی H-τ-مکمل‌پذیر معادل یکدیگر هستند.

گزارهٔ ۶. فرض کنید M یک مدول باشد. در این صورت M، گلدی τ-مکمل‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $X \leq M$ یک زیرمدول τ-مکمل S از M وجود داشته باشد به طوری که

$$S + \tau(M) = X + \tau(M).$$

اثبات: فرض کنید M، مدول گلدی τ-مکمل‌پذیر باشد و $X \leq M$. در این صورت یک زیرمدول τ-مکمل S از M وجود دارد به طوری که $X + S \subseteq \tau(M) + X$ و $X + S \subseteq \tau(M) + S$. آن‌گاه

$$X + \tau(M) \subseteq S + \tau(M) \text{ و } S + \tau(M) \subseteq X + \tau(M).$$

بنابراین $S + \tau(M) = X + \tau(M)$. عکس به آسانی بررسی می‌شود $\square$.

نتیجهٔ ۷. فرض کنید M یک مدول باشد. اگر برای هر $X \leq M$، یک زیرمدول τ-مکمل S از M و یک $H \subseteq \tau(M)$ وجود داشته باشد به طوری که $X = S + H$، آن‌گاه M یک مدول گلدی τ-مکمل‌پذیر است.

اثبات: نشان می دهیم $X\overline{\beta_\tau^*}S$. از آن‌جا که

$$X + S = S + H \subseteq \tau(M) + S + H = \tau(M) + X$$

و $X + S = S + H + S \subseteq \tau(M) + S$، نتیجه می‌گیریم که $X\overline{\beta_\tau^*}S$. $\square$

نتیجه ۸. فرض کنید M یک مدول گلدی τ-مکمل‌پذیر باشد. در این صورت برای هر $X \leq M$ با $\tau(M) \subseteq X$، داریم $X = S + H$ که در آن S یک τ-مکمل در M و $H \subseteq \tau(M)$.

اثبات: فرض کنید $X \leq M$ به طوری که $\tau(M) \subseteq X$. بنا بر فرض یک زیرمدول τ-مکمل S از M وجود دارد به طوری که $X\overline{\beta_\tau^*}S$. سپس $S \subseteq X$ و $X = \tau(M) + (S \cap X) = \tau(M) + S$. □

تعریف. فرض کنید M یک مدول باشد. در این صورت M را توزیع‌پذیر[17] گویند هرگاه شبکهٔ زیرمدول‌های آن تشکیل شبکهٔ توزیع‌پذیر دهد، به طور معادل برای زیرمدول‌های K, L, N از M داشته باشیم،

$$N \cap (K + L) = (N \cap K) + (N \cap L) \text{ یا } N + (K \cap L) = (N + K) \cap (N + L).$$

قضیهٔ ۹. فرض کنید $M = A \oplus B$ یک مدول توزیع‌پذیر باشد. در این صورت M یک مدول گلدی τ-مکمل‌پذیر (به طور قوی τ-H-مکمل‌پذیر) است اگر و تنها اگر A و B گلدی τ-مکمل‌پذیر (به طور قوی τ-H-مکمل‌پذیر) باشند.

اثبات:$(\Rightarrow)$ فرض کنید $X \leq A$. در این صورت زیرمدول‌های S و L از M وجود دارند به طوری که $S + L = M$، $S \cap L \subseteq \tau(S)$ و $X\overline{\beta_\tau^*}S$. نشان می‌دهیم که $X\overline{\beta_\tau^*}(A \cap S)$. از آن‌جا که $X\overline{\beta_\tau^*}S$، داریم $X + S \subseteq \tau(M) + X$ و $X + S \subseteq \tau(M) + S$. از آن‌جا که $X \subseteq A$، به دست می‌آوریم

$$X + (A \cap S) \subseteq \tau(A) + X,$$
$$X + (A \cap S) \subseteq \big(\tau(A) + A \cap S + B \cap S + \tau(B)\big) \cap A.$$

بنا بر مدولاریتی داریم $X + (A \cap S) \subseteq \tau(A) + X$ و $X + (A \cap S) \subseteq \tau(A) + (A \cap S)$. سپس $X\overline{\beta_\tau^*}(A \cap S)$. بنا بر فرض داریم، $A = (A \cap S) + (A \cap L)$ و

$$(A \cap S) \cap (A \cap L) = A \cap S \cap L \subseteq A \cap \big(\tau(A \cap S) \oplus \tau(B \cap S)\big).$$

این نتیجه می‌دهد که $A \cap S \cap L \subseteq \tau(A \cap S)$. پس $A \cap S$ یک τ-مکمل از $A \cap L$ در A است. بنابراین A گلدی τ-مکمل‌پذیر است. به طور مشابه B گلدی τ-مکمل‌پذیر است.

