Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Determination of weight vector by using a pairwise comparison matrix based on DEA and Shannon entropy

Hooshyar Azad[1] ✉, Ali Asghar Foroughi[2]

1. Department of Mathematics, University of Qom, Qom, Iran.

✉ E-mail: h.azad86@yahoo.com

2. Department of Mathematics, University of Qom, Qom, Iran.

E-mail: aa_foroughi@yahoo.com

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
20 March 2020
Revised form:
28 July 2020
Accepted:
11 October 2020
Published online:
21 May 2022

Keywords:

Multiple criteria decision making;
Data envelopment analysis;
Analytic hierarchy process;
Shannon entropy;
Pairwise comparison matrix;
Robust estimation.

ABSTRACT

Introduction

Analytic hierarchy process (AHP) is a method of multiple criteria decision making (MCDM) that is used to select an alternative from a set of alternatives or to rank a set of alternatives, while data envelopment analysis (DEA) is a nonparametric method that is used based on linear programming to evaluate the performance of decision making units (DMUs) that have multiple inputs and multiple outputs. The relation between methods of MCDM and DEA is a topic of interest to researchers in this part of MCDM, e.g., one of the first works done in this field is the relation between data envelopment analysis and multiple objective linear programming by Golany. Ramanathan proposed a method (DEAHP method) based on DEA for weight generation in the AHP that his method had three main drawbacks: (1) producing irrational weights for inconsistent pairwise comparison matrices; (2) non-use all the information of the inconsistent pairwise comparison matrix; and (3) insensitivity to changing elements in some matrices of pairwise comparison. To solve the problems of DEAHP method, several methods were proposed that each one produces a weight vector in the AHP, e.g., we can mentioned to data envelopment analysis method of wang and chin (DEA method) and data envelopment analysis method with assurance region of wang and et al. (DEA/AR method). In this paper, we propose a new method, which is called E-DEAHP method for short, based on DEA and Shannon entropy, a concept used in information theory, to produce a weight vector in the AHP that does not have the problems of DEAHP method and is different from the mentioned methods.

Material and methods

In this approach, each row of the pairwise comparison matrix is considered as a decision making unit (DMU), so that in the normalized pairwise comparison matrix the arithmetic mean of the ith row and the entropy of ith column is considered as, respectively, output and input of the ith DMU and then with employed data envelopment analysis, we find the local weight vector of the elements (decision criteria or alternatives). Also, to aggregate the obtained local weights, we use the simple additive weighting (SAW) method in multiple criteria decision making.

Results and discussion

It is proved that if a pairwise comparison matrix is perfectly consistent, the entropy of all its columns are the same, so in this case all decision making units will have the same input and the method will produce true weight vector.

The results of the examined numerical examples show that the proposed method of this paper produces perfectly rational weights in comparison with the results of the methods known in the subject literature and can estimate a robust priority (weight) vector for a pairwise comparison matrix. Also, the results of the hierarchical problem survey show that the weights obtained from the method and their aggregation to obtain the global weight vector confirm the potential validity of the method.

Conclusion

In this paper, in relation to E-DEAHP method, we have achieved the following conclusions.

- Generating true weight vector for perfectly consistent pairwise comparison matrices.
- The method for ranking and selecting alternatives has a high resolution.
- The weight vector obtained from this method is robust, In other words, it is not affected by possible errors, unusual and false observations (UFO) that appear because of inaccurate data entry random errors, in the pairwise comparison matrix.
- In practice, the E-DEAHP method can be applied without the need to solve linear programming by using a simple relative relation.

How to cite: Azad, H., Foroughi, A.A; (2022) Determination of weight vector by using a pairwise comparison matrix based on DEA and Shannon entropy. *Mathematical Researches*, 8 (2), 1-19

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

تعیین بردار وزن با استفاده از ماتریس مقایسه زوجی بر اساس DEA و آنتروپی شانون

هوشیار آزاد[1] ✉، علی اصغر فروغی[2]

۱. نویسندهٔ مسئول، دانشکدهٔ ریاضی، قم، قم، ایران. پست الکترونیکی: h.azad86@yahoo.com
۲. گروه ریاضی، دانشگاه قم، قم، ایران. پست الکترونیکی: aa_foroughi@yahoo.com

اطلاعات مقاله | **چکیده**

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۱/۰۱
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۵/۰۷
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۷/۲۰
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۳۱

واژه‌های کلیدی:

تصمیم‌گیری چند معیاره،
تحلیل پوششی داده‌ها،
فرایند تحلیل سلسله مراتبی،
آنتروپی شانون،
ماتریس مقایسه زوجی،
تخمین استوار.

ارتباط بین فرایند تحلیل سلسله مراتبی و تحلیل پوششی داده‌ها موضوعی است که مورد توجه محققان این شاخه از تصمیم‌گیری چند معیاره قرار گرفته است. در این مقاله یک مدل برنامه‌ریزی خطی را پیشنهاد می‌کنیم که از ماتریس مقایسه زوجی، بردار وزن (اولویت) را تولید می‌کند. در این روش هر سطر ماتریس مقایسه زوجی را به عنوان یک واحد تصمیم‌گیرنده در نظر می‌گیریم. در ماتریس مقایسه زوجی نرمال شده، میانگین حسابی هر سطر به عنوان خروجی و آنتروپی هر ستون به عنوان ورودی واحد تصمیم‌گیرنده مدنظر قرار گرفته است. مدل پیشنهادی قادر است برای ماتریس‌های مقایسه زوجی کاملاً سازگار وزن واقعی تولید کند. همچنین برای استفاده از مدل نیازی نیست که ماتریس مقایسه زوجی، ناسازگاری قابل قبول داشته باشد. از طرفی، این مدل می‌تواند یک بردار اولویت استوار را برای یک ماتریس مقایسه زوجی تخمین بزند. برای نشان دادن قابلیت و توانایی روش پیشنهادی، دو مثال عددی بررسی شده است. همچنین یک مسأله سلسله مراتبی در تصمیم‌گیری چند معیاره را با مدل پیشنهادی مورد تجزیه و تحلیل قرار داده‌ایم.

استناد: آزاد، هوشیار؛ فروغی، علی اصغر؛ (۱۴۰۱). تعیین بردار وزن با استفاده از ماتریس مقایسه زوجی بر اساس DEA و آنتروپی شانون. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۲)، ۱۹-۱.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

فرایند تحلیل سلسله مراتبی یک روش در تصمیم‌گیری چند معیاره است که برای انتخاب یک گزینه از میان مجموعه‌ای از گزینه‌ها یا رتبه‌بندی مجموعه‌ای از گزینه‌ها به‌کار گرفته می‌شود. از طرفی تحلیل پوششی داده‌ها یک روش ناپارامتری است که بر مبنای برنامه‌ریزی خطی برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ای که چند ورودی و چند خروجی دارند، به‌کار می‌رود. محققان زیادی تلاش کرده‌اند تا بین تحلیل پوششی داده‌ها و تصمیم‌گیری چند معیاره ارتباط برقرار کنند. یکی از اولین کارهایی که در این زمینه انجام شد، ارتباط بین تحلیل پوششی داده‌ها و برنامه‌ریزی خطی چند هدفه است که توسط گولانی [۱] صورت گرفته است.

