



Kharazmi University

Coloring in the Topology

Hamid Erfanian Oraei Dhsorkhi¹ , Majid Erfanian Oraei² 

1. School of Mathematics and Computer Science, Damghan University, Damghan, Iran.

✉ E-mail: hamiderfanian23@yahoo.com

2. Department of Science, School of Mathematical Sciences, University of Zabol, Zabol, Iran.

E-mail: erfanian@uoz.ac.ir

Article Info

ABSTRACT

Article type:

Research Article

Article history:

Received:

23 December 2018

Revised form:

6 July 2020

Accepted:

26 August 2020

Published online:

21 May 2022

Keywords:

coloring number;
coloring map;
topological surfaces.

Introduction

The aim of this study, is painting of topological surfaces with the least number of colors without the distance, and the colors have a border. For this purpose, we need a color mapping. In this mapping, we have not any fixed point, and we can colorable the map with least colors.

Definition: Let $f: X \rightarrow X$ be a graph without a fixed point. f is colorable with k colors, if there is $C = \{C_1, \dots, C_k\}$, where all C_i do not include $\{(x, f(x))\}$. Or similarly, for every $i = 1, \dots, k$, there is the equation $C_i \cap f(C_i) = \emptyset$.

Also, we define some concepts such as Compression, Metric, or non-Compression of space. Also, to achieve the desired result of each space, we change the properties of the maps.

Material and methods

In this work, first, we define the properties and conditions of the color mapping and color number. Also, by the study of properties of each space, we choose the best of space. One of the best conditions of this space is the lowest color number and higher efficiency. Finally, we proved that this number is finite, and we can do coloring space with some maps and conversely.

Results and discussion

In this work, we define the properties and conditions of the color mapping and color number. We presented some theorems and Lemma in the article and proved them for coloring of any space by coloring map, the coloring number is

at least 3 and at most is a $n+3$. Also, we proved the coloring number finite and we can do coloring space with some maps and conversely.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- the coloring number is at least 3.
- the coloring number is at most $n+3$.
- coloring number is finite and we can do coloring space with some maps.
- We can do the coloring of any space by the finite coloring map.

How to cite: Erfanian Oraei Dhsorkhi, H., Erfanian Oraei, M; (2022) Coloring in the Topology. *Mathematical Researches*, 8 (2), 1-14



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

رنگ‌پذیری در توپولوژی

حمید عرفانیان اورعی دهرخی^۱ ✉، مجید عرفانیان اورعی^۲

۱. نویسنده مسئول، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه دامغان، دامغان، ایران. پست الکترونیکی: hamiderfanian23@yahoo.com
۲. گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه زابل، زابل، ایران. پست الکترونیکی: erfanian@uoz.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	
تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۰۲	در این مطالعه هدف بیان نحوه رنگ آمیزی سطوح توپولوژیکی به صورتی که رنگ‌ها دارای مرز اما بدون فاصله و با کمترین عدد رنگی است. اینکه یک سطح را می‌توان با حداقل چه تعداد رنگ رنگ‌آمیزی کرد به صورتی که شرایط ایجاد تعریف یک نوع نگاشت با شرط بدون نقطه ثابت بودن را همراه داشته باشد. این نگاشت را نگاشت رنگی نامیده و در شرایط مختلف فضا مانند فشردگی یا پارافشرده‌گی، نرمال یا متریک بودن و پیوستگی و... مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرد و متناسب با نوع هر فضا خواص مربوط به نگاشت‌ها را تغییر داده تا نتیجه مورد نظر حاصل شود. در ادامه با اثبات قضایا و لم‌های متعدد، عدد رنگی منسوب به هر یک از نگاشت‌ها با شرایط مختص به آن به دست آورده و اثبات می‌شود که به جز یک استثنا که در متن به آن اشاره شده است این عدد از حداقل ۳ البته و بسته به شرایط خاص هر فضا تا حداکثر $n+3$ افزایش می‌یابد. که n می‌تواند بسته به شرایط متناهی هم باشد.
واژه‌های کلیدی:	
نگاشت‌های رنگی، عدد رنگی، پوشش نقطه‌ای، پیوستگی، فشردگی.	

استناد: عرفانیان اورعی دهرخی، حمید؛ عرفانیان اورعی، مجید؛ (۱۴۰۱). رنگ‌پذیری در توپولوژی. پژوهش‌های ریاضی، ۸ (۲)، ۱-۱۴.



© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

در این مطالعه هدف رنگ آمیزی سطوح توپولوژیکی با بکارگیری نگاشت است، به این صورت که ابتدا با بررسی نوع فضا نگاشتی را متناسب با آن تعریف کرده به طوریکه کمترین عدد رنگی را نتیجه بدهد. این نگاشت‌ها یک سری تعاریف مشخص خواهند داشت مثل نقطه ثابت بودن و باقی خواص مربوط به آنها همچون پیوستگی و ... متناسب با نوع فضا تغییر خواهد کرد. تعریف زیر که به تعریف نگاشت‌های رنگی معروف است یک دید کامل از چگونگی انتخاب و نحوه عمل نگاشت‌های رنگی را نشان می‌دهد.

تعریف ۱.۱. فرض $f : X \rightarrow X$ تابع بدون نقطه ثابت باشد. f را با k رنگ، رنگ پذیر گویند اگر پوشش بسته $C = \{C_1, \dots, C_k\}$ وجود داشته باشد، به طوری که C_i ها شامل جفت $\{x, f(x)\}$ نباشند. یا به طور مشابه برای هر $i = 1, \dots, k$ رابطه $C_i \cap f(C_i) = \emptyset$ برقرار باشد.