$(\Leftarrow)$ فرض کنید $U \leq M, U_1 = A \cap U$ و $U_2 = B \cap U$. وجود دارند $L_1, S_1 \leq A$ به طوری که $L_1 + S_1 = A$، $U_1\overline{\beta_\tau^*}S_1$ و $L_1 \cap S_1 \subseteq \tau(S_1)$. همچنین وجود دارند $L_2, S_2 \leq B$ به طوری که $U_2\overline{\beta_\tau^*}S_2$، $L_2 + S_2 = B$ و $L_2 \cap S_2 \subseteq \tau(S_2)$. بنا برگزارهٔ ۲، $U\overline{\beta_\tau^*}(S_1 + S_2)$. به علاوهٔ $S_1 + S_2 + L_1 + L_2 = M$ و $(S_1 + S_2) \cap (L_1 + L_2) = (S_1 \cap L_1) + (S_2 \cap L_2) \subseteq \tau(S_1) + \tau(S_2) \subseteq \tau(S_1 + S_2)$ این نتیجه می‌دهد

[17]Distributive

که $S_1 + S_2$ زیرمدول τ- مکمل در M است. بنابراین M گلدی-τمکمل‌پذیر است. اثبات برای این‌که A و B به طور قوی τ-H-مکمل‌پذیر باشند مشابه است□.

تعریف. مدول M را فرا τ-مکمل‌پذیر[18] گویند هرگاه برای تمام زیرمدول‌های K و L از M با $K + L = M$، K شامل یک τ -مکمل τ مکمل از L در M باشد.

گزارهٔ ۱۰. هر مدول فراτ-مکمل‌پذیر، گلدیτ-مکمل‌پذیر است.

اثبات: فرض کنید M فراτ-مکمل‌پذیر و $X \leq M$. فرض کنید $X \subseteq \tau(M)$. واضح است $X\overline{\beta_\tau^*}0$. همچنین فرض کنید که $X \nsubseteq \tau(M)$. از آن‌جا که M به طور ضعیف τ-مکمل‌پذیر است، زیرمدول L از M وجود دارد به طوری که $X + L = M$ و $X \cap L \subseteq \tau(M)$.بنا بر فرض یک τ-مکمل S از L در X وجود دارد. پس $M = S + L$ و $S \cap L \subseteq \tau(S)$. چون $S \subseteq X$، داریم $X = S + (L \cap X) \subseteq \tau(M) + S$. این نتیجه می‌دهد که $X\overline{\beta_\tau^*}S$. بنابراین M گلدیτ-مکمل‌پذیر است□.

تعریف. فرض کنید M یک مدول باشد. زیرمدول U از M را به طور قوی شبه بالابرنده[19] (QSL) در M گویند اگر هر زمان که $(A + U)/U$ جمعوند مستقیم از M/U باشد، آن‌گاه جمعوند مستقیم P از M وجود داشته باشد به طوری که $P \leq A$ و $P + U = A + U$ (مرجع [۱] را ببینید).

قضیهٔ ۱۱. فرض کنید M یک مدول تصویری باشد به طوری که هر زیرمدول τ-مکمل از M یک جمعوند مستقیم باشد. فرض کنید τ پیش رادیکال هم ارثی باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(۱) M، τ-مکمل‌پذیر است.

(۲) M، τ -بالابرنده است.

(۳) M، فرا τ-مکمل‌پذیر است.

(۴) M، به طور قوی τ-H-مکمل‌پذیر و $\tau(M)$، QSL در M است.

(۵) M، گلدیτ-مکمل‌پذیر است و $\tau(M)$، QSL در M است.

اثبات: $(4) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (1)$ با استفاده از [۹, قضیهٔ ۶]. (۵) $\Leftrightarrow$ (۴) بدیهی است□.

تعریف. فرض کنید M یک مدول باشد. زیرمدول X از M را پایای کامل[20] گویند هرگاه برای هر $f \in End(M)$، $f(X) \subseteq X$.

[18] Amply τ-supplemented
[19] Quasi strongly lifting
[20] Fully invariant

قضیهٔ ۱۲. فرض کنید $M = M_1 \oplus M_2$، که در آن M_1 زیرمدول پایای کامل از M است. فرض کنید τ یک پیش رادیکال هم ارثی باشد. اگر M به طور قوی τ-H-مکمل‌پذیر باشد، آن‌گاه M_1 و M_2 به طور قوی τ-H-مکمل‌پذیر هستند.