راماناتان [۲] در سال ۲۰۰۶ یک مدل بر اساس تحلیل پوششی داده‌ها برای تولید وزن در فرایند تحلیل سلسله مراتبی پیشنهاد کرد. روش وی سه اشکال اساسی داشت. اول این‌که، برای ماتریس‌های مقایسه زوجی ناسازگار وزن‌های غیرمنطقی تولید می‌کند. دوم این‌که، از همه اطلاعات ماتریس مقایسه زوجی ناسازگار استفاده نمی‌کند. سوم این‌که، در بعضی از ماتریس‌های مقایسه زوجی، نسبت به تغییر عناصر حساس نیست. برای رفع این مشکل وانگ و همکارانش [۳] مدل تحلیل پوششی داده‌ها با ناحیه اطمینان (DEA/AR) را ارائه کردند. همچنین در سال ۲۰۰۹ وانگ و همکارانش [۴] برای مشخص کردن اولویت در فرایند تحلیل سلسله مراتبی، مدل دیگری بر مبنای تحلیل پوششی داده‌ها پیشنهاد کردند و آن را به تصمیم‌گیری گروهی در فرایند تحلیل سلسله مراتبی گسترش دادند. آن‌ها روش خود را روش DEA نام نهادند.

لیپوستکی و کنکلین [۵] داده‌های غیرمعمول و غلط[1] (UFO) در یک ماتریس مقایسه زوجی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها با در نظر گرفتن ماتریس مقایسه زوجی به‌عنوان یک جدول توافقی، از معیار χ^2 برای برازش استفاده کردند تا داده‌های UFO را پیدا کنند. طبق این معیار، روشی ارائه دادند که می‌توانست یک بردار اولویت استوار تولید کند. توجه داشته باشید که منظور از بردار اولویت استوار، بردار اولویتی است که تحت تأثیر خطاهای ممکن در میان عناصر ماتریس مقایسه زوجی نباشد. همچنین داده‌های UFO، داده‌های هستند که به علت ورودی‌های ناصحیح و خطاهای تصادفی اتفاق می‌افتند.

در این مقاله، ما روش جدیدی بر مبنای تحلیل پوششی داده‌ها و آنتروپی شانون برای تولید بردار وزن در فرایند تحلیل سلسله مراتبی پیشنهاد می‌کنیم. این روش مشکلات روش پیشنهادی راماناتان را ندارد و با روش‌های مذکور متفاوت است. این روش قادر است برای ماتریس‌های مقایسه زوجی کاملاً سازگار وزن واقعی تولید کند. به تغییرات عناصر ماتریس‌های مقایسه زوجی حساس بوده و برای ماتریس‌های مقایسه زوجی ناسازگار وزن منطقی تولید می‌کند. همچنین این روش می‌تواند یک رتبه‌بندی استوار برای عناصر (معیارها یا گزینه‌ها) تولید نماید.

ساختار این مقاله به‌صورت زیر سازماندهی شده است. در بخش ۲ مروری اجمالی بر تحلیل پوششی داده‌ها، فرایند تحلیل سلسله مراتبی و آنتروپی شانون داریم. در بخش ۳، مدل جدید را بسط داده‌ایم. در بخش ۴، در مورد به‌دست

---

[1] Unusual and False Observations (UFO)

آوردن وزن نهایی گزینه‌ها از وزن‌های نسبی بحث می‌کنیم. مثال‌های عددی مورد بررسی را در بخش ۵ خواهیم داشت. نتیجه‌گیری مقاله را در بخش ۶ آورده‌ایم. در نهایت منابع مورد استفاده در نوشتن این مقاله را خواهیم داشت.

۲. تحلیل پوششی داده‌ها، آنتروپی شانون و فرایند تحلیل سلسله مراتبی

تحلیل پوششی داده‌ها یک روش ناپارامتری است که با استفاده از ورودی‌ها و خروجی‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده به تولید وزن می‌پردازد. پس از آن اقدام به ارزیابی عملکرد یک واحد تصمیم‌گیرنده در مقایسه با دیگر واحدهای تصمیم‌گیرنده می‌کند. این رویکرد نخستین بار توسط چارنز، کوپر و رودز [۶] به‌کار گرفته شد. مدل DEA[1] ورودی محور با بازده به مقیاس ثابت تحت عنوان CCR[2] در صورت مضربی خود به قرار زیر است:

$$\begin{aligned} \text{CCR}: \quad & \max \quad u^t y_o, \\ & s.t. \quad v^t x_o = 1, \\ & \qquad u^t y_j - v^t x_j \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ & \qquad u \geq 0, \quad \text{v} \geq 0, \end{aligned}$$

که در آن n تعداد واحدهای تصمیم‌گیرنده، $0 \leq_{\neq} x_j \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی واحد تصمیم‌گیرنده j اُم، $0 \leq_{\neq} y_j \in \mathbb{R}^s$ بردار خروجی واحد تصمیم‌گیرنده j اُم، $u \in \mathbb{R}^m$ بردار وزن ورودی، $v \in \mathbb{R}^s$ بردار وزن خروجی، t علامت ترانهاده است و o به واحد تحت ارزیابی اشاره دارد.

آنتروپی شانون مفهومی است که در تئوری اطلاعات به‌کار می‌رود. گاهی به‌عنوان معیاری برای اندازه‌گیری عدم‌قطعیت نیز به‌کار گرفته می‌شود. به‌کارگیری این روش در یک مسأله تصمیم‌گیری چند معیاره (MCDM[3]) به قرار زیر است [۷]؛ فرض کنید ماتریس تصمیم در یک مسأله تصمیم‌گیری چند معیاره به‌صورت $D = (\text{d}_{ij})_{m \times n}$ باشد، که در آن d_{ij} ارزیابی گزینه‌ی iاُم تحت معیار j اُم، m تعداد گزینه‌های تحت ارزیابی و n تعداد معیارهای ارزیابی است. برای به‌دست آوردن اهمیت معیارها به‌صورت زیر عمل می‌شود:

گام ۱: ابتدا ماتریس D را با نُرم یک ($\|.\|_1$) بی‌مقیاس (نرمال) می‌کنیم.

$$d'_{ij} = \frac{d_{ij}}{\sum_{k=1}^{m} d_{kj}}, \quad \text{i} = 1, 2, \dots \text{m}; \ \text{j} = 1, 2, \dots n.$$

گام ۲: آنتروپی هر ستون ماتریس بی‌مقیاس شده را از رابطه زیر بیابید.

$$e_j = -\frac{1}{\ln m} \sum_{i=1}^{m} d'_{ij} \ln(d'_{ij}), \quad \text{j} = 1, 2, \dots, \text{n},$$

که در آن $1/\ln m$ ثابت آنتروپی بوده و باعث می‌شود که $0 < e_j \leq 1$.

---

[1] Data Envelopment Analysis (DEA)
[2] Charnes-Cooper-Rhodes (CCR)
[3] Multiple Criteria Decision Making (MCDM)

گام ۳: درجه انحراف هر معیار (ستون) را از رابطه $\mathrm{d}_j = 1 - e_j$ $(\mathrm{j} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n})$ به‌دست آورید.

