Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Interval Shrinkage Estimation reliability System of Stress-Strengths Models in two parameter Lindley distribution

Parviz Nasiri[1] ✉, Faezeh Ebrahimi[2]

1. Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran.

✉E-mail: pnasiri@pnu.ac.ir

2. Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran.

E-mail: faez.ebrahimi@gmail.com

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
26 August 2019
Revised form:
22 June 2020
Accepted:
23 June 2020
Published online:
14 May 2022

Keywords:

Interval Shrinkage Estimation;
Lindley distribution;
two parameter Lindley distribution;
Stress-Strengths model;
Estimate;
mean error square.

ABSTRACT

Introduction

The reliability System plays an important role in the reliability of power play models. Reliability System in Stress-Strengths models is a measure of component reliability. This model was first introduced by Birnbaum in 1956. As we know, the Lindley distribution is widely used in reliability theory and many researchers are used this distribution to calculate Stress-Strengths. In 2013 Al Mutairi and Kundu work out on stress-strength reliability for Lindley distribution. In 2017 Rezaei, et al. estimate the stress-strength parameter $R=P(Y<X)$, when the variables X and Y are from General Lindley distribution. There are different methods to estimate $R=P(Y<X)$ such as maximum likelihood, method of moments, Bayesian, and shrinkage estimation. Recently, many researchers consider the interval shrinkage estimation to estimate parameters of statistical distribution. Here, for the first time, we estimate the $R=P(X<Y)$ by using the interval shrinkage estimation in two parameter Lindley distribution. Ghitany et al. in 2008 showed that the behavior of this distribution in data analysis of life data and reliability is better than the exponential distribution. So, we estimate the parameters of Lindley and $R=P(X<Y)$ by using the interval shrinkage and method of moments estimation. In 2013 Shanker, et al. considers two parameter Lindley distribution for modeling waiting and survival time data.

Material and methods

In statistical inference, choosing the methods of estimation is very essential in the process of it. The interval shrinkage and method of moments estimation for Lindley distribution is obtained. For interval shrinkage estimation, we consider as an interval for parameter.

Results and discussion

To compare the estimators, samples with different sizes and values of parameters are generated from two parameter Lindley distribution by applying R software. Consequently, comparison of the estimators, the estimation of parameters and mean square errors of them are accomplished.

Conclusion

Simulation and real data methods are used to compare the method of moments and interval shrinkage estimation for estimating parameters of two parameter Lindley distribution. The results show that the interval shrinkage estimator is better than the method of moment estimator.

How to cite: Nasiri, P., Ebrahimi, F., (2022) Interval Shrinkage Estimation reliability System of Stress-Strengths Models in two parameter Lindley distribution. *Mathematical Researches*, 8 (1), 72-88

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

برآورد انقباضی-بازه‌ای قابلیت سیستم در مدل‌های تنش مقاومت توزیع لیندلی دو پارامتری

پرویز نصیری[1]، فائزه ابراهیمی [2]

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. پست الکترونیکی: pnasiri@pnu.ac.ir

۲. گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. پست الکترونیکی: faez.ebrahimi@gmail.com

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۶/۰۴
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۴/۰۲
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۴/۰۳
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۲۴

واژه‌های کلیدی:
برآوردگر انقباضی ـ بازه‌ای،
توزیع لیندلی،
توزیع لیندلی دو پارامتری،
مدل تنش مقاومت،
برآورد،
میانگین مربع خطا.

چکیده

از آن‌جایی که توزیع لیندلی کاربرد وسیعی در نظریه قابلیت اعتماد دارد، محققان زیادی برای محاسبهٔ تنش مقاومت از این توزیع استفاده کرده‌اند، در این مقاله برآن شدیم، قابلیت سیستم در مدل‌های تنش مقاومت برای متغیرهای تصادفی و مستقل و دارای توزیع لیندلی دو پارامتری، را برآورد کنیم. بدین منظورضمن معرفی تابع چگالی لیندلی دو پارامتری، نشان داده می‌شود که برآوردگرهای گشتاوری به طور مجانبی ناااریب‌اند. و در ادامه، برآوردگر انقباضی بازه‌ای معرفی می‌شود. در پایان، پارامتر قابلیت سیستم در مدل‌های تنش مقاومت به روش‌های مختلف برآورد می‌شود و با استفاده از معیار میانگین مربع خطا، مقدار آن با سایر برآوردگرها مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

استناد: نصیری، پرویز؛ ابراهیمی، فائزه؛ (۱۴۰۱). برآورد انقباضی-بازه‌ای قابلیت سیستم در مدل‌های تنش مقاومت توزیع لیندلی دو پارامتری. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۱)، ۷۲-۸۸.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