نتیجه بسیار ساده اما کلیدی در تعریف بالا این است که در پوشش C هر C_i یک رنگ و به طور مستقیم $f(C_i)$ نیز رنگ خواهد بود و با توجه به شرط مذکور به راحتی می‌توان نتیجه گرفت $f^{-1}(C_i)$ هم رنگ است. پس در یک نگاه اجمالی می‌توان بیان کرد که حداقل عدد رنگی یک نگاشت، عدد k است. آن چه در رنگ پذیری نگاشت‌ها از اهمیت بسیاری برخوردار است نوع فضا و نوع پوشش تعریف شده بر روی آن است، از آن جا که امکان بررسی تمام فضاها از حوصله این بحث به دور است لذا برای یکسان سازی در کل بحث تمام فضاها را سدورف فرض می‌شود. در صورت استفاده از سایر فضاها در شروع قضیه به آن اشاره خواهد شد.

قضیه ۱ معروف به قضیه رنگی یا همان رنگ پذیری نگاشت‌ها است. اثبات این قضیه و خوانش‌های ساده‌تر آن، هدف اصلی این مطالعه است.

قضیه ۱. فرض X فضای پارافشرده و $\dim X \leq n$ باشد. در نتیجه هر همسان ریختی بدون نقطه ثابت از X به خودش، با $n + 3$ رنگ، رنگ پذیر است.

نکته مورد توجه در این قضیه این است که اگرچه فشردگی از پارافشرده‌گی قوی‌تر است، اما در این قضیه به جای همسان ریختی‌ها نمی‌توان از نگاشت‌های پیوسته استفاده کرد. یعنی اگر لازم باشد از نگاشت‌ها پیوسته استفاده شود، باید شکل آن به صورت قضیه شماره ۲ تغییر یابد. این نشان می‌دهد دقت در انتخاب نوع نگاشت از اهمیت بسیاری برخوردار است.

قضیه ۲. فرض X یک فضای فشردده با $\dim X \leq n$ باشد. هر نگاشت پیوسته بدون نقطه ثابت، از X به خودش، رنگ پذیر با $n + 3$ رنگ است.

اثبات. [۱] □

با استفاده از تعریف زیر کلیدی از نحوه اثبات قضیه ۱ را می‌توان بیان کرد.

تعریف ۲. بزرگترین عنصر در خانواده $C(X)$ از همه فشردده سازی‌ها، از یک فضای تیخونوف مثل X را فشردده سازی استون - چخ گویند و با βX نشان می‌دهند.

βX در اصل یک فضای هاسدورف فشرده همراه با یک نگاشت پیوسته از X است، با این شرط که هر نگاشت پیوسته مانند $f: X \rightarrow K$ زمانی که K یک فضای فشرده هاسدورف باشد، تنها به یک صورت منحصر به فرد قابل ارتقاء به نگاشت پیوسته $\beta f: \beta X \rightarrow K$ باشد. باتوجهبه تعریف بالا طرح اثبات قضیه ۱ به این صورت خواهد شد که فضای X به فضای استون-چخ βX گسترش می‌یابد. همچنین به راحتی می‌توان اثبات کرد که رابطه $\dim X = \dim \beta X$ برقرار است. حال فرض $f: X \rightarrow X$ یک همسانریختی و X فشرده باشد و نشان داده می‌شود ایننگاشت با یک نگاشت بدون نقطه ثابت (حتی یک همسانریختی) روی یک فضای متریک فشرده که بعد آن نایبشتر از بعد X است، مزدوج است. فضای Y بایستی دارای "نمایش والمن" از یک خانواده از صفر-مجموعه‌های X که با دقت انتخاب شده اند، باشد. در واقع رنگ آمیزی $\{A_1, \dots, A_{n+3}\}$ از نگاشت ساخته شده روی Y رنگ آمیزی $\{\mathbb{Q}^{-1}(A_1), \dots, \mathbb{Q}^{-1}(A_{n+3})\}$ را برای نگاشت f ایجاد می‌کند که این همان عدد $n+3$ را برای عدد رنگی نگاشت اثبات می‌کند. برای رسیدن به این هدف، نوع فضا و بیان خواص مورد نیاز برای آن از اهمیت زیادی برخوردار است. لم ۱ این فضا و خواص آن را ارائه می‌دهد.

لم ۱. فرض X فضای هاسدورف فشرده باشد، در این صورت احکام زیر برقرار می‌باشند:

$$(۱). \dim X \leq n.$$

(۲). پایه B از صفر-مجموعه‌ها وجود داشته باشد، به طوری که برای هر مجموعه متناهی $\mathcal{h} \subseteq B$ به شرط این که:

$$\mathcal{h} \cap \mathcal{h} = \emptyset \text{ با } C \subseteq B \text{ خواص زیر موجود باشد:}$$

(a) برای هر عنصر $G \in C$ ، وجود دارد $F \in \mathcal{h}$ به طوری که $F \in G$

$$(b). \mathcal{h} \cap C = \emptyset.$$

(c) هر زیرمجموعه از G با بیشتر از $n+3$ عنصر، پوششی از X است.

اثبات. [۲]. □

لم ۲. برای مجموعه شمارای $S \subseteq Z(X)$ ، مجموعه شمارای $T \subseteq Z(X)$ وجود دارد، به طوری که رابطه $T \supseteq S$ که دارای خواص ۶-۱ از لیست (*) است، برقرار می‌باشد.

اثبات. [۷]. □

لیست (*):

$$(۱). \{\emptyset, X\}.$$

(۲). برای $S, T \in \mathcal{T}$ داریم $\{S \cap T, S \cup T\} \in \mathcal{T}$.

(۳). برای $T \in \mathcal{T}$ رابطه $\{f^{-1}(x), f(x)\} \in \mathcal{T}$ برقرار است.