گام ۴: اهمیت (ارزش یا وزن) معیارها را از رابطه زیر حساب کنید.

$$w_j = \frac{d_j}{\sum_{l=1}^{n} d_l}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

فرآیند تحلیل سلسله مراتبی (AHP[1]) در اواخر دهه‌ی ۱۹۷۰ توسط توماس ساعتی پایه‌ریزی شد. این رویکرد شامل سه گام است؛ (۱) رسم درخت سلسله مراتبی، (۲) محاسبه بردار وزن از ماتریس‌های مقایسه زوجی و (۳) تحلیل سازگاری.

فرض کنید ماتریس مقایسه زوجی به‌صورت $A = (\mathrm{a}_{ij})_{n\times n}$ باشد، که در آن $a_{ij} > 0$ ،$a_{ii} = 1$ و $a_{ji} = 1/a_{ij}$ $(\mathrm{i} \neq \mathrm{j})$. در واقع A یک ماتریس مثبت و متقابل[2] است. برای به‌دست آوردن بردار وزن، ساعتی [۸] ویژه بردار نظیر بزرگترین ویژه مقدار را پیشنهاد می‌کند. در واقع بردار وزن w از رابطه‌ی زیر حاصل می‌گردد:

$$^{3}\, EM: \quad Aw = \lambda_{\max} w, \quad e^t w = 1, \quad w > 0,$$

که در آن $e^t = (1, 1, \ldots, 1)$ است. ماتریس مقایسه زوجی A را کاملاً سازگار گویند هرگاه به ازای هر i و j و k داشته باشیم؛ $a_{ik} a_{kj} = a_{ij}$. برای بررسی سازگاری یک ماتریس مقایسه زوجی این‌گونه می‌شود؛ ابتدا از رابطه $CI = (\lambda_{\max} - n)/(n-1)$ اندیس سازگاری را حساب کنید، سپس از رابطه $CR = CI/RI$ [4] نرخ سازگاری را بیابید، که در آن RI اندیس تصادفی نام دارد. این اندیس از میانگین اندیس سازگاری ماتریس‌های مقایسه زوجی که به‌طور تصادفی تولید شده‌اند، حاصل می‌گردد (مقادیر این اندیس در دسترس هستند.) ساعتی پیشنهاد می‌کند اگر نرخ سازگاری حداکثر ۰/۱ باشد، ناسازگاری قابل قبول است، در غیر این‌صورت باید در قضاوت‌ها تجدید نظر گردد.

۳. مدل برنامه‌ریزی خطی برای تعیین بردار وزن با استفاده از ماتریس مقایسه زوجی

قبل از بسط مدل، ابتدا به بررسی نکته‌ای در مورد آنتروپی شانون می‌پردازیم. در یک ماتریس تصمیم بی‌مقیاس (نرمال) شده، هر چه اعضای یک ستون به هم نزدیک‌تر (پراکندگی کمتر) باشند، آنتروپی آن ستون بیشتر است. این موضوع باعث می‌شود که درجه انحراف آن ستون کمتر بوده و معیار مربوط به آن از درجه اهمیت کمتری برخوردار باشد. به‌عنوان مثال، فرض کنید ارزیابی m گزینه نسبت به معیار kاُم عدد ثابت c شود. بنابراین:

$$d'_{ik} = \frac{d_{ik}}{\sum_{l=1}^{m} d_{lk}} = \frac{c}{\sum_{l=1}^{m} c} = \frac{c}{mc} = \frac{1}{m}, \quad \mathrm{i}, k = 1, 2, \ldots m,$$

$$\Rightarrow e_k = -\frac{1}{\ln m}\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{m}\ln\frac{1}{m} = -\frac{1}{\ln m}(-\ln m) = 1 \Rightarrow d_k = 1 - e_k = 1 - 1 = 0 \Rightarrow w_k = 0.$$

---

[1] Analytic Hierarchy Process (AHP)
[2] Reciprocal
[3] Eigenvector Method (EM)
[4] Consistency Ratio (CR), Consistency Index (CI), Random Index (RI)

در ماتریس مقایسه زوجی، هر سطر را به‌عنوان یک واحد تصمیم‌گیرنده (DMU[1]) در نظر بگیرید. از آنجایی‌که در تحلیل پوششی داده‌ها خروجی بیشتر و ورودی کمتر مدنظر است؛ در ماتریس مقایسه زوجی بی‌مقیاس شده، میانگین هر سطر را به‌عنوان خروجی و آنتروپی هر ستون را به‌عنوان ورودی واحد تصمیم‌گیرنده در نظر می‌گیریم. ایده روش بدین قرار است؛ از آنجایی‌که در ماتریس مقایسه زوجی، اعداد یک سطر ترجیحات یک عنصر (گزینه یا معیار) را نسبت به بقیه عناصر بیان می‌کنند، لذا هر چه میانگین آن سطر بیشتر باشد، گزینه مربوط به آن سطر از اهمیت بالاتری برخوردار است. همچنین اعداد موجود در ستون متناظر با سطر مدنظر، ترجیحات بقیه عناصر را نسبت به عنصر تحت ارزیابی بیان می‌کنند. بنابراین هر چه پراکندگی در این ستون بیشتر باشد، طبق آنچه در آغاز بخش بیان شد، آنتروپی کمتر است (گزینه مربوط به آن ستون از اهمیت بالاتری برخوردار است.) لذا هر چه آنتروپی کمتر باشد، بهتر است. بنابراین با این مفروضات، متناظر یک ماتریس مقایسه زوجی بی‌مقیاس شده از مرتبه n، n واحد تصمیم‌گیرنده با یک ورودی و یک خروجی به‌صورت $DMU_i(\mathrm{e}_i, \bar{\mathrm{a}}_i)\ (\mathrm{i}=1,2,\ldots,\mathrm{n})$ داریم. لذا در مدل مضربی CCR خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\mathrm{E-DEAHP}: \quad & \max\ w_o = u\bar{a}_o,\\ & s.t. \quad ve_o = 1,\\ & \qquad u\bar{a}_i - ve_i \le 0, \quad \mathrm{i}=1,2,\ldots,\mathrm{n},\\ & \qquad u,v \ge 0,\end{aligned}$$

که در آن u وزن تنها خروجی، v وزن تنها ورودی و $o \in \{1,2,\ldots,\mathrm{n}\}$ به واحد تحت ارزیابی (در اینجا گزینه یا معیار تصمیم‌گیری تحت ارزیابی) اشاره دارد. مقدار کارایی نسبی مدل E-DEAHP را وزن نسبی گزینه‌ی A_o خوانیم. با تغییر تابع هدف و حل n بار مدل E-DEAHP، وزن نسبی n گزینه را می‌یابیم. بردار وزن نسبی به‌دست آمده را با $W^* = (\mathrm{w}_1^*, \mathrm{w}_2^*, \ldots, \mathrm{w}_n^*)^t$ نمایش می‌دهیم، که در آن علامت * به بهینگی اشاره دارد. توجه داریم که در مدل راماناتان ضعف قدرت تفکیک گزینه‌ها را در برخی از موارد داریم. علت این امر این است که، اصل تجربی $n \ge 3(\mathrm{m}+\mathrm{s})$ رعایت نشده است. زیرا در این مدل n گزینه داریم که هر کدام n خروجی و یک ورودی مجازی با مقدار ثابت واحد دارند. اما همانطور که ملاحظه می‌کنید در مدل E-DEAHP این اصل برای ماتریس‌های مقایسه زوجی از مرتبه حداقل شش رعایت شده است. البته برای ماتریس‌های مقایسه زوجی با مرتبه کمتر از شش، مدل قدرت تفکیک قابل قبولی دارد. این مهم را در مثال‌های عددی بررسی کرده‌ایم. متناظر با مدل E-DEAHP لم و قضیه زیر را بیان و ثابت می‌کنیم.

