Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Uniformly separation property in vector-valued little Lipschitz space

Azin Golbaharan

Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Kharazmi University, Tehran, Iran.

E-mail: golbaharan@khu.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
11 January 2020
Revised form:
6 July 2020
Accepted:
28 July 2020
Published online:
14 May 2022

Keywords:

Banach space;
Lipschitz space;
Uniform separation property.

ABSTRACT

Introduction

Suppose that (X,d) be a compact metric space with a distinguished pointe andE be a Banach space.Collection of E −valued function f on X such that

$$\mathcal{L}(f)=\sup_{\substack{x,y\in X\\ ,x\neq y}}\frac{\|f(x)-f(y)\|}{d(x,y)}<\infty, \qquad f(e)=0$$

is called vector-valued Lipschitz space and denoted by $Lip_0(X,E)$. The space $Lip_0(X,E)$ with respect to the point wise operations on functions and the norm $\mathcal{L}(.)$ is a Banach space that separates points of X. The subset consists of all functions such that

$$\lim_{d(x,y)\to 0}\frac{\|f(x)-f(y)\|}{d(x,y)}=0$$

is a closed subspace of $Lip_0(X,E)$, denoted by $lip_0(X,E)$ and called little vector-valued Lipschitz space. In particular when Banach space E coincides with scaler field, $Lip_0(X,E)$ and $lip_0(X,E)$ is denoted by $Lip_0(X)$ and $lip_0(X)$ respectively.

Definition. The space $lip_0(X)$ separates points of X uniformly when there exists $C>1$ such that for each distinct pair point $x,y\in X$ there is $f\in lip_0(X,E)$ with

$$f(y)=0, \qquad \|f(x)\|=d(x,y), \qquad \mathcal{L}(f)\leq C.$$

Definition.The Banach space E has approximation property if for each $\varepsilon>0$ and compact subset K of E there exists a finite dimensional bounded operator $T:E\to E$ such that $\sup_{x\in K}\|Tx-x\|<\varepsilon$.

Results and discussion

In this paper we deal with the uniform separation property of a metric space X by the little vector-valued Lipschitz space, namely $lip_0(X,E)$.

Conclusion

We show that if $lip_0(X)$ has the approximation property and E be a topological dual of some Banach space, then there exists a compact metric space Y with a distinguished point and a non-expansive function $\pi: X\to Y$ such that $lip_0(Y,E)$ separates the point of Y uniformly and C_π, the composition operator induced by π, is a surjective linear isometry from $lip_0(Y,E)$ to $lip_0(X,E)$.

How to cite: Golbaharan, A.,(2022) Uniformly separation property in vector-valued little Lipschitz space. *Mathematical Researches*, 8 (1), 119-126

cc BY NC © The Author(s). Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

یکنواخت جداسازی در فضای توابع لیپ‌شیتس کوچک برداری مقدار

آذین گل‌بهاران ✉

نویسندهٔ مسئول، دانشگاه خوارزمی، دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر دانشگاه خوارزمی، گروه ریاضی، تهران، ایران.
پست الکترونیکی: golbaharan@khu.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۲۱
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۴/۱۶
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۵/۰۷
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۲۴

واژه‌های کلیدی:
فضای باناخ،
فضای توابع لیپ‌شیتس،
یکنواخت جداسازی،

فرض کنید (X,d) یک فضای متریک فشرده و E یک فضای باناخ است. در این مقاله خاصیت یکنواخت جداسازی نقاط X توسط فضای $\mathrm{lip}_0(X,E)$ مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

استناد: گل بهاران، آذین؛ (۱۴۰۱) یکنواخت جداسازی در فضای توابع لیپ‌شیتس کوچک برداری مقدار. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۱)، ۱۲۶-۱۱۹.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

© نویسندگان.