(۴). شبکه منظم \mathcal{T} نرمال است به طوری که برای هر $S, T \in \mathcal{T}$ مجزا، وجود دارد H, G متعلق به \mathcal{T} به طوری که

$$G \cap S = \emptyset = T \cap H = X$$

(۵). برای هر $T \in \mathcal{T}$ رابطه $T_n \in \mathcal{T}$ به طوری که $\{X \setminus T\} = \cup \{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ برقرار است.

(۶). برای هر مجموعه متناهی $\mathcal{h} \subseteq T$ به شرط $\mathcal{h} \cap \emptyset = \emptyset$ مجموعه متناهی $C \subseteq T$ با خواص زیر وجود دارد:

$$C = \emptyset. (a)$$

(b) هر زیر مجموعه از C با بیشتر از $n + 1$ عنصر پوششی از X است.

(c) برای هر عنصر $G \in C$ وجود دارد یک \tilde{h} در F به طوری که $F \subset \tilde{h}$ برقرار باشد.

(۷). زیر مجموعه متناهی $\{C_1, \dots, C_k\}$ از \mathcal{T} وجود دارد و برای هر $1 \leq i \leq k$ رابطه $f(C_i) \cap C_i = \emptyset$ و $C_1, \dots, C_k = X$ برقرار خواهد شد.

تعریف ۳. نگاشت $f^* : Y \rightarrow Y$ به طور ضعیف مزدوج گویند اگر نگاشت بدون نقطه ثابت (یا حتی یک همسان ریختی) مثل $X \rightarrow Y$ وجود داشته باشد، به قسمی که $\phi f = f^* \phi$ برقرار باشد. برای این منظور کافی است یک مزدوج سازی بین $f : X \rightarrow X$ و $f^* : Y \rightarrow Y$ ساخته شود.

اثبات قضیه ۱: نگاشت $\phi : X \rightarrow Y$ با تعریف $\phi(x) = \{s \in T : x \in S\}$ را در نظر بگیرید، واضح است که $\phi(x) \in Y$ توسط X فشرده شده است. همچنین ϕ پوشا است، بنابراین روابط زیر به سادگی به دست می آیند:

$$\phi^{-1}(S^*) = S \text{ و } \phi(S) = S^*$$

در نهایت تابع پیوسته $f^* : Y \rightarrow Y$ به صورت $f^*(\tilde{h}) = \{f(F) : F \in \tilde{h}\}$ تعریف می شود بر این اساس رابطه $\in Y$ $f^*(\tilde{h})$ واضح است. حال تساوی های زیر به راحتی قابل اثبات است:

$$f^*(S^*) = (f(S))^* \text{ و } (f^*)^{-1}(S^*) = (f^{-1}(S))^*$$

بدیهی است f^* پیوسته است. به راحتی می توان نشان داد که f^* یک همسان ریختی بدون نقطه ثابت است. در حقیقت $Y = C_1^* \cup \dots \cup C_k^*$ است و $f(C_i) \cap C_i = \emptyset$ نشان می دهد که رابطه زیر برقرار است:

$$(f(C_i))^* \cap C_i^* = \emptyset \text{ و } f^*(C_i^*) \cap C_i^* = \emptyset$$

در نهایت اگر برای نگاشت های تعریف شده ϕ و f^* در بالا نشان داده شود که:

$$\phi f = f^* \phi$$

اثبات قضیه به پایان می رسد که این امر به سادگی با توضیحات بیان شده قبل بیان اثبات قضیه انجام پذیر است \square

۲. استفاده از چند نگاشت روی یک فضا

گاهی یک فضا را نمی توان با یک پوشش به تنهایی پوشش داد و لازم است از چند پوشش نا همگون استفاده کرد. حال یک سوال این جا ذهن را معطوف به خود می کند، آیا می توان از چند نگاشت همزمان بر روی یک فضا بهره برد؟ برای پاسخ به این سوال ابتدا با شرایطی که برای این کار لازم است را ایجاد کرد. به این منظور ابتدا تعریف نگاشت رنگی که در ابتدا متن بیان شده را باید به شکل زیر تغییر داد.

تعریف ۴. فرض برای $1, \dots, l$ نگاشت های بدون نقطه ثابت $f_j : X \rightarrow X$ موجود باشند، آن ها را با k رنگ، رنگ پذیر گویند، اگر پوشش بسته $C = \{C_1, \dots, C_k\}$ موجود و شرط $f_j(C_i) \cap C_i = \emptyset$ برای $1 \leq j \leq l$ و $1 \leq i \leq k$ برقرار باشد، آن گاه عناصر C را رنگ و خود آن را رنگ آمیزی برای f_1, \dots, f_l گویند.

حال با توجه به تعریف بالا قضیه زیر می تواند به بیان عدد رنگی این نوع نگاشت ها پردازد.

قضیه ۳. [۹] فرض X یک فضای پارافشرده با $\dim X \leq n$ باشد و $f_i: X \rightarrow X$ برای $1 \leq i \leq l$ همسان‌ریختی بدون نقطه ثابت از X باشد و فرض $g_j: X \rightarrow X$ برای $1 \leq j \leq k$ نگاشت بدون نقطه ثابت از X به روی خودش باشد، پس $\{f_1, \dots, f_l, g_1, \dots, g_k\}$ به وسیله $n + 2l + k + 1$ رنگ، رنگ‌آمیزی می‌شود.

اثبات. [۷]. \square

مانند قضیه رنگی این‌جا هم اگر لازم باشد از نگاشت‌های پیوسته استفاده شود ملاحظه زیر از اهمیت خاصی برخوردار است.