قابلیت سیستم در مدل‌های تنش مقاومت نقش مهمی در قابلیت اعتماد ایفا می‌کند که در آن متغیر Y را تنش و متغیر X را مقاومت می‌نامند. وقتی تنش از مقاومت بیشتر باشد، مؤلفه بلافاصله از کار می‌افتد و تا زمانی که $X > Y$ است، به صورت رضایت‌بخش عمل می‌کند. بنابراین قابلیت سیستم در مدل‌های تنش مقاومت یک میزان برای قابلیت اعتماد مؤلفه است. مدل تنش – مقاومت از جمله مدل هایی است که در سه دهۀ اخیر مورد توجه پژوهش بوده و برای مدل بندی قابلیت اعتماد در مسائل مختلف استفاده شده است. انگیزۀ اصلی مطالعه و توسعۀ این مدل را به مسائل آماربردی که در آن موضوع مقاومت یک واحد و تنش وارده برآن مطرح است، نسبت داد. این مدل برای اولین بار توسط بیرنبام [۱] ارائه شد و در بسیاری از شاخه‌های کاربردی از جمله مهندسی عمران، مکانیک و هوافضا مورد استفاده قرار گرفت. به دنبال آن، پژوهشگران زیادی توزیع‌های مختلفی برای پارامتریای تصادفی مقاومت و تنش در نظر گرفته‌اند که مهمترین آنها چرچ و هریس [۲]، تانگ [۳]، وودوارد و کلی [۴]، بگ و ساین [۵]، اواد و قراف [۶]، مک‌کول [۷]، سرلس و پاگت (۱۹۹۸، ۲۰۰۱)، کوتز و همکاران (۲۰۰۳)، رقاب و کوندو (۲۰۰۵)، کوندو و گوپتا [۱۲] و [۱۳]، ساراکوگلو و کایا [۱۴] و ساراکوگلو و همکاران [۱۵] و [۱۶]، الموتیری و همکاران [۱۷] پارامتر تنش مقاومت را برای توزیع لیندلی بررسی کردند و برآوردگرنااریب با کمترین واریانس برای آن را به‌دست آوردند. گولوسونی و لیزنفلد [۱۸] برآورد انقباضی بازه‌ای و نصیری و جباری [۱۹] برآورد انقباضی برای پارامتر توزیع نمایی با حضور داده دورافتاده برای پارامتر مکان توزیع نمایی را معرفی کردند. امین [۲۰] برآورد تنش مقاومت را براساس مقادیر رکورد و رضایی و همکاران [۲۱] برای توزیع GLD5 معرفی کردند.

تابع چگالی لیندلی با پارامتر θرا نخستین بار لیندلی [۲۲] از ترکیب توزیع‌های نمایی و گاما به‌صورت زیر معرفی کرد:

$$f(x;\theta)=\frac{\theta^{2}}{(1+\theta)}(1+x)e^{-\theta x} \quad ; \quad x>0 , \quad \theta>0 \tag{1}$$

که به ترتیب دارای تابع توزیع و گشتاور مرتبۀ rام زیر است:

$$F(x)=1-\left(1+\frac{\theta x}{\theta+1}\right)e^{-\theta x} \quad ; \quad x>0 , \quad \theta>0 \tag{2}$$

$$E(X^{r})=\frac{(\theta+r+1)r!}{(1+\theta)\theta^{r}} \tag{3}$$

قیطانی و همکاران [۲۳] نشان دادند که رفتار این توزیع در تحلیل داده طول عمر و قابلیت اعتماد، بهتر از توزیع نمایی است. همچنین توزیع به دلیل دارا بودن یک پارامتر شکل، انعطاف کافی برای تحلیل انواع مختلف داده‌های طول عمر را ندارد. در نتیجه، برای بالا بردن سازگاری در مدل‌بندی، تعمیم‌های بیشتر از این توزیع مورد توجه پژوهشگران نظیر ذاکرزاده و دولتی [۲۴]، ناداراجا و همکاران [۲۵]، شانکر و همکاران [۲۶] قرار گرفت. ابوعموح و همکاران [۲۷] مروری بر توزیع‌های لیندلی تعمیم یافته انجام دادند و یک تعمیم جدید معرفی کردند که این تعمیم جدید آمیخته‌ای از دو توزیع گامای $Gamma(\alpha, \theta)$ و $Gamma(\alpha-1, \theta)$ با احتمال آمیختگی به‌ترتیب $p_1 = \frac{1}{(1+\theta)}$ و $p_2 = \frac{\theta}{(1+\theta)}$ است و دارای چگالی به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x;\ \theta,\alpha) = \frac{\theta^{\alpha} x^{\alpha-2}}{(1+\theta)\Gamma(\alpha)}(x+\alpha-1)e^{-\theta x}\ ;\ x>0, \theta\geq 0\ ,\ \alpha\geq 2 \tag{۴}$$

که شکل تعمیم یافته تابع چگالی لیندلی است و آن را با نماد GLD5 نمایش می‌دهند. به راحتی مشاهده می‌شود که برای $\alpha = 2$ همان توزیع لیندلی است.