لم ۱: در یک ماتریس مقایسه زوجی کاملاً سازگار، آنتروپی ستون‌ها یکسان خواهد بود.

اثبات: ماتریس مقایسه زوجی $A = (\mathrm{a}_{ij})_{n\times n}$ را در نظر بگیرید. خواهیم داشت:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{s=1}^{n} a_{sj}}, \quad \mathrm{i,j}=1,2,\ldots n,$$

$$e_j = -\frac{1}{\ln \mathrm{n}} \sum_{i=1}^{n} a'_{ij} \ln a'_{ij}, \quad \mathrm{j}=1,2,\ldots n.$$

[1] Decision Making Unit (DMU)

حال فرض کنید A کاملاً سازگار باشد. بنابراین داریم:

$$a_{ik}a_{kj} = a_{ij}, \quad \forall \mathrm{i, j, k}$$

و

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{s=1}^{n} a_{sj}} = \frac{a_{ik}.a_{kj}}{\sum_{s=1}^{n} a_{sk}.a_{kj}} = \frac{a_{ik}.a_{kj}}{a_{kj}\sum_{s=1}^{n} a_{sk}} = \frac{a_{ik}}{\sum_{s=1}^{n} a_{sk}} = a'_{ik}, \quad \forall i, \mathrm{j, k}.$$

رابطه فوق بیان می‌کند در صورتی‌که ماتریس مقایسه زوجی کاملاً سازگار باشد، اعضای ستون‌ها پس از نرمال‌سازی یکسان خواهد بود. حال ستون‌های دلخواه j و k را در نظر بگیرید. خواهیم داشت:

$$e_j = -\frac{1}{\mathrm{lnn}}\sum_{i=1}^{n} a'_{ij}\ln a'_{ij} = -\frac{1}{\mathrm{lnn}}\sum_{i=1}^{n} a'_{ik}\ln a'_{ik} = e_k.$$

و این اثبات را کامل می‌کند. □

این لم بیان می‌کند در ماتریس‌های مقایسه زوجی کاملاً سازگار، برای محاسبه آنتروپی کافیست فقط آنتروپی یکی از ستون‌ها محاسبه گردد.

تعریف ۱: فرض کنید $A = (\mathrm{a}_{ij})_{n\times n}$ یک ماتریس مقایسه زوجی متقابل کاملاً سازگار باشد. در این‌صورت بردار وزن مثبت $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^t$ وجود دارد به‌طوری‌که $AW = nW$. چنین بردار وزنی را بردار وزن واقعی خوانیم.

قضیهٔ ۱: مدل E-DEAHP برای ماتریس‌های مقایسه زوجی کاملاً سازگار، وزن واقعی تولید می‌کند.

اثبات: فرض کنید $w_n, \ldots, w_2, w_1$ وزن‌هایی باشند که از نرمال کردن یکی از ستون‌های ماتریس مقایسه زوجی کاملاً سازگار A با نرم ماکسیمم حاصل می‌شوند و در خاصیت $\max_i\{\mathrm{w}_i\} = 1$ صدق می‌کنند. همچنین فرض کنید $w_n^*, \ldots, w_2^*, w_1^*$ وزن‌های حاصل از مدل E-DEAHP باشند. ثابت می‌کنیم $w_o^* = w_o$، که در آن $o \in \{1, 2, \ldots, \mathrm{n}\}$. چون A کاملاً سازگار است، طبق لم ۱ آنتروپی هر ستون ماتریس نرمال شده‌ی متناظر آن، برابر ثابت α است (بخصوص $e_o = \alpha$.) همچنین میانگین هر سطر ماتریس مقایسه زوجی نرمال شده، برابر با یکی از اعضای آن سطر خواهد شد (بخصوص $\bar{a}_o = a'_{oj}$.) زیرا؛

$$\bar{a}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} a'_{ik}}{n} = a'_{ik} \Rightarrow \bar{a}_i = a'_{ik}, \forall \mathrm{i, k}.$$

طبق قیود مدل E-DEAHP داریم:

$$v=\frac{1}{e_0}=\frac{1}{\alpha}\Rightarrow u\bar{a}_i-\frac{1}{\alpha}\alpha\le 0,\quad \forall i\Rightarrow u\le\frac{1}{\bar{a}_i}\quad \forall i$$
$$\Rightarrow u\le\min_i\{\frac{1}{\bar{a}_i}\}=\frac{1}{\max_i\{\bar{a}_i\}}\Rightarrow u^*=\frac{1}{\max_i\{\bar{a}_i\}}.$$

لذا برای تابع هدف خواهیم داشت:

$$w_o^*=\bar{a}_o u^*=\frac{\bar{a}_o}{\max_i\{\bar{a}_i\}}=\frac{a'_{oj}}{\max_i\{a'_{ij}\}}=\frac{a_{oj}\Big/\sum_{k=1}^{n}a_{kj}}{\max_i\{a_{ij}\Big/\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\}}=\frac{a_{oj}}{\max_i\{a_{ij}\}}$$
$$=\frac{w_o/w_j}{\max_i\{w_i/w_j\}}=\frac{w_o}{\max_i\{w_i\}}=w_o.$$

این اثبات را کامل می‌کند. □

تذکر: چون تمام واحدهای تصمیم‌گیرنده در مدل E-DEAHP تنها یک ورودی و یک خروجی دارند، بنابراین نیازی به حل مدل برنامه‌ریزی خطی نیست. به راحتی از مدل E-DEAHP می‌توان ثابت کرد که:

$$w_o^*=\frac{\bar{a}_o}{e_o}\min_{1\le i\le n}\{\frac{e_i}{\bar{a}_i}\},\quad o\in\{1,2,\dots,n\}.$$

۴. وزن‌های نهایی

در مسأله سلسله مراتبی نیاز است که وزن‌های نسبی به وزن نهایی تبدل شوند. برای این منظور از روش وزن‌دهی جمعی ساده (SAW[1]) در تصمیم‌گیری چند معیاره استفاده می‌کنیم. فرض کنید m معیار تصمیم با وزن‌های نسبی $w_m,\dots,w_2,w_1$ داشته باشیم. همچنین فرض کنید $w_{nj},\dots,w_{2j},w_{1j}$ وزن‌های نسبی n گزینه نسبت به معیار jاُم $(\mathrm{j}=1,2,\dots,\mathrm{m})$ باشند. فرض بر این است که همه‌ی این وزن‌ها را از روش E-DEAHP به‌دست آورده‌ایم. صورت ماتریسی این وزن‌ها در جدول ۱ آمده است. توجه کنید که وزن‌های نهایی گزینه iاُم $(\mathrm{i}=1,2,\dots,\mathrm{n})$ را با نرم ماکسیمم نرمال کرده‌ایم. به عبارت دیگر، وزن نهایی گزینه A_i به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$w_{A_i}^*=\frac{\sum_{j=1}^{m}w_{ij}w_j}{\max_{k\in\{1,2,\dots,\mathrm{n}\}}\{\sum_{j=1}^{m}w_{kj}w_j\}},\quad i=1,2,\dots,n.$$

[1] Simple Additive Weighting (SAW)

جدول ۱: تلفیق وزن‌های نسبی E-DEAHP

گزینه‌ها	معیارها				وزن نهایی
	w_1	w_2	$\cdots$	w_m	نرمال نشده
A_1	w_{11}	w_{12}	$\cdots$	w_{1m}	$\sum_{j=1}^{m} w_{1j} w_j$
A_2	w_{21}	w_{22}	$\cdots$	w_{2m}	$\sum_{j=1}^{m} w_{2j} w_j$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_n	w_{n1}	w_{n2}	$\cdots$	w_{nm}	$\sum_{j=1}^{m} w_{nj} w_j$

۵. مثال‌های عددی

در این بخش، چند مثال عددی را بررسی می‌کنیم. همچنین یک مسأله سلسله مراتبی در تصمیم‌گیری چند معیاره را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم. هدف از آوردن این مثال‌ها، بررسی پتانسیل مدل در مقایسه با دیگر مدل‌های مشابه و به‌کارگیری آن در مسائل دنیای واقعی است.