ملاحظه ۱. برای نگاشت‌های پیوسته، قضیه بالا تنها زمانی برقرار است که ترکیب هر دو تابع به شکل $\{f_1, \dots, f_l, g_1, \dots, g_k\}$ با هم از دو جهت برابر باشند.

حال با استفاده از ملاحظه بالا می‌توان قضیه فوق را برای نگاشت‌ها پیوسته به صورت زیر بازنویسی کرد.

قضیه ۴. فرض X یک فضای فشرده با $\dim X \leq n$ و $f_i: X \rightarrow X$ برای $i = 1, \dots, l$ نگاشت پیوسته بدون نقطه ثابت از X به خودش باشد و فرض $g_j: X \rightarrow X$ برای $j = 1, \dots, k$ نگاشت بدون نقطه ثابت از X به خودش باشد، به طوری که هر دو تابع به شکل $\{f_1, \dots, f_l, g_1, \dots, g_k\}$ با هم مبدل باشند (ترکیب آنها با هم از دو جهت برابر است). در نتیجه $\{f_1, \dots, f_l, g_1, \dots, g_k\}$ به وسیله $n + 2l + k + 1$ رنگ، رنگ می‌شود.

اثبات. [۱]. \square

نکته مهم در دو قضیه بالا این است که برای به دست آوردن کران بالا برای عدد رنگی $n + 2l + k + 1$ بهترین کار انتخاب کران بالا برای n, l است. به شرطی که $k = 0$ یا $k = 1$ باشد.

ملاحظه ۲. برای مقادیر دیگر k هیچ نوع مثالی وجود ندارد.

حال این سوال به ذهن متبادر می‌شود که آیا می‌توان با یک نگاشت چند فضا را رنگ‌آمیزی کرد؟

در پاسخ به این سوال باید گفت انتخاب نوع فضا در انتخاب نگاشت متناسب با آن از اهمیت خاصی برخوردار است. در نتیجه تنها زمانی این سوال پاسخی مثبت خواهد داشت که نوع فضاها با هم یکسان باشد، یا دارای خواص مشابهی باشند. در این صورت کافی است اجتماعی از همه پوشش‌ها را به عنوان یک پوشش معرفی کرد و قضیه رنگی را برای آن پوشش پیاده نمود.

لازم به ذکر است عدد رنگی بسته به نوع توپولوژی معرفی شده بر روی فضا نیز متفاوت است. به عنوان مثال از معروفترین فضاهای توپولوژیک، فضای توپولوژیکی گسسته است، قضیه زیر عدد رنگی این نوع فضا را مشخص می‌کند.

قضیه ۵. نگاشت بدون نقطه ثابت $\varphi: D \rightarrow D$ روی فضای توپولوژیک گسسته با ۳ رنگ، رنگ پذیر است.

اثبات. [۳] □

۳. جایگزینی نگاشت‌های پیوسته با همسان‌ریختی‌ها

در این قسمت هدف استفاده نگاشت‌های پیوسته به جای همسان‌ریختی‌ها است، ایجاد شرایط لازم برای این کار با بیان متفاوتی از قضیه عدد رنگی به شکل زیر میسر می‌شود.

قضیه ۶. فرض X یک فضای نرمال با $\dim X \leq n$ و $f: X \rightarrow X$ یک همسان‌ریختی بدون نقطه ثابت باشد. اگر f متناهی یا رنگ‌پذیر باشد می‌توان آن را با $n+3$ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد.

حال با اثبات این قضیه می‌توان فهمید در کدام قسمت اثبات از خواص همسان‌ریختی‌ها استفاده شده است و بررسی کرد که با تغییر همسان‌ریختی به یک نگاشت پیوسته آیا خللی در اثبات ایجاد می‌شود یا نه. برای اثبات قضیه ۶ ابتدا نیاز به موارد کلیدی هست که با استفاده از اثبات قضیه ۷ به دست می‌آیند.

قضیه ۷. فرض X یک فضای نرمال با $\dim X \leq n$ که $n \leq \omega$ است و U یک پوشش باز متناهی از X با کاردینال $|U| \geq n+3$ باشد، نیز فرض $f: X \rightarrow X$ یک همسان‌ریختی باشد. در نتیجه تحدید باز $V = \{V_U : U \in U\}$ از U وجود دارد به طوری که برای هر تعداد $\mathfrak{h} \subseteq U$ به شرط $|\mathfrak{h}| = n+3$ رابطه $f^{-1}(V_U) \cap_{U \in \mathfrak{h}} V_U = \emptyset$ برقرار باشد.

به منظور اثبات این قضیه نیاز به طرح لم و گزاره به شرح زیر است.

لم ۳. فرض A, A_1, \dots, A_n زیرمجموعه‌های بسته از یک فضا باشند. همچنین فرض V_1, \dots, V_n زیرمجموعه‌های بازی از X باشند به این شرط که برای هر $i \leq n$ رابطه $A \cap A_i \subseteq V$ برقرار باشد، حال اگر روابط $\hat{A} = A \setminus \bigcup_{i=1}^n V_i$ و $\hat{A}_i = A \cap A_i \setminus V_i$ برقرار باشد، آن‌گاه برای $i \leq n$ روابط $\hat{A}_i \cup \bar{V}_i \subseteq \hat{A} \cup \bigcup_{i=1}^n \hat{A}_i$ و $A \cup \bigcup_{i=1}^n A_i \subseteq \hat{A} \cup \bigcup_{i=1}^n \hat{A}_i$ برقرار است.