توابع چگالی احتمال و توزیع تجمعی توزیع لیندلی دو پارامتری (TPLD) توسط شانکر و همکاران [۲۹] به صورت زیر معرفی شد:

$$f(x;\theta,\ \alpha) = \frac{\theta^2}{\alpha+\theta}(1+\alpha x)e^{-\theta x}\ \ ;\ \ x>0,\ \alpha>-\theta\ ,\ \theta>0 \tag{۵}$$

$$F(x;\theta,\ \alpha) = 1-\left(\frac{\theta+\alpha+\alpha\theta x}{\theta+\alpha}\right)e^{-\theta x}\ \ ;\ \ x>0\ ,\ \alpha>-\theta\ ,\ \theta>0 \tag{۶}$$

در این مقاله ضمن بررسی کارایی برآوردگرها، برآورد انقباضی و انقباضی بازه‌ای را مد نظر قرار می‌دهیم که که باعث کاهش اریبی می‌شود. اگر $\hat{\theta}$ برآوردگر کلاسیک و θ_g حدس اولیه باشد، برآوردگر انقباضی، تلفیقی نوین از برآورد کلاسیک و حدس اولیه درباره پارامتر به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\hat{\theta}_{Sh} = \theta_g + \omega\left(\hat{\theta}-\theta_g\right) \tag{۷}$$

که در آن، $\omega \in (0,1)$ راعامل انقباضی می‌نامند. اگر $\hat{\theta}$ یک برآوردگر ناریب باشد، می‌توان با مینیمم کردن میانگین مربعات خطا، عامل انقباضی را به‌صورت زیر به دست آورد:

$$
\begin{aligned}
MSE\left(\hat{\theta}_{Sh}\right) &= E\left(\hat{\theta}_{Sh}-\theta\right)^{۲} \\
&= E\left(\omega\hat{\theta}-\omega\theta+\omega\theta+\theta_g-\omega\theta_g-\theta\right)^{۲} \\
&= E\left(\omega\left(\hat{\theta}-\theta\right)+\omega(\theta-\theta_g)+\left(\theta_g-\theta\right)\right)^{۲} \\
&= E\left(\omega\left(\hat{\theta}-\theta\right)+(۱-\omega)\left(\theta_g-\theta\right)\right)^{۲} \\
&= \omega^{۲}E\left(\hat{\theta}-\theta\right)^{۲}+(۱-\omega)^{۲}\left(\theta_g-\theta\right)^{۲} \\
&= \omega^{۲}V\left(\hat{\theta}\right)+(۱-\omega)^{۲}\left(\theta_g-\theta\right)^{۲}
\end{aligned}
\tag{۸}
$$

برای مینیمم کردن رابطهٔ اخیر، پس از مشتق گرفتن نسبت به ω خواهیم داشت:

$$
\frac{dMSE\left(\hat{\theta}_{Sh}\right)}{d\omega}=۲\omega V\left(\hat{\theta}\right)-۲(۱-\omega)\left(\theta_g-\theta\right)^{۲}=۰
$$

$$
\omega^{*}=\frac{\left(\theta-\theta_g\right)^{۲}}{V\left(\hat{\theta}\right)+\left(\theta-\theta_g\right)^{۲}}
\tag{۹}
$$

با توجه به روابط (۷) و (۹) برآوردگر انقباضی برابر است با:

$$
\hat{\theta}_{Sh}=\theta_g+\left(\frac{\left(\theta-\theta_g\right)^{۲}}{V\left(\hat{\theta}\right)+\left(\theta-\theta_g\right)^{۲}}\right)\left(\hat{\theta}-\theta_g\right)
\tag{۱۰}
$$

رابطهٔ (۷) به ازای مقدار رابطهٔ (۹) دارای کمترین میانگین مربعات است:

$$
MSE\left(\hat{\theta}_{Sh}\right)=\omega^{*2}V\left(\hat{\theta}\right)+(1-\omega^{*})^{2}\left(\theta_g-\theta\right)^{2}
$$