مثال ۱: ماتریس‌های مقایسه زوجی زیر را در نظر بگیرید. ماتریس‌های A، B، C و F توسط وانگ و همکاران [۳]، ماتریس D توسط وانگ و الهاگ [۹] و سوگیهارا و همکاران [۱۰] و ماتریس E توسط وانگ و چاین [۴] مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 1/2 & 1 & 3\\ 1/5 & 1/3 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 5\\ 1/5 & 1 & 3\\ 1/5 & 1/3 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 9 & 5\\ 1/9 & 1 & 3\\ 1/5 & 1/3 & 1\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 4 & 8\\ 1 & 1 & 2 & 4 & 8\\ 1/2 & 1/2 & 1 & 2 & 4\\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 1 & 2\\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 & 1\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1 & 1/3 & 1/3 & 1 & 1/2\\ 3 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 1/2 & 2\\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1/2 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$F=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 1 & 3 & 4\\ 1/4 & 1 & 7 & 3 & 1/5 & 1\\ 1 & 1/7 & 1 & 1/5 & 1/5 & 1/6\\ 1 & 1/3 & 5 & 1 & 1 & 1/3\\ 1/3 & 5 & 5 & 1 & 1 & 3\\ 1/4 & 1 & 6 & 3 & 1/3 & 1\end{pmatrix}.$$

با روش‌های مختلف بردار وزن نسبی این ماتریس‌های مقایسه زوجی را به‌دست آورده‌ایم. نتایج در جدول‌های ۲ تا ۶ آمده است. توجه کنید که، نرخ سازگاری این ماتریس‌ها به ترتیب ۰/۰۰۳۲، ۰، ۰/۱۱۶۹، ۰/۲۷۹۶، ۰، ۰/۰۹۹۹ و ۰/۳۴۰۹ است. بنابراین ماتریس‌های A و E دارای سازگاری قابل قبولند؛ چون نرخ سازگاری آن‌ها کمتر از ۰/۱ است. ماتریس D کاملاً سازگار و ماتریس‌های B، C و F کاملاً ناسازگارند. همچنین در هر جدول اعداد داخل «()»، رتبه عناصر را نشان می‌دهند.

جدول ۲: وزن‌های نسبی به‌دست آمده با روش EM برای ماتریس‌های مثال ۱

ماتریس	وزن نسبی					
	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
A	۱(۱)	۰/۵۳۱۴(۲)	۰/۱۸۸۳(۳)	–	–	–
B	۱(۱)	۰/۲۸۸۴(۲)	۰/۱۳۸۷(۳)	–	–	–
C	۱(۱)	۰/۱۹۴۹(۲)	۰/۱۱۴۰(۳)	–	–	–
D	۱(۱)	۱(۱)	۰/۵(۲)	۰/۲۵(۳)	۰/۱۲۵(۴)	–
E	۰/۴۲۴۳(۵)	۰/۶۶۲۶(۳)	۱(۱)	۰/۹۹۵۱(۲)	۰/۶۷۵۹(۴)	–
F	۱(۱)	۰/۵۰۸۹(۳)	۰/۱۹۷۸(۶)	۰/۴۴۱۴(۵)	۰/۸۱۵۶(۲)	۰/۴۹۷۹(۴)

در جدول ۲ وزن‌های به‌دست آمده توسط روش ویژه بردار ساعتی (EM) آورده شده است. توجه کنید که این وزن‌ها را با نرم ماکسیمم نرمال کرده‌ایم. در جدول ۳ وزن‌های حاصل از مدل DEAHP را آورده‌ایم. همانطور که مشاهده می‌کنید این روش برای سه ماتریس A، B و C بردار وزن $w=(1,0.6,0.2)^t$ را تولید می‌کند. با کمی دقت متوجه می‌شویم که این روش از تمام اطلاعات ماتریس مقایسه زوجی استفاده نکرده است. در واقع در هر سه ماتریس، ستون سوم را برای حصول بردار وزن، نرمال کرده است. از طرفی با تغییر عنصر $a_{12}=2$ به ۵ و ۹ به ترتیب ماتریس‌های B و C به‌دست می‌آیند، ولی خروجی این مدل برای این دو ماتریس همانند خروجی مدل برای ماتریس A است. این موضوع بیان می‌کند که روش DEAHP نسبت به تغییرات عناصر ماتریس مقایسه زوجی حساس نیست. روش مذکور برای ماتریس D که کاملاً سازگار است، وزن واقعی تولید کرده است. با مشاهده سطرهای مربوط به ماتریس‌های E و F در جدول ۳، می‌بینید که این روش وزن‌های غیرمنطقی $w=(1,1,1,1,1)^t$ و $w=(1,1,1,1,1,1)^t$ را تولید کرده است. در جدول ۴، نتایج مربوط به روش DEA/AR، در جدول ۵، نتایج مربوط به روش DEA و در جدول ۶، نتایج مربوط به روش پیشنهادی این مقاله (E-DEAHP) را مشاهده می‌کنید. هر سه روش برای ماتریس‌های A، B و C وزن‌های منطقی تولید کرده‌اند و مشکلات روش DEAHP را ندارند. همچنین اولویت‌بندی سه روش برای عناصر به

صورت $w_1 \succ w_2 \succ w_3$ است، که در آن علامت «$\succ$» به معنای اولویت است. همانطور که ملاحظه می‌کنید، این اولویت‌بندی مطابق اولویت‌بندی روش EM است. ملاحظه می‌کنید که برای ماتریس کاملاً سازگار D، هر سه روش مانند دو روش دیگر وزن دقیق تولید کرده‌اند.