اثبات. [۸] □

گزاره ۳. فرض X یک فضای نرمال با $\dim X \leq n$ و برای $i \leq m$ رابطه $F_i \subseteq U_j$ برقرار باشد، به طوری که F_i ها بسته و U_j ها باز باشند. در نهایت فرض برای $j \leq k$ هم رابطه $G_j \subseteq U_j$ برقرار باشد به طوری که G_j ها بسته و U_j ها باز باشند. اگر $m+k \geq n+3$ آن‌گاه زیرمجموعه‌های بسته $\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_m, \hat{G}_1, \dots, \hat{G}_k$ با خواص زیر وجود دارند:

$$1. \text{ برای } i \leq 1 \text{ و } \hat{F}_i \subseteq U_j \text{ و برای } j \leq k, \hat{G}_j \subseteq U_j$$

$$2. \bigcup_{j=1}^k G_j \subseteq \bigcup_{j=1}^k \hat{G}_j \text{ و } \bigcup_{i=1}^m F_i \subseteq \bigcup_{i=1}^m \hat{F}_i$$

$$3. \bigcap_{i=1}^m \hat{F}_i \cap \bigcap_{j=1}^k \hat{G}_j = \emptyset$$

اثبات. [۸] □

اثبات قضیه ۷. فرض \mathfrak{h} تحدید بسته ای از U و شامل $n+3$ عنصر متفاوت از U برای $m+k = n+3$ باشد. فرض روابط $\varphi = \{U_1, \dots, U_m, U'_1, \dots, U'_k\}$ برقرار باشد، در نتیجه عناصری از \mathfrak{h} متناظر با عناصر φ وجود دارند به طوری که برای $i \leq m$ و $j \leq k$ در نظر گرفتن $m+k = n+3$ روابط زیر برقرار است:

$$F_i \subseteq U_i \text{ و } f^{-1}[G_j] \subseteq f^{-1}[U_j]$$

به وسیله گزاره ۳ مجموعه‌های بسته A_1, \dots, A_m و B_1, \dots, B_k به دست می‌آیند که دارای خواص زیر می‌باشند:

$$(۱). \text{ برای } i \leq m, \hat{F}_i \subseteq U_i \text{ و برای } j \leq k, B_j \subseteq f^{-1}[U_j].$$

$$(۲). U_{j=1}^k f^{-1}[G_j] \subseteq U_{j=1}^k B_j \text{ و } U_{i=1}^m F_i \subseteq U_{i=1}^m A_i.$$

$$(۳). \bigcap_{i=1}^k A_i \cap \bigcap_{j=1}^k B_j = \emptyset$$

اگر در \hat{h} برای هر $i \leq m$ جای F_i با A_i تغییر یابد و برای هر $j \leq k$ به جای G_j از A_j استفاده شود و سایر عناصر ثابت نگه داشته شوند، برای $j \leq k$ رابطه $f[B_j] = A_j$ به وجود می‌آید. حال می‌توان ادعا کرد که خانواده به دست آمده \hat{h}' پوششی برای X است. بنابراین تحدیدی بسته از U به شمار می‌آید. عنصر تصادفی $x \in X$ را جدا کرده اگر $x \in U_{i=1}^m F_i$ برقرار باشد، از قسمت اول خاصیت (۲) استفاده می‌شود و اگر $x \in U_{j=1}^k G_j$ برقرار باشد، آن‌گاه با استفاده از قسمت دوم خاصیت (۲) نتیجه می‌شود:

$$f^{-1}(x) \in \bigcup_{j=1}^k f^{-1}[G_j] \subseteq \bigcup_{j=1}^k B_j$$

بر این اساس نتیجه منطقی برای $j \leq k$ به ازای هر $x \in A_j$ به دست می‌آید. در نهایت اگر x در هیچ کدام از عناصر H از \hat{h} نباشد در نتیجه متعلق به \hat{h}' است. همچنین بدیهی است که رابطه $\bigcap_{i=1}^m A_i \cap \bigcap_{j=1}^k A_j = \emptyset$ برقرار است.

فرض V یک تسعید باز مناسب از \hat{h}' و همزمان یک تحدید از U است. با استفاده از قضیه ۱۴.۱.۷ در [۸] این نتیجه به دست می‌آید که U یک تحدید باز مثل V دارد، به طوری که V و $f^{-1}(V)$ در ϕ با هم اشتراکی ندارند. با تکرار مکرر این روش با هر خانواده از V ها با کاردینال $n+3$ ، تحدیدی از U به دست خواهد آمد و اثبات تمام است. □

حال به راحتی می‌توان قضیه ۶ را اثبات کرد و جواب سوال مورد نظر را در آن یافت.

اثبات قضیه ۶. فرض k کوچکترین مقدار برای عدد رنگ آمیزی f باشد و پوشش $U = \{U_1, \dots, U_k\}$ رنگی برای آن باشد.

فرض خلف: فرض $k > n+3$ باشد. به راحتی می‌توان نشان داد اگر $j \neq i$ آن‌گاه $U_i \neq U_j$ برقرار است. به وسیله قضیه ۶ می‌توان بدون تغییر در اصل موضوع فرض کرد برای هر $\hat{h} \in U$ با کاردینال $n+3$ رابطه زیر برقرار است

(۲)

$$\bigcap_{U \in \hat{h}} f(U) \cup f^{-1}(U) = \emptyset$$

فرض $\hat{h} = \{F_1, \dots, F_k\}$ تحدیدی بسته از U باشد. برای $k-1 \leq i$ تعریف می‌شود:

$$B_i = F_i \cup (F_k \cap f[X \setminus U_i]) \cap B_i = \emptyset$$

حال می‌توان ادعا کرد که $\{B_1, \dots, B_{k-1}\}$ یک رنگ آمیزی برای f است. بنابراین رابطه $f(B_i) \cap B_i = \emptyset$ برقرار است. همچنین می‌توان رابطه $f(B_i) = f(F_i) \cup [f(F_k) \cap f^{-1}(X \setminus U_i) \cap (X \setminus U_i)]$ را اثبات کرد. این همان نتیجه‌ای است که باید اثبات می‌شد، بنابراین روابط زیر برقرار می‌باشند:

$$F_i \cap (X \setminus U_i) = \emptyset, F_k \cap f(F_k) = \emptyset, \quad F_i \cap f(F_i) = \emptyset$$