اگر $\theta_g-\theta=b$ در نظر بگیریم، داریم:

$$
\begin{aligned}
MSE\left(\hat{\theta}_{Sh}\right) &= \frac{b^{۴}}{\left(V\left(\hat{\theta}\right)+b^{۲}\right)^{۲}}V\left(\hat{\theta}\right)+\left(۱-\frac{b^{۲}}{V\left(\hat{\theta}\right)+b^{۲}}\right)^{۲}b^{۲} \\
&= \frac{b^{۴}}{\left(V\left(\hat{\theta}\right)+b^{۲}\right)^{۲}}V\left(\hat{\theta}\right)+\frac{b^{۲}V\left(\hat{\theta}\right)^{۲}}{\left(V\left(\hat{\theta}\right)+b^{۲}\right)^{۲}} \\
&= \left(\frac{b^{۲}\left(V\left(\hat{\theta}\right)+b^{۲}\right)}{\left(V\left(\hat{\theta}\right)+b^{۲}\right)^{۲}}\right)V\left(\hat{\theta}\right)=\left(\frac{b^{۲}}{V\left(\hat{\theta}\right)+b^{۲}}\right)V\left(\hat{\theta}\right)
\end{aligned}
$$

با توجه به $\frac{b^2}{V(\hat{\theta})+b^2} < 1$ ملاحظه می‌شود که

$$MSE(\hat{\theta}_{Sh}) \leq V(\hat{\theta}) = MSE(\hat{\theta})$$

انتخاب یک نقطهٔ انقباضی، زمانی بهینه است که مقدار واقعی θ در همسایگی آن قرار داشته باشد، اما اگر نقطهٔ انقباضی به درستی انتخاب نگردد، برآوردگر انقباضی نقطه‌ای نسبت به برآوردگر کلاسیک مزیتی ندارد. اما با استفاده از اطلاعات بازه‌ای $\theta \in (\theta_0, \theta_1)$ روش طراحی شده برای تلفیق چنین اطلاعاتی، روش انقباضی بازه‌ای است که تامسون [۲۸] معرفی کرد و میانگین برآوردگرهای انقباضی نقطه‌ای با وزن‌های برابر برای تمام نقاط هدف به شکل $\tilde{\theta} \in (\theta_0, \theta_1)$ در بازهٔ حدسی است. بر این اساس، برآوردگر انقباضی بازه‌ای به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.
جواب تحلیلی صریح برای $\breve{\theta}(\theta)$،میانگین و واریانس آن به ترتیب برابرند با:

$$\breve{\theta}(\theta) = \hat{\theta} + V(\hat{\theta})^{1/2} \frac{\theta - \hat{\theta}}{\theta_1 - \theta_o}\left[arctan\frac{\theta_1 - \theta}{V(\hat{\theta})^{1/2}} - arctan\frac{\theta_o - \theta}{V(\hat{\theta})^{1/2}}\right] + \frac{V(\hat{\theta})}{2(\theta_1 - \theta_o)} ln\frac{V(\hat{\theta}) + (\theta_1 - \theta)^2}{V(\hat{\theta}) + (\theta_o - \theta)^2} \qquad (11)$$

$$E(\breve{\theta}(\theta)) = \theta + \frac{V(\hat{\theta})}{2(\theta_1 - \theta_o)} ln\frac{V(\hat{\theta}) + (\theta_1 - \theta)^2}{V(\hat{\theta}) + (\theta_o - \theta)^2}$$

$$V(\breve{\theta}(\theta)) = V(\hat{\theta})\left(1 - \frac{V(\hat{\theta})}{2(\theta_1 - \theta_o)}\left[arctan\frac{\theta_1 - \theta}{V(\hat{\theta})^{1/2}} - arctan\frac{\theta_o - \theta}{V(\hat{\theta})^{1/2}}\right]\right)^2$$

با استفاده از روش اخیر، گولوسونی و لیزنفلد [۱۰]، در حالتی که واریانس برآوردگر کلاسیک $V(\hat{\theta})$ معلوم و مستقل از θ باشد، با جای‌گذاری برآوردگر کلاسیک نااریب $\hat{\theta}$ به جای θدر رابطهٔ (۱۱)، برآورد انقباضی قابل قبول را به صورت زیر ارائه دادند:

$$\tilde{\theta}_{Sh} = \hat{\theta} + \frac{V(\hat{\theta})}{2(\theta_1 - \theta_o)} \ln\frac{V(\hat{\theta}) + (\theta_1 - \hat{\theta})^2}{V(\hat{\theta}) + (\theta_o - \hat{\theta})^2} \qquad (12)$$