۱. مقدمه

فرض کنید (X,d) یک فضای متریک با یک نقطه متمایز e و E یک فضای باناخ باشند. گردایه تمامی توابع E-مقداری f بر X که

$$\mathcal{L}(f)=\sup_{\substack{x,y\in X\\ ,x\neq y}}\frac{\|f(x)-f(y)\|}{d(x,y)}<\infty$$

با $Lip(X,E)$ نمایش داده می‌شود و فضای توابع لیپ‌شیتس برداری‌مقدار نام دارد. مجموعه $Lip(X,E)$ نسبت به اعمال نقطه‌وار روی توابع و نرم

$$\|f\|=\|f(e)\|+\mathcal{L}(f),\quad f\in Lip(X,E)$$

یک فضای باناخ است که نقاط X را جدا می‌کند. زیرمجموعهٔ همه توابع f با ویژگی

$$\lim_{d(x,y)\to 0}\frac{\|f(x)-f(y)\|}{d(x,y)}=0$$

زیرفضای بسته $Lip(X,E)$ است که فضای توابع لیپ‌شیتس برداری‌مقدار کوچک نام دارد و با نماد $lip(X,E)$ نشان داده می‌شود. در حالت خاصی که فضای باناخ E میدان اسکالر باشد، فضاهای $Lip(X,E)$ و $lip(X,E)$ را به ترتیب با $Lip(X)$ و $lip(X)$ نمایش می‌دهند. همچنین زیر فضای بسته $Lip(X,E)$ ($lip(X,E)$) متشکل از همه توابعی که در نقطه e مقدار صفر اختیار می‌کنند را با $Lip_0(X,E)$ ($lip_0(X,E)$) نمایش می‌دهند.

به ازای بردار ناصفر $v_0\in E$ و نقطه حدی x_0 از X، تابع

$$f:X\to E,\qquad f(x)=(d(x,x_0)-d(e,x_0))v_0$$

را در نظر بگیرید. روشن است که $f\in Lip_0(X,E)$ و $f\notin lip_0(X,E)$. بنابراین اگر توپولوژی حاصل از متر d روی فضای X گسسته نباشد (X دارای نقطه حدی باشد)، آن‌گاه $lip_0(X,E)$ زیرفضای سره‌ی $Lip_0(X,E)$ است و در صورتی که فضای متریک (X,d) یکنواخت گسسته باشد (عدد ثابت C موجود باشد که به ازای هر دو نقطه متمایز نامساوی $x,y\in X$ نامساوی $d(x,y)>c$ برقرار باشد)، $Lip_0(X,E)=lip_0(X,E)$. این فضاها تا کنون به‌طور گسترده در مقالات پژوهشی مورد توجه قرار گرفته‌اند. برای مطالعه بیشتر در این زمینه به [۳] مراجعه نمایید.

تعریف۱،۱. فرض کنیم X,Y دو مجموعه ناتهی و $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از توابع از X به Y باشد.گوییم خانواده $\mathcal{F}$ نقاط X را جدا می‌کند هرگاه به ازای هر دو نقطهٔ متمایز $x,y\in X$ تابع $f\in\mathcal{F}$ یافت شود که $f(y)\neq f(x)$.

فضای $Lip_0(X)$ نقاط X را جدا می‌کند ولی فضای $lip_0(X)$ لزوما نقاط X را جدا نمی‌کند. به عنوان نمونه اگر مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را مجهز به متر قدر مطلق در نظر بگیریم، آن‌گاه $lip_0(\mathbb{R})=\{0\}$. البته دسته بزرگی از فضاهای متریک X موجود هستند که $lip_0(X)$ نقاط X را جدا می‌کند.

تعریف۲٫۱. گوییم فضای $lip_0(X)$ به‌طور یکنواخت نقاط X را جدا می‌کند هرگاه ثابت $C > 1$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر دو نقطه متمایز $x, y \in X$ تابع $f \in lip_0(X)$ یافت شود که

$$f(y) = 0, \qquad f(x) = d(x, y), \qquad \mathcal{L}(f) \leq C.$$

برای $0 < \alpha < 1$ اگر X^α را فضای متریک (X, d^α) در نظر بگیریم، آن‌گاه به ازای هر دو نقطه متمایز $x, y \in X$ تابع