با توجه به پوشش J اولین نتیجه‌ای که می‌توان گرفت این است که رابطه $U_{i=1}^{k-1} F_i \subseteq U_{i=1}^{k-1} B_i$ برقرار است. حال کافی است اثبات شود که F_k یک پوشش است در این صورت اثبات تمام می‌شود. با انتخاب عنصر $x \in F_k$ مجموعه $\{f(U_i) \cup f^{-1}(U_i) : i \leq k-1\}$ مورد بررسی قرار می‌گیرد، می‌توان نتیجه گرفت که رابطه $n+2 \leq k-1$ برقرار است و با استفاده از رابطه (۲) می‌توان نشان داد که $i \leq k-1$ وجود دارد به طوری که:

$$x \notin f(U_i) \cup f^{-1}(U_i)$$

با توجه به اینکه در ابتدا رابطه $x \in B_i$ برقرار بود و تناقض آن با فرض خلف، نتیجه می‌دهد حکم برقرار است. □ اکنون با این داشته‌ها می‌توان به راحتی به سوال مطرح شده پاسخ داد، اینکه آیا در قضیه ۶ می‌توان به جای همسان‌ریختی‌ها از نگاشت‌های پیوسته استفاده کرد؟

در پاسخ به این سوال می‌توان گفت تنها زمانی که در اثبات قضیه ۶ از همسان‌ریختی‌ها استفاده شده است، اثبات قضیه ۷ می‌باشد. با در نظر گرفتن آن برای استفاده از نگاشت‌های پیوسته به جای همسان‌ریختی‌ها برای $n=0$ مشکلی به وجود نمی‌آید. به این صورت که فرض X صفر-بعدی باشد و U یک پوشش باز متناهی از X و $f: X \rightarrow X$ یک نگاشت پیوسته باشد، بنابراین $\dim X = 0$ است. از این رو تحدید باز $V = \{V_U : U \in U\}$ از U با $\text{ord}(V) \leq 0$ دارد به طوری که U ها دوه‌دو مجزا می‌باشند، اما V همچنان وابسته است. با این فرض که اگر $x \in X$ و تنها یک عنصر از V شامل x باشد، آن‌گاه به طور مشابه یک عنصر از $f^{-1}(V)$ شامل x است.

برای n های بزرگتر قضیه ۷ در مورد نگاشت‌های پیوسته کارایی ندارد.

قضیه ۸. فرض X فضای نرمال و $f: X \rightarrow X$ تابع پیوسته بدون نقطه ثابت باشد، اگر f متناهی یا رنگ‌پذیر $\dim X \leq n$ باشد، آن‌گاه f را می‌توان به وسیله $n+3$ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد.

اثبات. فرض U یک رنگ‌آمیزی متناهی از f باشد، بدون تغییر در اصل مساله می‌توان X را فشرده فرض کرد و به‌طور مشابه می‌توان $f: X \rightarrow X$ را به نگاشت پیوسته $\beta f: \beta X \rightarrow \beta X$ گسترش و U را به پوشش باز $ExU = \{ExU : U \in U\}$ از βX گسترش داد و $\dim X = \dim \beta X$ است. همچنین βX نقطه ثابت ندارد، چون U متناهی است. بنابراین یک تحدید خوب از ExU متناظر با βf است که اثر یک تحدید خوب از U متناظر با f است، حال می‌توان از اثبات پل در قسمت ۲.۳ [۱] برای به دست آوردن نتیجه مورد نظر استفاده کرد. □

۴. تبدیل $n+3$ به عددی متناهی

حال این موضوع مورد توجه قرار می‌گیرد که آیا عدد رنگی $n+3$ را می‌توان به یک عدد متناهی تبدیل کرد؟ یعنی آیا نگاشت‌های رنگ‌پذیر متناهی‌رنگ پذیرند؟

اولین بار فان داون [۶] اثبات کرد اگر X متناهی البعد و پارافشرده باشد، آن‌گاه هر نگاشت بدون نقطه ثابت بسته: $X \rightarrow X$ که برای مقدار $\omega < n$ و هر $x \in X$ دارای خاصیت $|f^{-1}(x)| \leq n$ باشد، متناهی یا رنگ‌پذیر است [۱۰]. در پاسخ به سوال مطرح شده قضیه زیر ارایه می‌شود تا نشان داده شود که $n+3$ می‌تواند متناهی باشد.

قضیه ۹. فرض X متناهی البعد و پارافشرده باشد پس هر خودسان‌ریختی بدون نقطه ثابت از X به خودش متناهی رنگ پذیر است.

لم زیر در اثبات این قضیه از اهمیت بالایی برخوردار است.

لم ۴. فرض X فضای نرمال با $\dim X \leq n$ باشد و $f: X \rightarrow X$ یک همسان‌ریختی باشد. حال فرض \mathfrak{h} مجموعه‌ای مجزا از زیرمجموعه‌های بسته از X باشد به طوری که برای هر $F \in \mathfrak{h}$ رابطه $f(F) \cap F = \emptyset$ برقرار باشد. در نتیجه زیرمجموعه‌های بسته A_1, \dots, A_{2n+3} از X وجود دارد به طوری که:

$$(a). \text{ برای هر } i \leq 2n+3 \text{ رابطه } f(A_i) \cap A_i = \emptyset$$

$$(b). \bigcup_{i=1}^{2n+3} A_i \subseteq \mathfrak{h}$$

اثبات قضیه ۹. فرض $f: X \rightarrow X$ خودسان‌ریختی بدون نقطه ثابت باشد. باید نشان داده شود که f با $(2n+3) * (n+1)$ رنگ، رنگ پذیر است، در حالی که $\dim X = n$ است.