با توجه به شکل برآوردگر، به‌دست آوردن توزیع $\tilde{\theta}_{Sh}$ و به دنبال آن گشتاورهای آن دشوار است، برای رفع آن در حالت خاص مقادیر $\theta_m = (\theta_1 + \theta_o)/2$ و $\theta_d = (\theta_1 - \theta_o)/2$ را در نظر گرفت و با بسط تیلور، رابطه (۱۲) را می توان به‌صورت زیر نوشت (برای اطلاع بیشتر به [۱۰] مراجعه کنید):

$$\tilde{\tilde{\theta}}_{Sh} = \hat{\theta}\left[1 - \frac{V(\hat{\theta})}{V(\hat{\theta}) + \theta_d^2}\right] + \theta_m \frac{V(\hat{\theta})}{V(\hat{\theta}) + \theta_d^2} \qquad (13)$$

با توجه به رابطهٔ (۱۲) میانگین مربعات خطای $\tilde{\tilde{\theta}}_{Sh}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$MSE\left(\tilde{\tilde{\theta}}_{Sh}\right) = E\left(\tilde{\tilde{\theta}}_{Sh} - \theta\right)^2 = E\left(\hat{\theta} - \hat{\theta}\frac{V(\hat{\theta})}{V(\hat{\theta}) + \theta_d^2} + \theta_m \frac{V(\hat{\theta})}{V(\hat{\theta}) + \theta_d^2} - \theta\right)^2$$

با فرض $A = \dfrac{V(\hat{\theta})}{V(\hat{\theta}) + \theta_d^2}$ به طوری که $0 < A < 1$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} MSE\left(\tilde{\tilde{\theta}}_{Sh}\right) &= E\left(\left(\hat{\theta} - \theta\right) - A\hat{\theta} + A\theta_m\right)^2 \\ &= E\left(\left(\hat{\theta} - \theta\right) - A\left(\hat{\theta} - \theta\right) + A\left(\theta - \theta_m\right)\right)^2 \\ &= E\left(\left(1 - A\right)\left(\hat{\theta} - \theta\right) + A\left(\theta - \theta_m\right)\right)^2 \\ &= \left(1 - A\right)^2 MSE\left(\hat{\theta}\right) + A^2\left(\theta - \theta_m\right)^2 \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن θ در بازه $(\theta_\circ, \theta_1)$ و در حالت خاص $\theta_m = \theta = \dfrac{\theta_\circ + \theta_1}{2}$ رابطه اخیر برابر است با:

$$MSE\left(\tilde{\tilde{\theta}}_{Sh}\right) = \left(1 - A\right)^2 MSE\left(\hat{\theta}\right)$$

با توجه به مقدار A، ملاحظه می‌شود که:

$$MSE\left(\tilde{\tilde{\theta}}_{Sh}\right) \le MSE\left(\hat{\theta}\right)$$

برآورد گشتاوری

با توجه به رابطهٔ (۵)، گشتاور مرتبهٔ rام برابراست با:

$$E\left(X^r\right) = \frac{\left(\theta + (r+1)\alpha\right)r!}{(\alpha + \theta)\theta^r} \qquad (14)$$

و برای $r = 1, 2$ می‌توان نوشت:

$$E(X)=\frac{\theta+2\alpha}{\theta(\theta+\alpha)} \qquad (15)$$

$$E(X^2)=\frac{2(\theta+3\alpha)}{\theta^2(\theta+\alpha)}$$

برای برآورد پارامترهای توزیع با استفاده از روش گشتاوری، اگر m'_1 و m'_2 به ترتیب گشتاورهای مرتبهٔ اول و دوم نمونه باشند، برای برآورد پارامترهای α و θداریم:

$$m'_1=\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{\theta+2\alpha}{\theta(\theta+\alpha)} \qquad (16)$$

$$m'_2=\overline{X^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=\frac{2(\theta+3\alpha)}{\theta^2(\theta+\alpha)} \qquad (17)$$

برای برآورد پارامتر α با توجه به رابطهٔ (۱۶) می‌توان نوشت:

$$\bar{X}=\frac{\theta+2\alpha}{\theta(\theta+\alpha)}$$

و یا

$$\bar{X}\theta=\frac{\theta+\alpha}{\theta+\alpha}+\frac{\alpha}{\theta+\alpha}$$

و

$$\frac{\alpha}{\theta}=\frac{\theta\bar{X}-1}{2-\theta\bar{X}}$$

با توجه به روابط بالا نتیجه می‌شود که برآوردگر α برابر است با:

$$\hat{\alpha}=\frac{\hat{\theta}\left(\hat{\theta}\bar{X}-1\right)}{2-\hat{\theta}\bar{X}} \qquad (18)$$