اثبات: بدیهی است M_2 به طور قوی τ-H-مکمل‌پذیر است. نشان می‌دهیم که M_1 به طور قوی τ-H-مکمل‌پذیر است. فرض کنید K زیرمدول M_1 باشد. چون M به طور قوی τ-H-مکمل‌پذیر است، جمعوند مستقیم D از M وجود دارد به طوری که $K + D \subseteq \tau(M) + K$ و $K + D \subseteq \tau(M) + D$. قرار دهید $M = D \oplus D'$، که در آن $D' \leq M$. از آن‌جا که M_1 زیرمدول پایا از M است، داریم $M_1 = (M_1 \cap D) \oplus (M_1 \cap D')$. بنابراین $M_1 \cap D$ جمعوند مستقیم از M_1 است. می‌دانیم که $K + D \subseteq \tau(M) + K$ و $K + D \subseteq \tau(M) + D$. به آسانی دیده می‌شود که $K + (D \cap M_1) \subseteq \tau(M_1) + K$ و $K + (D \cap M_1) \subseteq \tau(M_1) + (D \cap M_1)$. پس M_1 به طور قوی τ-H-مکمل‌پذیر است□.

قضیهٔ ۱۳. فرض کنید $M = M_1 \oplus M_2$. همچنین فرض کنید برای هر زیرمدول N از M_1 جمعوند مستقیم K از M وجود دارد به طوری که $M_2 \leq K$، $N + K \subseteq \tau(M) + K$ و $N + K \subseteq \tau(M) + N$. دراین صورت M_1 به طور قوی τ-H-مکمل‌پذیر است.

اثبات: فرض کنید L زیرمدول M_1 باشد. بنا بر فرض، جمعوند مستقیم K از M وجود دارد به طوری که $M_2 \leq K,\ L + K \subseteq \tau(M) + K$ و $L + K \subseteq \tau(M) + L$. حال داریم $K = (K \cap M_1) \oplus M_2$. پس $K \cap M_1$ یک جمعوند مستقیم از M_1 است. به آسانی بررسی می‌شود که $L + (K \cap M_1) \subseteq \tau(M_1) + L$ و $L + (K \cap M_1) \subseteq \tau(M_1) + (K \cap M_1)$. بنابراین M_1 به طور قوی τ-H-مکمل‌پذیر است□.

تعریف. فرض کنید M_1 و M_2 مدول‌هایی باشند به طوری که $M = M_1 \oplus M_2$. گوییم M_1، τ-M_2–سجکتیو[21] است هرگاه برای هر $A \leq M$ که $M = A + M_2$، وجود داشته باشد $K \leq M$ به طوری که $M = K \oplus M_2$ و $K \subseteq \tau(M) + A$. M_1 و M_2 را نسبت به هم τ-سجکتیو گویند هرگاه M_1، τ-M_2–سجکتیو و M_2 نیز τ-M_1–سجکتیو باشد.

تعریف. مدول M، τ-$\oplus$–مکمل‌پذیر[22] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $A \leq M$، وجود داشته باشد $B \leq^{\oplus} M$ به طوری که $M = A + B$ و $A \cap B \leq \tau(B)$. واضح است که هرمدول τ-بالابرنده، τ-$\oplus$–مکمل‌پذیر است و هر مدول τ-$\oplus$–مکمل‌پذیر، τ-مکمل‌پذیر است.

تعریف. مدول M رامدول زوج[23] گویند هرگاه هر زیر مدول از M پایای کامل باشد [۴].

---

[21] τ-M_2-sejective
[22] τ-$\oplus$-supplemented
[23] Duo module

قضیهٔ ۱۴. فرض کنید $M = M_1 \oplus M_2$، $-\tau-\oplus$-مکمل‌پذیر و مدول زوج باشد. اگر M_1، τ -M_2 –سجکتیو (یا M_2، τ -M_1 –سجکتیو) باشد, آن‌گاه M، مدول به طور قوی τ-H-مکمل‌پذیر است.