بنابراین f بدون نقطه ثابت و X پارافشرده و n -بعدی است. حال پوشش باز موضعی متناهی $U = \{U_s\}_{s \in S}$ از X وجود دارد به طوری که رابطه $\text{ord}(U) \leq n$ برای آن برقرار باشد، علاوه بر این برای هر $s \in S$ رابطه $f(U_s) \cap U_s = \emptyset$ نیز برقرار است، پوشش باز V از X وجود دارد به طوری که مبین اجتماع $n+1$ خانواده از V_1, V_2, \dots, V_{n+1} است و $V_i = \{V_{i,s}\}_{s \in S}$ ها جفت به جفت مجزا هستند و برای $s \in S$ و $i \leq n+1$ رابطه $V_{i,s} \subseteq U_s$ برقرار است. قضیه ۴.۲.۳ در [۵] مشاهده شود. فرض \mathfrak{h} تحدید بسته از V باشد. با استفاده از قضیه ۱۸.۵.۱ در [۴] به سادگی نشان داده می‌شود که \mathfrak{h} اجتماع $n+1$ خانواده‌ای از $\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_{n+1}$ و $\mathfrak{h}_i = \{F_{i,s}\}_{s \in S}$ است. به طوری که برای $s \in S$ و $i \leq n+1$ رابطه $F_{i,s} \subseteq V_{i,s}$ برقرار است. در نتیجه برای هر $i, i \leq n+1$ ، \mathfrak{h}_i ‌های وجود دارد که مجزا هستند. بنابراین U موضعاً متناهی است. به راحتی می‌توان نشان داد برای هر $F \in \mathfrak{h}$ رابطه $f(F) \cap F = \emptyset$ برقرار است. این نشان می‌دهد برای هر i ، رابطه $f \upharpoonright U \mathfrak{h}_i$ به وسیله $2n+3$ رنگ، رنگ پذیر است و با استفاده از لم ۴ می‌توان نتیجه گرفت که f به وسیله $(2n+3) * (n+1)$ رنگ، رنگ پذیر است. \square

۵. رابطه بعد فضا با عدد رنگی

حال قضیه‌ای به نام قضیه الحاقی بیان می‌شود که به بررسی ارتباط عدد رنگی با بعد فضا می‌پردازد.

تعریف ۵. فرض $f: X \rightarrow X$ یک نگاشت بدون نقطه ثابت باشد، عدد رنگی $C(f)$ را کوچکترین کاردینال از رنگ آمیزی باز f گویند.

تعریف ۶. اگر $f: X \rightarrow X$ یک نگاشت بدون نقطه ثابت باشد، آن‌گاه زیرمجموعه A از X را ثابت گویند اگر رابطه $f(A) \subseteq A$ برقرار باشد.

برای زیرمجموعه ثابت A از X تحدید $f: A \rightarrow A$ را به وسیله f_A نشان می‌دهند.

قضیه ۱۰. فرض که X یک فضای متریک و $f: X \rightarrow X$ یک نگاشت بدون نقطه ثابت باشد. اگر برای زیرمجموعه‌های ثابت A و B از X تساوی $X = A \cup B$ برقرار باشد، در این صورت رابطه $C(f) \leq C(f_A) + C(f_B) - 1$ برقرار خواهد بود.

لم زیر در روند اثبات قضیه بالا از اهمیت زیادی برخوردار هستند.

لم ۵. فرض $f: X \rightarrow X$ در نتیجه زیرمجموعه باز W از X یک تابع بدون نقطه ثابت و A زیرفضایی ثابت از X و فرض که زیرمجموعه C از زیرفضای A نیز یک رنگ بسته از f_A باشد. در نتیجه زیرمجموعه باز W از X وجود دارد به طوری که درستی رابطه $f_A^{-1}(C) \subset W$ برقرار و W یک رنگ از f خواهد بود.

اثبات. رنگ‌های C و $f_A^{-1}(C)$ زیرمجموعه‌های بسته و مجزا از زیرفضای A هستند، بنابراین آنها زیرمجموعه‌های جداگانه‌ای از X هستند. از این رو زیرمجموعه‌های مجزای U و V از X وجود دارند به طوری که:

$$f_A^{-1}(C) \subset U \text{ و } C \subset V$$

با تعریف $W = U \cap f_A^{-1}(V)$ به راحتی نشان داده می‌شود که W یک رنگ باز و شامل $f_A^{-1}(C)$ است. \square

گزاره ۴. فرض $f: X \rightarrow X$ نگاشتی بدون نقطه ثابت و C یک مجموعه از n رنگی‌ها از f که باز یا بسته هستند، می‌باشد. در نتیجه یک رنگ آمیزی باز از f با کاردینال بیشتر از n وجود دارد.

اثبات. با استفاده از لم ۵ و قرار دادن $X = A$ می‌توان رنگ بسته B را در رنگ آمیزی $f_A^{-1}(C)$ از f با رنگ باز U جایگزین کرد به طوری که $B \subset A$ باشد. \square

گزاره بالا نشان می‌دهد عدد رنگی از یک نگاشت، کوچکترین کاردینال از پوشش‌های X است که شامل رنگ‌های باز یا بسته است.

لم زیر رابطه رنگ آمیزی باز از زیرفضای ثابت با یک مجموعه از رنگ‌های باز از فضا را نشان می‌دهد.