برای ماتریس E، ترتیب اولویت روش EM به‌صورت $w_3 \succ w_4 \succ w_5 \succ w_2 \succ w_1$ است. این ترتیب اولویت برای روش DEA/AR به‌صورت $w_3 \sim w_4 \succ w_5 \succ w_2 \succ w_1$ بوده، که در آن «$\sim$» به معنای اولویت یکسان است. همچنین رتبه‌بندی روش DEA به‌صورت $w_4 \succ w_3 \succ w_5 \succ w_2 \succ w_1$ است. همانطور که از جدول مشاهده می‌کنید روش E-DEAHP، ترتیب اولویت $w_3 \succ w_4 \succ w_2 \succ w_5 \succ w_1$ را می‌دهد، که مطابق اولویت شخصی تصمیم‌گیرنده بوده (با مشخص شدن اولویت عنصر سه و چهار، می‌توان سطرهای متناظر آن‌ها را حذف کرد. حال در ماتریس کاهش یافته، در مقایسه عنصر دو و پنج داریم؛ $a_{21} = 3$ و $a_{51} = 2$ و بقیه مقایسه‌ها یکسانند. لذا عنصر دو نسبت به عنصر پنج از اهمیت بالاتری برخوردار است) و این خود یک مزیت نسبت به چهار روش دیگر است. در نهایت، روش E-DEAHP برای ماتریس F ترتیب اولویت $w_1 \succ w_5 \succ w_2 \succ w_6 \succ w_4 \succ w_3$ را می‌هد، که مطابق عملکرد سه روش EM، DEA/AR و DEA است.

جدول ۳: وزن‌های نسبی به‌دست آمده با روش DEAHP برای ماتریس‌های مثال ۱

ماتریس	وزن نسبی					
	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
A	۱(۱)	۰/۶(۲)	۰/۲(۳)	–	–	–
B	۱(۱)	۰/۶(۲)	۰/۲(۳)	–	–	–
C	۱(۱)	۰/۶(۲)	۰/۲(۳)	–	–	–
D	۱(۱)	۱(۱)	۰/۵(۲)	۰/۲۵(۳)	۰/۱۲۵(۴)	–
E	۱(۱)	۱(۱	۱(۱)	۱(۱)	۱(۱)	–
F	۱(۱)	۱(۱)	۱(۱)	۱(۱)	۱(۱)	۱(۱)

جدول ۴: وزن‌های نسبی به‌دست آمده با روش DEA/AR برای ماتریس‌های مثال ۱

ماتریس	وزن نسبی					
	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
A	۱(۱)	۰/۵۳۱۴(۲)	۰/۱۸۸۲(۳)	–	–	–
B	۱(۱)	۰/۲۹۵۲(۲)	۰/۱۴۲۸(۳)	–	–	–
C	۱(۱)	۰/۲۱۰۸(۲)	۰/۱۲۳۵(۳)	–	–	–
D	۱(۱)	۱(۱)	۰/۵(۲)	۰/۳)	۰/۱۲۵(۴)	–
E	۰/۴۴۴۷(۵)	۰/۶۸۳۴(۳)	۱(۱)	۱(۱)	۰/۶۹۴۴(۲)	–
F	۱(۱)	۰/۷۳۳۸(۳)	۰/۲۶۰۰(۶)	۰/۵۸۰۷(۵)	۰/۹۴۱۸(۲)	۰/۷۰۴۱(۴)

جدول ۵: وزن‌های نسبی به‌دست آمده با روش DEA برای ماتریس‌های مثال ۱

ماتریس	وزن نسبی					
	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
A	۱(۱)	۰/۵۱۷۲(۲)	۰/۱۹۶۰(۳)	–	–	–
B	۱(۱)	۰/۲۷۵۴(۲)	۰/۱۸۰۹(۳)	–	–	–
C	۱(۱)	۰/۲۱۳۴(۲)	۰/۱۷۵۰(۳)	–	–	–
D	۱(۱)	۱(۱)	۰/۵(۲)	۰/۲۵(۳)	۰/۱۲۵(۴)	–
E	۰/۴۲۵۴(۵)	۰/۶۵۹۶(۴)	۰/۹۹۲۸(۲)	۱(۱)	۰/۶۶۶۸(۳)	–
F	۱(۱)	۰/۵۴۳۷(۳)	۰/۲۱۹۱(۶)	۰/۴۵۳۴(۵)	۰/۸۰۴۵(۲)	۰/۵۲۳۹(۴)

جدول ۶: وزن‌های نسبی به‌دست آمده با روش E-DEAHP برای ماتریس‌های مثال ۱

ماتریس	CR	وزن نسبی					
		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
A	۰/۰۰۳۲	۱(۱)	۰/۵۴۷۳(۲)	۰/۱۸۵۹(۳)	–	–	–
B	۰/۱۱۶۹	۱(۱)	۰/۳۸۷۴(۲)	۰/۱۲۶۵(۳)	–	–	–
C	۰/۲۷۹۶	۱(۱)	۰/۳۶۱۵(۲)	۰/۱۰۱۳(۳)	–	–	–
D	۰	۱(۱)	۱(۱)	۰/۵(۲)	۰/۲۵(۳)	۰/۱۲۵(۴)	–
E	۰/۰۹۹۹	۰/۳۸۵۶(۵)	۰/۶۲۵۴(۳)	۱(۱)	۰/۸۷۴۵(۲)	۰/۶۲۲۰(۴)	–
F	۰/۳۴۰۹	۱(۱)	۰/۶۵۲۱(۳)	۰/۲۳۰۵(۶)	۰/۵۰۰۲(۵)	۰/۹۳۳۱(۲)	۰/۶۰۳۷(۴)

مثال زیر را به منظور بررسی تولید بردار اولویت استوار توسط روش E-DEAHP، مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم.

مثال ۲: ماتریس مقایسه زوجی زیر، که آن را از لیپوستکی و کنکلین [۵] گرفته‌ایم، در نظر بگیرید. این ماتریس توسط ژانگ [۱۱] نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 & 6 & 6 & 1/3 & 1/4 \\ 1/5 & 1 & 1/3 & 5 & 3 & 3 & 1/5 & 1/7 \\ 1/3 & 3 & 1 & 6 & 3 & 4 & 6 & 1/5 \\ 1/7 & 1/5 & 1/6 & 1 & 1/3 & 1/4 & 1/7 & 1/8 \\ 1/6 & 1/3 & 1/3 & 3 & 1 & 1/2 & 1/5 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 & 1/4 & 4 & 2 & 1 & 1/5 & 1/6 \\ 3 & 5 & 1/6 & 7 & 5 & 5 & 1 & 1/2 \\ 4 & 7 & 5 & 8 & 6 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

با روش‌های مختلف بردار وزن نسبی این ماتریس را حساب کرده‌ایم. نتایج را در جدول (۷) آورده‌ایم. توجه داشته باشید که برای هر روش، رتبه عناصر را داخل پرانتز نوشته‌ایم.

جدول ۷: وزن‌های نسبی به‌دست آمده برای ماتریس A با روش‌های مختلف

رتبه‌های ماتریس تعدیل شده	مدل استوار	DEA	DEA\AR	DEAHP	EM	E-DEAHP	وزن نسبی
(۳)	۰/۳۸۱۵(۳)	۰/۵۵۰۲(۴)	۰/۵۲۱۰(۳)	۱(۱)	۰/۵۱۹۲(۳)	۰/۷۱۴۵(۳)	w_1
(۵)	۰/۱۳۷۱(۵)	۰/۱۷۶۶(۵)	۰/۱۶۴۷(۵)	۰/۶۲۵۰(۳)	۰/۱۶۲۰(۵)	۰/۲۳۲۰(۵)	w_2
(۴)	۰/۳۵۹۶(۴)	۰/۶۲۹۵(۲)	۰/۵۶۲۹(۲)	۱(۱)	۰/۵۶۴۶(۲)	۰/۷۰۰۴(۴)	w_3
(۸)	۰/۰۵۶۱(۸)	۰/۰۵۴۲(۸)	۰/۰۵۳۹(۸)	۰/۱۲۵۰(۶)	۰/۰۵۲۵(۸)	۰/۰۸۰۰(۸)	w_4
(۷)	۰/۰۹۴۳(۷)	۰/۰۹۷۸(۷)	۰/۰۹۲۸(۷)	۰/۳۷۵۰(۵)	۰/۰۹۳۲(۷)	۰/۱۰۷۸(۷)	w_5
(۶)	۰/۱۰۳۷(۶)	۰/۱۱۷۴(۶)	۰/۱۰۹۰(۶)	۰/۵۰۰۰(۴)	۰/۱۰۹۰(۶)	۰/۱۴۱۷(۶)	w_6
(۲)	۰/۴۱۶۴(۲)	۰/۵۵۲۱(۳)	۰/۵۰۰۰(۴)	۰/۸۷۵۰(۲)	۰/۵۰۰۷(۴)	۰/۸۰۴۴(۲)	w_7
(۱)	۱(۱)	۱(۱)	۱(۱)	۱(۱)	۱(۱)	۱(۱)	w_8