$$f(t) = d(x, t) - d(e, x) \qquad (t \in X)$$

متعلق به $lip_0(X^\alpha)$، فضای توابع هلدر از نمای α است، لذا این فضا به‌طور یکنواخت نقاط X را جدا می‌کند. شایان ذکر است همان‌طور که در قضیه زیر بیان شده، به ازای هر فضای متریک فشرده X، فضای متریک فشرده Y یافت می‌شود که $lip_0(Y)$ به طور یکنواخت نقاط Y را جدا می‌کند و با $lip_0(X)$ به‌طور طول‌پا یک‌ریخت است. رابطه هم‌ارزی $\sim$ را روی X به این صورت در نظر بگیریم که به ازای هر $x, y \in X$، تعریف می‌کنیم $x \sim y$ اگر $f(x) = f(y)$ برای همه $f \in lip_0(X)$. در قضیه زیر مجموعه Y برابر با $\frac{X}{\sim}$، فضای خارج قسمتی رابطه هم‌ارزی $\sim$ است.

قضیه۳٫۱.[3, Corollary 4.4.9] فرض کنیم X یک فضای متریک فشرده با یک نقطه متمایز باشد. در این صورت عملگر

$$C_\pi: lip_0(Y) \to lip_0(X), \quad C_\pi(f) = f \circ \pi$$

که در آن Y فضای خارج قسمتی با تعریف فوق و $\pi: X \to Y$ نگاشت تصویر طبیعی است، یک‌ریختی طول‌پا است.

تعریف۴٫۱. گوییم فضای $lip_0(X, E)$ به‌طور یکنواخت نقاط X را جدا می‌کند هرگاه ثابت $C > 1$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر دو نقطه متمایز $x, y \in X$ تابع $f \in lip_0(X, E)$ یافت شود که

$$f(y) = 0, \qquad \|f(x)\| = d(x, y), \qquad \mathcal{L}(f) \leq C.$$

به ازای هر $f \in lip_0(X)$ و $v \in E$ تابع $f.v$ از X به E را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f.v)(x) = f(x)v \qquad (x \in X).$$

در این صورت $f.v \in lip_0(X, E)$ و $\mathcal{L}(f.v) = \mathcal{L}(f)\|v\|$. با استفاده از این مطلب همان‌طور که در [1, Section 3] اشاره شده است می‌توان نشان داد اگر فضای $lip_0(X)$ به‌طور یکنواخت نقاط X را جدا کند آن‌گاه فضای $lip_0(X, E)$ نیز به‌طور یکنواخت نقاط X را جدا خواهد کرد. البته در [۱] ویژگی یکنواخت جدا کردن به صورت زیر تعریف شده است

گوییم فضای $lip_0(X, E)$ به‌طور یکنواخت نقاط X را جدا می‌کند هرگاه ثابت $C > 1$ وجود داشته‌باشد به طوری که به ازای هر دو نقطه متمایز $x, y \in X$ و $v \in E$ با شرط $\|v\| = 1$ تابع $f \in lip_0(X, E)$ یافت شود که

$$f(y) = 0, \qquad f(x) = d(x,y)v, \qquad \mathcal{L}(f) \leq C.$$

که با تعریف ۴,۱ تطابق دارد.

در این مقاله هدف آن است که قضیهٔ ۳,۱ را به فضای توابع لیپ‌شیتس برداری مقدار کوچک بر مجموعهٔ فشرده X گسترش دهیم.

۲. نتایج

نخست به بیان یک تعریف و یک نتیجه از [۲] را می‌پردازیم که در ادامه به آن نیاز داریم.

تعریف۱,۲. فضای باناخ E دارای خاصیت تقریب است اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ و هر زیرمجموعهٔ فشرده K از E، یک عملگر خطی کران‌دار با رتبهٔ متناهی مانند $T: E \to E$ وجود داشته باشد که $\sup\limits_{x\in K}\|Tx - x\| < \varepsilon$.

قضیه۲,۲. [2, Corollary 5.17] فرض کنیم X یک فضای متریک فشرده است. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند.