اثبات: فرض کنید N زیرمدول از M باشد. چون M، $-\tau-\oplus$-مکمل‌پذیراست، تجزیه $M = M_1 \oplus M_2$ وجود دارد به طوری که $M = N + M_2$ و $N \cap M_2 \subseteq \tau(M_2)$ برای بعضی زیرمدول‌های M_1 و M_2. چون M_1، τ -M_2 –سجکتیو است، وجود دارد $K \leq M$ به طوری که $M = K \oplus M_2$ و $N + K \subseteq \tau(M) + N$. حال نشان می‌دهیم که $N + K \subseteq \tau(M) + K$.
چون M یک مدول زوج است، Nپایای کامل است و $N = (N + K) \cap (N + M2) = N + K$.پس $K \leq N$ و $N + K =$.
بنابراین $N = (N \cap M_2) \oplus K \subseteq \tau(M) + K$ به طور قوی τ-H-مکمل‌پذیر است ☐.

تعریف. زیرمدول N از M را هم متناهی[۲۴] در M گویند هرگاه مدول کسری $\frac{M}{N}$ به طور متناهی تولید شده باشد. مدول M را هم متناهی τ-H-مکمل‌پذیر[۲۵] گویند هرگاه برای هر زیرمدول هم متناهی Y از M، جمعوند D از M وجود داشته باشد به طوری که $Y + D \subseteq \tau(M) + D$ و $Y + D \subseteq \tau(M) + Y$.
بدیهی است که هر مدول به طور قوی τ-H-مکمل‌پذیر، هم متناهی τ -H-مکمل‌پذیراست. از طرف دیگر هر مدول هم متناهی τ-H-مکمل‌پذیر و به طور متناهی تولید شده، به طور قوی τ-H-مکمل‌پذیر است. مثال زیر نشان می‌دهد که برای $\tau = Rad$، هر مدول کسری از مدول‌های هم متناهی τ-H-مکمل‌پذیر نیازی ندارد مدول‌های هم متناهی τ-H-مکمل‌پذیر باشد. نشان می‌دهیم تحت بعضی شرایط این مطلب درست است.

مثال ۱۵. فرض کنید R یک حلقه موضعی نوتری جابه‌جایی باشد که حلقهٔ ایده‌آل اصلی نیست (به عنوان مثال $R = k[x^2, x^3]/(x^4)$ که در آن k یک میدان است یا می‌توانیم حلقه را $R = F[[x, y]]$ حلقه سری‌های توانی روی میدان F با متغیرهای x و y را انتخاب کنیم). آن‌گاه R یک حلقهٔ ارزیابی نیست. فرض کنید $n \geq 2$. بنابر [۱۱, قضیهٔ ۲]، زیرمدول L از R-مدول $M = R^{(n)}$ وجود دارد به طوری که R-مدول $N = M/L$ تجزیه‌ناپذیر است و N نمی‌تواند به وسیله کمتر از n عنصر تولید شود. لذا N، R-مدول موضعی نیست. پس بنابر [۸, گزاره ۲,۸]، N هم متناهی H-مکمل‌پذیر نیست. بنابراین N، هم متناهی $H - Rad$-مکمل‌پذیر نیست. توجه می‌کنیم که چون M/L نوتری است، M/L به طور متناهی تولید شده است و بنابراین $Rad(M/L) \ll M/L$ و در نتیجه N هم متناهی H-مکمل‌پذیر است اگر و تنها اگر N، هم متناهی- $H - Rad$ مکمل‌پذیر باشد. از طرف دیگر [۸, گزارهٔ ۲,۱] نشان می‌دهد که M، هم متناهی H-مکمل‌پذیر است و بنابراین هم متناهی $H - Rad$-مکمل‌پذیر است.

[24]Cofinite [25]τ-H-cofinitely supplemented

گزارهٔ ۱۶. فرض کنید M یک مدول هم متناهی τ -H-مکمل‌پذیر و $N \leq M$ باشد. فرض کنید برای هر جمعوند مستقیم K از M، یک زیرمدول L از M وجود داشته باشد به طوری که $N \subseteq L \subseteq K+N$، L/N جمعوند مستقیم از M/N و $(K+N)/N \subseteq \tau(M/N)+L/N$. در این صورت M/N، هم متناهی τ-H-مکمل‌پذیر است.