لیپوستکی و کنکلین در سال ۲۰۰۲ با تمرکز روی مشاهدات غیرمعمول و غلط (UFO) که به علت داده‌های ورودی نادقیق و خطاهای تصادفی آشکار می‌شوند، روشی را ارائه دادند که به تخمین بردار اولویت استوار می‌پرداخت. آن‌ها از آزمون برازش χ^2 که انحراف نسبی بین داده‌های تجربی و نظری را اندازه می‌گیرد، استفاده کردند و عناصر a_{37} و a_{73} را به‌عنوان عناصر UFO در نظر گرفتند. توجه داشته باشید که بعد از تشخیص و میزان UFO، سطح سازگاری ماتریس قضاوت می‌تواند به آسانی بهبود یابد. اگر عناصر a_{37} و a_{73} را به ترتیب به $1/2$ و 2 تعدیل کنیم، دامنه اندیس سازگاری (CI) از ۰/۲۳۸تا ۰/۱۱۶ (کمترین مقدار) خواهد بود. بر این اساس در ماتریس مقایسه زوجی تعدیل شده، روش‌های EM، DEA/AR، DEA و E-DEAHP را برای تولید بردار وزن به‌کار گرفته‌ایم. با باور به این حقیقت که بهترین سازگاری حاصل شده است، هر چهار روش رتبه‌بندی یکسانی می‌دهند. این رتبه‌ها در ستون آخر (از سمت راست) جدول ۷ آمده‌اند. به آسانی می‌توان دید هنگامی که عناصر UFO در ماتریس اصلی به $1/2$ و 2 تعدیل می‌شوند، فقط رتبه‌بندی روش استوار لیپوستکی و کنکلین [۵] و روش E-DEAHP بدون تغییر باقی می‌ماند. ترتیب بردار اولویت استوار به‌صورت $w_8 \succ w_7 \succ w_1 \succ w_3 \succ w_2 \succ w_6 \succ w_5 \succ w_4$ است. ترتیب اولویت تولیدی از ماتریس مقایسه زوجی تعدیل شده توسط روش DEAHP به‌صورت $w_8 \sim w_1 \succ w_7 \succ w_3 \succ w_2 \succ w_6 \succ w_5 \succ w_4$ است. مشاهده می‌کنید که کمی با بردار اولویت استوار اختلاف دارد. توجه داشته باشید که منظور از روش استوار، روشی است که بردار اولویتی تخمین بزند که تحت تأثیر خطاهای ممکن در میان عناصر ماتریس مقایسه زوجی نباشد.

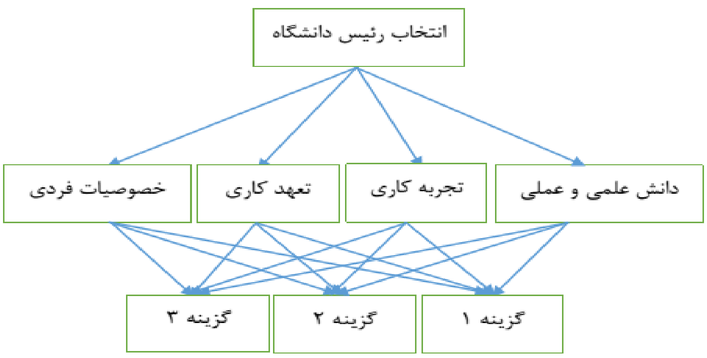
در مثال بعد، یک مسأله سلسله مراتبی را با روش پیشنهادی این مقاله حل می‌کنیم. هدف از آوردن این مثال، بررسی پتانسیل روش در تلفیق وزن‌های نسبی حاصل از مدل، برای به‌دست آوردن وزن نهایی است. این مثال را از منبع [۴] گرفته‌ایم.

مثال ۳: هدف انتخاب رئیس یک دانشگاه است. برای این کار چهار معیار توسط کمیته بررسی در نظر گرفته شده است. این معیارها عبارتند از: دانش علمی و عملی(C_1)، تجربه کاری (C_2)، تعهد کاری (C_3) و خصوصیات فردی (C_4). کاندیدای ایده‌آل تا حد ممکن باید از خصوصیات فوق برخوردار باشد. بعد از یک دوره طولانی جست‌وجو، سه کاندیدای بالقوه A_1، A_2 و A_3 برای مصاحبه‌ی کمیته بررسی، در لیست قرار گرفتند. ساختار سلسله مراتبی این مسأله در شکل ۱ آمده است. توجه کنید که این مسأله در نوع خود یک مسأله تصمیم‌گیری گروهی است. ولی فرض کنید کمیته بررسی در مورد همه‌ی ماتریس‌های مقایسه زوجی به توافق رسیده است. ماتریس‌های مقایسه زوجی به‌صورت زیر هستند. که در آن، A ماتریس مقایسه زوجی معیارها نسبت به هدف و B، C، D، و E به ترتیب ماتریس‌های مقایسه زوجی گزینه‌ها نسبت به هریک از معیارهای C_1، C_2، C_3 و C_4 هستند.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 1/5 & 1 & 1/5 & 1/5 \\ 1/3 & 5 & 1 & 1/3 \\ 1/2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix},\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1/4 & 1 \end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

نرخ سازگاری این ماتریس‌های مقایسه زوجی به ترتیب ۰/۰۷۹۷، ۰/۰۴۶۲، ۰/۰۴۶۲، ۰ و ۰/۰۴۶۲ است. با روش‌های مختلف وزن‌های نسبی معیارها و گزینه‌ها را حساب کرده‌ایم. همچنین وزن نهایی گزینه‌ها را با روش جمعی ساده به‌دست آورده‌ایم. این وزن‌ها را در جدول‌های ۸ تا ۱۲ مشاهده می‌کنید. توجه کنید که، وزن نهایی گزینه‌ها در ستون دوم هر جدول (از سمت راست) آمده است و با نرم ماکسیمم نرمال شده‌اند.