(الف) فضای $lip(X)$ دارای خاصیت تقریب است.

(ب) به ازای هر فضای باناخ E، $\varepsilon > 0$ و $f \in lip(X, E^*)$، عناصر $f_1, \dots, f_n \in lip(X)$ و $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in E^*$ وجود دارند که به ازای $g = \sum_{i=1}^{n} f_i . \lambda_i$ داریم $\|f - g\| < \varepsilon$.

قضیه بالا درباره فضای $lip_0(X)$ نیز برقرار است.

لم۳,۲. فرض کنیم X یک فضای متریک فشرده با یک نقطه متمایز و فضای $lip_0(X)$ دارای خاصیت تقریب است. در این صورت به ازای هر فضای باناخ E، $\varepsilon > 0$ و $f \in lip_0(X, E^*)$، عناصر $f_1, \dots, f_n \in lip_0(X)$ و $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in E^*$ وجود دارند که به ازای $g = \sum_{i=1}^{n} f_i . \lambda_i$ داریم $\mathcal{L}(f - g) < \varepsilon$.

برهان. فرض کنیم X یک فضای متریک فشرده با نقطه متمایز e و فضای $lip_0(X)$ دارای خاصیت تقریب است. به ازای هر $f \in lip(X)$، تابع $f - f(e)1$ متعلق به $lip_0(X)$ است که در آن 1 تابع ثابت یک است. در واقع می‌توان گفت $lip(X) = lip_0(X) \oplus \mathbb{C}1$. همچنین نگاشت تصویر $\tau: lip(X) \to lip_0(X)$ با ضابطه $\tau(f) = f - f(e)1$ خطی و پیوسته است. زیرمجموعه فشرده K از $lip(X)$ و $\varepsilon > 0$ را دلخواه در نظر بگیرید زیرمجموعه $L = \tau(K)$ از $lip_0(X)$ فشرده است. در نتیجه یک عملگر خطی کران‌دار با رتبه متناهی مانند $S: lip_0(X) \to lip_0(X)$ وجود دارد که $\sup\limits_{f\in L} \mathcal{L}(S(f) - f) < \varepsilon$. به این ترتیب نگاشت

$$T: lip(X) \to lip(X), \quad T(f) = S(f - f(e)1) + f(e)1$$

یک عملگر خطی کران‌دار با رتبه متناهی است. به علاوه به ازای هر $f \in K$،

$$\|T(f) - f\| = \|S(f - f(e)1) + f(e)1 - f\| = \mathcal{L}(S(\tau(f)) - \tau(f)) < \varepsilon.$$

بنابراین $lip(X)$ دارای خاصیت تقریب است. اکنون فضای باناخ E، $\varepsilon > 0$ و $f \in lip_0(X, E^*)$ را دلخواه در نظر بگیرید. بنابر قضیهٔ ۲،۲. عناصر $g_1, \dots, g_n \in lip(X)$ و $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in E^*$ وجود دارند که $\|f - \sum_{i=1}^n g_i . \lambda_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$. به این ترتیب

$$\mathcal{L}\left(f - \sum_{i=1}^{n} \tau(g_i) . \lambda_i\right) = \left\|f - \sum_{i=1}^{n} \tau(g_i) . \lambda_i\right\|$$
$$\leq \left\|f - \sum_{i=1}^{n} g_i . \lambda_i\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{n} g_i(e) . \lambda_i\right\| \leq 2\left\|f - \sum_{i=1}^{n} g_i . \lambda_i\right\| < \varepsilon$$

■

اکنون قضیهٔ اصلی را بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۴،۲. فرض کنیم X یک فضای متریک فشرده با یک نقطه متمایز و $lip_0(X)$ دارای خاصیت تقریب باشد. به‌علاوه فرض کنیم E دوگان یک فضای باناخ باشد. در این صورت فضای متریک فشرده Y با یک نقطه متمایز و یک نگاشت غیرانبساطی $\pi: X \to Y$ وجود دارد که $lip_0(Y, E)$ به طور یکنواخت نقاط Y را جدا می‌کند و عملگر ترکیبی القا شده توسط π فضای $lip_0(Y, E)$ را به‌طور طول‌پا به روی $lip_0(X, E)$ تصویر می‌کند.