اثبات: فرض کنید $Y/N \leq M/N$ یک زیر مدول هم متناهی باشد. چون M، هم متناهی τ-H-مکمل‌پذیر است، جمعوند مستقیم K از M وجود دارد به طوری که $Y+K \subseteq \tau(M)+K$ و $Y+K \subseteq \tau(M)+Y$. بنا بر فرض، زیر مدول L از M وجود دارد به طوری که $N \subseteq L \subseteq K+N$، $\frac{L}{N}$ جمعوند مستقیم از $\frac{M}{N}$ و $\frac{K+N}{N} \subseteq \tau\left(\frac{M}{N}\right)+\frac{L}{N}$. بدیهی است که $Y/N+L/N \subseteq \tau(M/N)+L/N$. چون $Y+K \subseteq \tau(M)+Y$، داریم

$$\frac{Y}{N}+\frac{L}{N} \subseteq \frac{Y}{N}+\frac{K+N}{N} \subseteq \frac{\tau(M)+N}{N}+\frac{Y}{N} \subseteq \tau\left(\frac{M}{N}\right)+\frac{Y}{N}.$$

این اثبات را کامل می‌کند□.

گزارهٔ ۱۷. فرض کنید M یک مدول و $N \leq M$ یک زیرمدول باشد به طوری که برای هر تجزیهٔ $M = M_1 \oplus M_2$ داشته باشیم $N = (N \cap M_1) \oplus (N \cap M_2)$. اگر M، هم متناهی τ -H-مکمل‌پذیر باشد، آن‌گاه M/N، هم متناهی τ -H-مکمل‌پذیر است.

اثبات: فرض کنید D و D' زیرمدول‌هایی از M باشند به طوری که $M = D \oplus D'$. بنا بر فرض، داریم $N = (D \cap N) \oplus (D' \cap N)$. در این صورت

$$(D+N) \cap (D'+N) = [D \oplus (D' \cap N)] \cap [(D \cap N) \oplus D'] = (D \cap N) \oplus (D' \cap N) = N.$$

پس $M/N = [(D+N)/N] \oplus [(D'+N)/N]$. گزارهٔ ۱۶ نشان می‌دهد که M/N، هم متناهی τ-H-مکمل‌پذیر است□.

نتیجهٔ ۱۸. (۱) اگر M یک مدول هم متناهی τ-H-مکمل‌پذیر و N زیر مدول پایای کامل از M باشد، آن‌گاه M/N، هم متناهی τ -H-مکمل‌پذیر است.

(۲) اگر M، هم متناهی τ-H-مکمل‌پذیر مدول زوج باشد، آن‌گاه هر جمعوند مستقیم از M، هم متناهی τ-H-مکمل‌پذیر است.

اثبات: از گزارهٔ ۱۷ نتیجه حاصل می‌شود□.

تشکر و قدردانی

این مقاله نتیجهٔ طرح تحقیقاتی مصوب دانشگاه صنعتی قوچان به شماره قرارداد ۸۶۴۴ در تاریخ ۱۳۹۹/۱۲/۱۷ می‌باشد.

References

1. Alkan M., On τ-lifting Modules and τ-semiperfect Modules, *Turk. J. Math.*, 33 (2009), 117–130.

2. Al-Takhman K., Lomp C. and Wisbaure R., τ-complemented and τ-upplemented modules, *Algebra Discrete Math.*, 3 (2006), 1-15.

3. BirkenmeierG. F., Takil MutluF., NebiyevC., Sokmez N. and TercanA., Goldie *-supplemented modules, *Glasg. Math. J.*, 52A (2010), 41–52.

4. Clark J., Lomp C., Vanaja N. and WisbauerR., *Lifting modules -supplements and projectivity in module theory*, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser, 2006.

5. KeskinD., Nematollahi M. J. and TalebiY., On H-supplemented modules, *Algebra Colloq.*, 18 (Spec 1) (2011), 915-924.

6. Koşan M. T. and KeskinD., H-supplemented duo modules, *J. Algebra Appl.* 6(6) (2007), 965-971.

7. Mohamed S. H. and MüllerB. J., *Continuous and Discrete Modules*, London Math. Soc. Lecture Notes Series 147, Cambridge, University Press, 1990.

8. TalebiY., Tribak R. and Moniri HamzekolaeiA. R., On H-Cofinitely supplemented Modules, *Bull. Iran. Math. Soc.*, 39 (2) (2013), 325-346.

9. TalebiY., Moniri Hamzekolaei A. R. and Keskin-TütüncüD., H-supplemented modules with respect to a preradical, *Algebra Discrete Math.*, 12 (1) (2011), 116–131.

10. TalebiY., Moniri Hamzekolaei A. R. and TercanA., Goldie-Rad-supplemented modules, *An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa*, 22(3) (2014), 205–218.

11. WarfieldR.B., Jr., Decomposability of finitely presented modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 25 (1970) 167-172.

12. WisbauerR., *Foundations of module and ring theory*, Gordon and Breach, Reading, 1991.