شکل ۱: ساختار سلسله مراتبی مسأله

جدول ۸: تلفیق وزن‌های نسبی EM

گزینه‌ها	معیارها				وزن نهایی	رتبه
	۰/۴۵۰۰	۰/۰۵۸۶	۰/۱۷۰۹	۰/۳۲۰۵	نرمال شده	
A_1	۰/۵۲۷۸	۰/۱۹۵۸	۰/۱۶۶۷	۰/۴۹۳۴	۱	۱
A_2	۰/۱۳۹۶	۰/۳۱۰۸	۰/۶۶۶۷	۰/۳۱۰۸	۰/۶۷۶۳	۲
A_3	۰/۳۳۲۵	۰/۴۹۳۴	۰/۱۶۶۷	۰/۱۹۵۸	۰/۶۱۹۴	۳

جدول ۹: تلفیق وزن‌های نسبی DEAHP

گزینه‌ها	معیارها				وزن نهایی	رتبه
	۱	۰/۲	۱	۱	نرمال شده	
A_1	۱	۰/۵	۰/۲۵	۱	۰/۹۲۷۶	۲
A_2	۰/۳۳۳۳	۱	۱	۱	۱	۱
A_3	۱	۱	۰/۲۵	۰/۵	۰/۷۶۹۸	۳

جدول ۱۰: تلفیق وزن‌های نسبی DEA/AR

گزینه‌ها	معیارها				وزن نهایی	رتبه
	۱	۰/۱۳۴۰	۰/۳۹۴۴	۰/۷۲۹۸	نرمال شده	
A_1	۱	۰/۴	۰/۲۵	۱	۱	۱
A_2	۰/۲۶۶۷	۰/۶۳۳۳	۱	۰/۶۳۳۳	۰/۶۴۱۹	۲
A_3	۰/۶۳۳۳	۱	۰/۲۵	۰/۴	۰/۶۱۵۲	۳

جدول ۱۱: تلفیق وزن‌های نسبی DEA

گزینه‌ها	معیارها				وزن نهایی	رتبه
	۰/۴۵۶۶	۰/۰۶۰۳	۰/۱۷۴۹	۰/۳۲۳۹	نرمال شده	
A_1	۰/۵۲۹۴	۰/۱۹۶۷	۰/۱۶۶۷	۰/۴۹۴۸	۱	۱
A_2	۰/۱۴۰۴	۰/۳۱۱۷	۰/۶۶۶۷	۰/۳۱۱۷	۰/۶۷۸۳	۲
A_3	۰/۳۳۳۳	۰/۴۹۴۸	۰/۱۶۶۷	۰/۱۹۶۷	۰/۶۲۰۵	۳

جدول ۱۲: تلفیق وزن‌های نسبی E-DEAHP

گزینه‌ها	معیارها				وزن نهایی	رتبه
	۱	۰/۱۳۲۳	۰/۴۳۱۱	۰/۸۰۵۶	نرمال شده	
A_1	۱	۰/۳۹۷۱	۰/۲۵	۱	۱	۱
A_2	۰/۲۶۷۴	۰/۶۹۱۸	۱	۰/۶۹۱۸	۰/۶۸۵۳	۲
A_3	۰/۷۰۴۹	۱	۰/۲۵	۰/۳۹۷۱	۰/۶۴۳۴	۳

می‌توانیم از جدول ۹ مشاهده کنیم که، روش DEAHP در محاسبه‌ی وزن‌های نسبی از تمام اطلاعات ماتریس مقایسه زوجی استفاده نکرده است. در واقع در ماتریس مقایسه زوجی معیارها نسبت به هدف (A)، ستون دوم و در ماتریس‌های مقایسه زوجی گزینه‌ها نسبت به معیارها یعنی B، C، D و E به ترتیب ستون‌های دوم، اول، اول و سوم را نرمال کرده است. همچنین این روش گزینه‌ی A_2 را به‌عنوان گزینه‌ی برتر انتخاب کرده است. در واقع ترتیب اولویت نهایی این روش به‌صورت $A_2 \succ A_1 \succ A_3$ است. در صورتی‌که روش‌های EM، DEA/AR، DEA و E-DEAHP گزینه‌ی A_1 را انتخاب کرده‌اند. ترتیب اولویت نهایی این روش‌ها به‌صورت $A_1 \succ A_2 \succ A_3$ است. توجه کنید که، اولویت وزن‌های نسبی حاصل از روش E-DEAHP با اولویت وزن‌های نسبی حاصل از سه روش EM، DEA/AR و DEA یکسان است.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله یک مدل برنامه‌ریزی خطی بر مبنای تحلیل پوششی داده‌ها و آنتروپی شانون پیشنهاد گردید. در مدل پیشنهادی اصل تجربی $n \geq 3(\mathrm{m+s})$ برای ماتریس‌های مقایسه زوجی از مرتبه حداقل شش رعایت گردیده است، لذا نسبت به مدل پیشنهادی راماناتان از قدرت تفکیک بالایی برخوردار است. همچنین مدل پیشنهادی قادر است برای ماتریس‌های مقایسه زوجی از مرتبه حداکثر پنج بدون توجه به سازگاری یا ناسازگاری ماتریس مقایسه زوجی، وزن‌های

نسبی منطقی تولید کند. مدل ارائه شده در این مقاله از تمام اطلاعات ماتریس مقایسه زوجی استفاده می‌کند و مطابق با اولویت شخصی تصمیم‌گیرنده، عناصر را اولویت‌بندی می‌کند. این مدل برای ماتریس‌های مقایسه زوجی کاملاً سازگار، وزن واقعی تولید می‌کند. بردار اولویت تولید شده توسط روش این مقاله، تحت تأثیر خطاهای ممکن در داده‌های تجربی ماتریس مقایسه زوجی نیست. به عبارت دیگر، این بردار اولویت، استوار است. از لحاظ محاسبات ریاضی، این مدل بسیار ساده بوده و بدون نیاز به حل مدل برنامه‌ریزی خطی می‌تواند در عمل به‌کار گرفته شود.

References

1. Golany B., "An interactive MOLP procedure for the extension of DEA to effectiveness analysis", Journal of the Operational Research Society, 39 (1988) 725–734.

2. Ramanathan R., "Data envelopment analysis for weight derivation and aggregation in the analytic hierarchy process", Computers and Operations Research, 33 (2006) 1289–1307.

3. Wang Y.M., Chin K.S., Poon G.K.K., "A data envelopment analysis method with assurance region for weight generation in the analytic hierarchy process", Decision Support Systems, 45 (2008) 913–921.

4. Wang Y.M., Chin K.S., "A new data envelopment analysis method for priority determination and group decision making in the analytic hierarchy process", European Journal of Operational Research, 195 (2009) 239–250.

5. Lipovetsky S., Conklin W.M., "Robust estimation of priorities in the AHP", European Journal of Operational Research, 137 (2002) 110–122.

6. Charnes A, Cooper W.W., Rhodes E., "Measuring the efficiency of decision making units", European Journal of Operational Research, 2 (1978) 429–444.

7. Shannon C.E., "A mathematical theory of communication", Bell System Technical Journal, 27 (1948) 379–423, 623–656.

8. Saaty T.L., "The Analytic Hierarchy Process", McGraw-Hill Company, New York, 1980.

9. Wang Y.M., Elhag T.M.S., "A goal programming method for obtaining interval weights from an interval comparison matrix", European Journal of Operational Research, 177 (2007) 458–471.

10. Sugihara K., Ishii H., Tanaka H., "Interval priorities in AHP by interval regression analysis", European Journal of Operational Research, 158 (2004) 745–754.

11. Zhang H., "A goal programming model of obtaining the priority weights from an interval preference relation", Information Sciences, 354 (2016) 197-210.