برهان. فرض کنیم X یک فضای متریک فشرده با یک نقطه متمایز و $lip_0(X)$ دارای خاصیت تقریب باشد. به علاوه E یک فضای دوگان باشد. رابطهٔ هم‌ارزی $\approx$ را روی X به این صورت در نظر بگیریم. به ازای هر $x, y \in X$، تعریف می‌کنیم $x \approx y$ اگر $f(x) = f(y)$ برای همه $f \in lip_0(X, E)$. مجموعه Y را $\frac{X}{\approx}$، فضای خارج قسمتی این رابطه هم‌ارزی قرار دهید. تابع زیر یک متر روی Y بدست می‌دهد.

$$\rho([x], [y]) = \sup\{\|f(x) - f(y)\| : f \in lip_0(X, E), \mathcal{L}(f) \leq 1\} \qquad \left([x], [y] \in \frac{X}{\approx}\right)$$

به این ترتیب نگاشت خارج قسمتی $\pi: X \to Y;\ \pi(x) = [x]$ یک نگاشت غیرانبساطی است.

به ازای هر $x, y \in X$، تعریف می‌کنیم $x \sim y$ اگر $f(x) = f(y)$ برای همه $f \in lip_0(X)$. روشن است که اگر $x \approx y$ آن‌گاه $x \sim y$. برعکس فرض کنید $x \not\approx y$. پس تابع f متعلق به $lip_0(X, E)$ وجود دارد که $f(x) \neq f(y)$. بنابر قضیه هان-باناخ، $\gamma \in E^*$ یافت می‌شود که $\gamma(f(x)) \neq \gamma(f(y))$. به این ترتیب $\gamma o f \in lip_0(X)$ و $\gamma o f(x) \neq \gamma o f(y)$. لذا $x \nsim y$. بنابراین روابط $\sim$ و $\approx$ منطبق هستند.

عملگر ترکیبی زیر را در نظر بگیرید.

$$C_\pi: lip_0(Y,E) \to lip_0(X,E), \qquad C_\pi(F) = Fo\pi$$

با توجه به غیرانبساطی بودن نگاشت π روشن است که عملگر ترکیبی C_π خوش تعریف است. اکنون نشان می‌دهیم این عملگر یک طول‌پایی پوشا است. برای این منظور باید به ازای هر $F \in lip_0(Y,E)$ ثابت کنیم $\mathcal{L}(F) = \mathcal{L}(Fo\pi)$ روشن است که

$$\mathcal{L}(Fo\pi) = \sup_{\substack{x,y\in X\\ ,x\neq y}} \frac{\|Fo\pi(x) - Fo\pi(y)\|}{d(x,y)} \leq$$

$$\sup_{\substack{x,y\in X\\ ,\pi(x)\neq\pi(y)}} \frac{\|F(\pi(x)) - F(\pi(y))\|}{\rho(\pi(x),\pi(y))} = \sup_{\substack{[x],[y]\in Y\\ ,[x]\neq[y]}} \frac{\|F([x]) - F([y])\|}{\rho([x],[y])} = \mathcal{L}(F).$$

اینک $x, y \in X$ را با ویژگی $[x] \neq [y]$ دل‌خواه در نظر بگیریم و تابع g را بر X با ضابطه

$$g(t) = \frac{1}{\mathcal{L}(Fo\pi)} \|Fo\pi(t) - Fo\pi(y)\|$$

تعریف می‌کنیم. داریم

$$\mathcal{L}(g) = \sup_{\substack{s,t\in X\\ ,s\neq t}} \frac{|g(s) - g(t)|}{d(s,t)}$$
$$= \sup_{\substack{s,t\in X\\ ,s\neq t}} \frac{1}{\mathcal{L}(Fo\pi)} \frac{|\|Fo\pi(s) - Fo\pi(y)\| - \|Fo\pi(t) - Fo\pi(y)\||}{d(s,t)}$$
$$\leq \frac{1}{\mathcal{L}(Fo\pi)} \sup_{\substack{s,t\in X\\ ,s\neq t}} \frac{\|Fo\pi(s) - Fo\pi(t)\|}{d(s,t)} \leq 1.$$