برای برآورد پارامتر θ با توجه به برآورد پارامتر α و در نظر گرفتن گشتاورهای m' و m'_2 به صورت

$$m'_1=\frac{\hat{\theta}+2\hat{\alpha}}{\hat{\theta}\left(\hat{\theta}+\hat{\alpha}\right)} \quad , \quad m'_2=\frac{2\left(\hat{\theta}+3\hat{\alpha}\right)}{\hat{\theta}^2\left(\hat{\theta}+\hat{\alpha}\right)}$$

می‌توان نوشت:

$$\frac{m'_2}{m'_1}=\frac{2\left(\hat{\theta}+3\hat{\alpha}\right)}{\hat{\theta}\left(\hat{\theta}+2\hat{\alpha}\right)}$$

و یا

$$\frac{m_2'\hat{\theta}}{2m_1'}=\frac{\hat{\theta}+3\hat{\alpha}}{\hat{\theta}+2\hat{\alpha}}=1+\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\theta}+2\hat{\alpha}}$$

و یا

$$\frac{m_2'\hat{\theta}}{2m_1'}-1=\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\theta}+2\hat{\alpha}}$$

و یا

$$\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\theta}}=\frac{m_2'\hat{\theta}-2m_1'}{2m_1'-2\hat{\theta}m_2'+4m_1'}$$

اما $\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\theta}}=\frac{\bar{X}\hat{\theta}-1}{2-\bar{X}\hat{\theta}}$ بنابراین

$$\frac{\bar{X}\hat{\theta}-1}{2-\bar{X}\hat{\theta}}=\frac{m_2'\hat{\theta}-2m_1'}{2m_1'-2m_2'\hat{\theta}+4m_1'}$$

از رابطهٔ اخیر، می‌توان معادلهٔ درجه دوم را به صورت زیر نوشت:

$$\hat{\theta}^2-4\,\frac{m_1'}{m_2'}\hat{\theta}+2\frac{m_1'}{m_2'\bar{X}}=0$$

اگر $\left(\frac{2m_1'}{m_2'}\right)^2-\frac{2m_1'}{m_2'\bar{X}}$ مثبت باشد. ریشهٔ معادل اخیر برابر با:

$$\hat{\theta}=\frac{2m_1'}{m_2'}+\sqrt{\left(\frac{2m_1'}{m_2'}\right)^2-\frac{2m_1'}{m_2'\bar{X}}} \qquad (19)$$

در ادامه، نشان داده می‌شود که برآوردگرهای α و θ به طور مجانبی نا اریب هستند.

قضیه: اگر روابط (۱۸) و (۱۹) برآوردگر گشتاوری برای α و θ باشند، آنگاه به طور مجانبی نااریب هستند.

اثبات: فرض کنید $W_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ و $W_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ در این صورت با توجه به برابری گشتاوری نمونه و جامعه می‌توان رابطهٔ (۱۹) را به صورت زیر نوشت:

$$\hat{\theta}=f\left(W_1.W_2\right)=\frac{2W_1}{W_2}+\sqrt{\left(\frac{2W_1}{W_2}\right)^2-\frac{2W_1}{W_2W_1}}$$
$$=\frac{2W_1}{W_2}+\sqrt{\left(\frac{2W_1}{W_2}\right)^2-\frac{2}{W_2}}$$

با در نظر گرفتن بسط سری تیلور، $\hat{\theta}$ را حول W_1 و W_2 به صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$\hat{\theta} = f(\mu.\nu) + (W_1 - \mu)\frac{\partial f}{\partial W_1}\bigg|_{W_1=\mu\ .W_2=\nu} + (W_2 - \nu)\frac{\partial f}{\partial W_2}\bigg|_{W_1=\mu\ .W_2=\nu} + \ldots$$

به طوری که

$$\mu = E(W_1) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{\theta + 2\alpha}{\theta(\theta+\alpha)}$$

$$\nu = E(W_2) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \frac{2(\theta + 3\alpha)}{\theta^2(\theta+\alpha)}$$