لم ۶. فرض $f: X \rightarrow X$ یک نگاشت بدون نقطه ثابت باشد و زیرمجموعه A از X یک زیرفضای ثابت، فرض μ یک رنگ آمیزی از f_A شامل m رنگ که $m \in \mathbb{N}$ باشد. در نتیجه مجموعه V شامل بیشتر از m رنگ باز از f وجود خواهد داشت به طوری که $A \subset UV$ باشد.

اثبات. به طور استاندارد، زیرفضای A شامل تحدید بسته C از μ وجود دارد. در نتیجه رنگ پذیری بسته از f_A است و رابطه $\tilde{h} = f_A^{-1}(C)$ به دست می‌آید. به وسیله لم ۵ برای هر عضو \tilde{h} از \tilde{h} یک رنگ باز V از f وجود دارد به طوری که $H \subset V$ است. بنابراین V را مجموعه همه این‌ها قرار داده و لم اثبات می‌شود \square

حال به راحتی می‌توان قضیه ۱۰ را اثبات نمود.

اثبات قضیه ۱۰. می‌توان فرض کرد که f_A و f_B هر دو عدد رنگی متناهی دارند. با قرار دادن $m = C(f_B)$ و $n = C(f_A)$ به وسیله لم ۶ خانواده‌های $V = \{V_j \mid j = 1, 2, \dots, m\}$ و $\mu = \{U_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ از رنگ‌های باز f به وجود می‌آیند که μ پوشش A و V پوشش B است. در نتیجه اجتماع $V \cup W$ یک رنگ آمیزی از f با $n + m$ رنگ است. اگر با برداشتن یکی از رنگ‌ها، پوشش $V \cup W$ همچنان رنگ آمیزی f باشد، آن‌گاه اثبات کامل می‌شود.

شود. مجموعه‌ای از مجموعه‌های باز به شکل $W = \{U_i | i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{V_j | j = 1, 2, \dots, m-1\}$ نظر گرفته و $R = X \setminus U \cup W$ تعریف کرده حال می‌توان ادعا کرد که R یک رنگ بسته از f است.

اثبات ادعا:

به این منظور ابتدا باید نشان داد که R یک رنگ است. قبلاً اثبات شد که $f^{-1}(R) \cap R = \emptyset$ برقرار است، اکنون فرض $f(y) \in R$ باشد، بدون تغییر در اصل مساله می‌توان فرض کرد که $y \in A$ بنابراین A ثابت و $f(y) \in R$ است، در نتیجه $f(y) \in R$ است. بنابراین رابطه $f(y) \in U_n$ برقرار می‌باشد، در نتیجه U_n یک رنگ است و y متعلق به U_n نیست، با توجه با اینکه برای هر $i < n$ ، y متعلق به U_i است، در نتیجه y متعلق به R نیست و چون $f^{-1}(R) \cap R = \emptyset$ پس R یک رنگ است و ادعا اثبات می‌شود.

مجموعه $W \cup \{R\}$ یک رنگ آمیزی از f است و عناصر آن باز یا بسته هستند. طبق گزاره ۴ عدد رنگی f بیشتر از $n + m - 1$ است. \square

۶. نتایج اصلی

در این مطالعه ابتدا راهی برای رنگ آمیزی سطوح توپولوژیکی پیدا می‌شود و نشان داده می‌شود که سطوح مختلف قابلیت رنگ آمیزی به وسیله نگاشت‌های خاصی را دارا می‌باشند. تعاریف مربوط به نگاشت‌های رنگی متناسب با هر فضا و هر نوع نگاشت را بیان کرد و نشان داد که تعریف نگاشت‌های رنگی از انعطاف بسیاری برخوردار است. در ادامه به نحوه تخصیص این نگاشت‌ها به هر فضا بسته به نوع و نیاز آن پرداخت. عدد رنگی برای هر فضا را بسته به نوع و خواص آن بدست آورد به نشان داد که حداقل آن چند و حداکثر تا چه مقدار می‌تواند باشد. نشان داد که یک فضا را می‌توان با چند نگاشت رنگ آمیزی کرد اما یک نگاشت را نمی‌توان همزمان برای چند فضا بکار برد و عدد رنگی مربوط به آن را نیز پیدا کرد. در نهایت رابطه مستقیمی بین عدد رنگی و بعد فضا ایجاد و نشان داد که آنها از هم منفک نیستند.

References

1. Aarts, J. M., Fokkink, R. J., Vermeer, H. (1996). Variations on a theorem of Lusternik and Schnirelmann. *Topology*, 35(4), 1051-1056
2. Aarts, J. M., Nishiura, T. (1993). *Dimension and extensions* (Vol. 48). Elsevier.
3. Blaszczyk, A., Vermeer, J. (1995). Some Old and Some New Results on Combinatorial Properties of Fixed-point Free Maps. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 767(1), 1-16.
4. Engelking, R. (1977). *General topology*, PWN.

5. Engelking, R. (1995). Theory of dimensions, finite and infinite.
6. Van Douwen, E. K. (1993). X and fixed-point free maps. *Topology and its Applications*, 51(2), 191-195.
7. Van Hartskamp, M. A., Vermeer, J. (1996). On colorings of maps. *Topology and its Applications*, 73(2), 091-181.
8. Van Mill, J. (1999). Easier proofs of coloring theorems. *Topology and its Applications*, 97(1-2), 155-163.
9. Wallman, H. (1938). Lattices and topological spaces. *Annals of Mathematics*, 112-126.
10. Yong, K. D. (1988). The structure of homeomorphisms and embeddings of topological spaces (Doctoral dissertation, Ph. D. Thesis, Silesian University, Katowice, Poland, 1988 (in Polish)).