به این ترتیب $\mathcal{L}(g) \leq 1$ و نیز $g \in lip_0(X)$. درنتیجه

$$\frac{\|F([x]) - F([y])\|}{\rho([x],[y])} =$$
$$\frac{|g(x) - g(y)|}{\sup\{\|f(x) - f(y)\|: f \in lip_0(X,E), \mathcal{L}(f) \leq 1\}} \mathcal{L}(Fo\pi) \leq \mathcal{L}(Fo\pi).$$

بنابراین $\mathcal{L}(F) \leq \mathcal{L}(Fo\pi)$ در نهایت داریم $\mathcal{L}(F) = \mathcal{L}(Fo\pi)$

اکنون کافی است نشان دهیم C_π پوشا است. عناصر $n \in \mathbb{N}$، $v_1, \dots, v_n \in E$ و $f_1, f_2, \dots, f_n \in lip_0(X)$ را دل‌خواه در نظر بگیرید. بنابر قضیه ۳،۱ نتیجه می‌گیریم $g_1, \dots, g_n \in lip_0(Y)$ وجود دارند که به ازای هر $i \in \{1, \dots, n\}$ $g_i o\pi = f_i$. پس $C_\pi(\sum_{i=1}^n g_i . v_i) = \sum_{i=1}^n f_i . v_i$. چون C_π یک طول‌پایی است، برد آن بسته است. لذا طبق قضیه۲،۲، C_π پوشا است.

در انتها ثابت کنیم $lip_0(Y,E)$ نقاط Y را به‌طور یکنواخت جدا می‌کند. نقاط متمایز $[x],[y] \in Y$ را دل‌خواه در نظر بگیرید. بنابر تعریف متر ρ تابع $k \in lip_0(X,E)$ وجود دارد که $\mathcal{L}(k) = 1$ و

$$0 < \frac{1}{2}\rho([x],[y]) < \|k(x)-k(y)\| \leq \rho([x],[y]).$$

چون C_π پوشا است، $f \in lip_0(Y,E)$ وجود دارد که $fo\pi = k$ و $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(k)$ چون $0 < \|k(x)-k(y)\|$، داریم $f([x]) \neq f([y])$. فرض کنید $\|f([x])\| \leq \|f([y])\|$. توجه کنیم که از $f([x]) \neq f([y])$ و $\|f([x])\| \leq \|f([y])\|$ نتیجه می‌گیریم $f([y]) \neq 0$. تعریف کنید

$$h: E \to \mathbb{R}; \qquad h(v) = \min\{2\|v\|, \|v - f([x])\|\}.$$

به سادگی دیده می‌شود که $\mathcal{L}(h) \leq 2$ بردار ثابت $v_0 \in E$ را که $\|v_0\| = 1$ اختیار کرده و اسکالر ثابت C را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$1 \leq C = \frac{\rho([x],[y])}{\|f([x]) - f([y])\|} \leq 2$$

به ازای هر $t \in Y$ قرار دهید $g(t) = Chof(t)v_0$. در این صورت $g \in lip_0(Y,E)$ و

$$\|g([y])\| = \rho([x],[y]), \qquad g([x]) = 0, \qquad \mathcal{L}(g) \leq 4.$$

پس $lip_0(Y,E)$ نقاط Y را به‌طور یکنواخت جدا می‌کند.

References

1. A. Jimenez-Vargas, A. Morales Campoy and M. Villegas-Vallecillos, *The uniform separation property and Banach-Stone theorems for lattice-valued Lipschitz functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), 3769-3777.
2. J. A. Johnson, *Banach spaces of Lipschitz functions and vector valued Lipschitz functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 148 (1970), 147-169.
3. N. Weaver, Lipschitz algebras, World Scientific Publishing Co., River Edge, NJ, 1999.