$$E(\hat{\theta}) = f(\mu.\nu) = \frac{2\mu}{\nu} + \sqrt{\left(\frac{2\mu}{\nu}\right)^2 + \frac{2}{\nu}} = \frac{2\mu}{\nu} + \sqrt{\Delta}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left(\frac{2\mu}{\nu}\right)^2 + \frac{2}{\nu} \\
&= \left(\frac{\theta(\theta+2\alpha)}{\theta(\theta+\alpha)}\frac{\theta^2(\theta+\alpha)}{2(\theta+3\alpha)}\right)^2 - \frac{2\theta^2(\theta+\alpha)}{2(\theta+3\alpha)} \\
&= \left(\frac{\theta(\theta+2\alpha)}{(\theta+3\alpha)}\right)^2 - \frac{\theta^2(\theta+\alpha)}{(\theta+3\alpha)} \\
&= \frac{\theta^2}{(\theta+3\alpha)^2}\left((\theta+2\alpha)^2 - (\theta+\alpha)(\theta+3\alpha)\right) \\
&= \frac{\theta^2\alpha^2}{(\theta+3\alpha)^2}
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
E(\hat{\theta}) &\simeq \frac{\theta(\theta+2\alpha)}{(\theta+3\alpha)} + \frac{\alpha\theta}{(\theta+3\alpha)} \\
&= \frac{\theta(\theta+3\alpha)}{(\theta+3\alpha)} = \theta
\end{aligned}$$

با توجه به رابطهٔ (۱۸)، می‌توان نشان داد که

$$E(\hat{\alpha}) = \alpha$$

برآوردگر انقباضی و انقباضی-فاصله‌ای برای توزیع لیندلی دو پارامتری

با توجه به روابط (۱۰) و (۱۹) برآورد انقباضی برابر است با:

$$\hat{\theta}_{Sh} \simeq \theta_g + \left(\frac{\left(\theta-\theta_g\right)^2}{V\left(\hat{\theta}\right)+\left(\theta-\theta_g\right)^2}\right)\left(\hat{\theta}_{mm}-\theta_g\right) \qquad (20)$$

که در آن $\hat{\theta}_{mm}$ برآورد گشتاوری به دست آمده در (۱۹) است.

برای به دست آوردن برآورد انقباضی- بازه‌ای، بازه $\theta \in \left(\theta_0, \theta_1\right)$ در نظر گرفته می شود. از رابطۀ (۱۲) داریم:

$$\tilde{\tilde{\theta}}_{Sh} \simeq \hat{\theta}_{mm}\left(1-\frac{V\left(\hat{\theta}_{mm}\right)}{V\left(\hat{\theta}_{mm}\right)+\theta_d^2}\right)+\theta_m\frac{V\left(\hat{\theta}_{mm}\right)}{V\left(\hat{\theta}_{mm}\right)+\theta_d^2} \qquad (21)$$

تنش-مقاومت

فرض کنیم X و Y پارامتریای تصادفی با توزیع لیندلی دو پارامتری به‌ترتیب با پارامترهای $\left(\theta_1,\, \alpha_1\right)$ و $\left(\theta_2,\, \alpha_2\right)$ و دارای توابع چگالی زیر باشند:

$$f\left(x;\theta_1,\, \alpha_1\right)=\frac{\theta_1^2}{\alpha_1+\theta_1}\left(1+\alpha_1 x\right)e^{-\theta_1 x} \quad ; x>0,\ \alpha_1>-\theta_1,\ \theta_1>0$$

$$f\left(y;\theta_2,\, \alpha_2\right)=\frac{\theta_2^2}{\alpha_2+\theta_2}\left(1+\alpha_2 y\right)e^{-\theta_2 y} \quad ; y>0,\ \alpha_2>-\theta_2,\ \theta_2>0$$

پارامتر تنش مقاومت R به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}R=P\left(Y<X\right)&=\int_0^\infty\int_0^x f_y\left(x\right)dy\ \ f_x dx\\&=\int_0^\infty\left(\int_0^x\frac{\theta_2^2}{\alpha_2+\theta_2}\left(1+\alpha_2 y\right)e^{-\theta_2 y}dy\right)\left(\frac{\theta_1^2}{\alpha_1+\theta_1}\left(1+\alpha_1 x\right)e^{-\theta_1 x}\right)dx\\&=B_1B_2\int_0^\infty\left(\int_0^x\left(1+\alpha_2 y\right)e^{-\theta_2 y}dy\right)\left(\left(1+\alpha_1 x\right)e^{-\theta_1 x}\right)dx\end{aligned}$$

به طوری که $B_i=\dfrac{\theta_i^2}{\alpha_i+\theta_i}\ ,\ \ i=1,2$

$$\begin{aligned}R&=B_1B_2\int_0^\infty\left(\frac{1}{\theta_2}+\frac{\alpha_2}{\theta_2^2}-\frac{1}{B_2}e^{-\theta_2 x}-\frac{\alpha_2}{\theta_2}xe^{-\theta_2 x}\right)\left(\left(1+\alpha_1 x\right)e^{-\theta_1 x}\right)dx\\&=B_1B_2\int_0^\infty\left(\frac{1}{B_2}-\frac{1}{B_2}e^{-\theta_2 x}-\frac{\alpha_2}{\theta_2}xe^{-\theta_2 x}\right)e^{-\theta_1 x}\ dx+\alpha_1B_1B_2\int_0^\infty\left(\frac{1}{B_2}-\frac{1}{B_2}e^{-\theta_2 x}-\frac{\alpha_2}{\theta_2}xe^{-\theta_2 x}\right)xe^{-\theta_1 x}\ dx\\&=B_1B_2\left(\frac{1}{B_2\theta_1}-\frac{1}{B_2\left(\theta_1+\theta_2\right)}-\frac{\alpha_2}{\theta_2}\frac{1}{\left(\theta_1+\theta_2\right)^2}\right)+\alpha_1B_1B_2\left(\frac{1}{B_2\theta_1^2}-\frac{1}{B_2\left(\theta_1+\theta_2\right)^2}-\frac{\alpha_2}{\theta_2}\frac{2}{\left(\theta_1+\theta_2\right)^3}\right)\\&=B_1B_2\left(\frac{1}{B_2\theta_1}+\frac{\alpha_1}{B_2\theta_1^2}\right)-B_1B_2\left(\frac{1}{B_2\left(\theta_1+\theta_2\right)}+\frac{\alpha_1}{B_2\left(\theta_1+\theta_2\right)^2}\right)-\frac{\alpha_1\alpha_2B_1B_2}{\theta_2\left(\theta_1+\theta_2\right)^2}\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{2}{\left(\theta_1+\theta_2\right)}\right)\end{aligned}$$

$$=B_1\left(\frac{\theta_1+\alpha_1}{\theta_1^2}\right)-B_1\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\alpha_1}{(\theta_1+\theta_2)^2}\right)-\frac{\alpha_1\alpha_2B_1B_2}{\theta_2(\theta_1+\theta_2)^2}\left(\frac{\theta_1+\theta_2+2\alpha_1}{\alpha_1(\theta_1+\theta_2)}\right)$$

$$=B_1\left(\frac{1}{B_1}\right)-B_1\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\alpha_1}{(\theta_1+\theta_2)^2}\right)-\frac{\alpha_2B_1B_2}{\theta_2(\theta_1+\theta_2)^2}\left(\frac{\theta_1+\theta_2+2\alpha_1}{(\theta_1+\theta_2)}\right) \quad (22)$$

$$=1-\frac{B_1}{(\theta_1+\theta_2)^2}(\theta_1+\theta_2+\alpha_1)-\frac{\alpha_2B_1B_2}{\theta_2(\theta_1+\theta_2)^2}\left(\frac{\theta_1+\theta_2+2\alpha_1}{(\theta_1+\theta_2)}\right)$$

با توجه به برآوردگرهای $\hat{\theta}$، $\hat{\theta}_{Sh}$و $\tilde{\tilde{\theta}}_{Sh}$ مقادیر برآوردگر R به ترتیب برابرند با $\hat{R}$، $\hat{R}_{Sh}$ و $\tilde{\tilde{R}}_{Sh}$، به طوری که:

$$\hat{R}=1-\frac{\hat{B}_1(\hat{\theta},\hat{\alpha})}{(\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2)^2}(\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2+\hat{\alpha}_1)-\frac{\hat{\alpha}_2\hat{B}_1(\hat{\theta},\hat{\alpha})\hat{B}_2(\hat{\theta},\hat{\alpha})}{\hat{\theta}_2(\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2)^2}\left(\frac{\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2+2\hat{\alpha}_1}{(\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2)}\right)$$

$$\begin{aligned}\hat{R}_{Sh}=1&-\frac{\hat{B}_{Sh_1}(\hat{\theta}_{Sh},\,\hat{\alpha}_{Sh})}{(\hat{\theta}_{Sh_1}+\hat{\theta}_{Sh_2})^2}(\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_{Sh_2}+\hat{\alpha}_{1\,Sh})\\&-\frac{\hat{\alpha}_{2\,Sh}\,B_{Sh_1}(\hat{\theta}_{Sh},\,\hat{\alpha}_{Sh})\hat{B}_{Sh_2}(\hat{\theta}_{Sh},\,\hat{\alpha}_{Sh})}{\hat{\theta}_{Sh_2}(\hat{\theta}_{Sh_1}+\hat{\theta}_{Sh_2})^2}\left(\frac{\theta_1(\hat{\theta}_{Sh_1}+\hat{\theta}_{Sh_2}+2\hat{\alpha}_{1\,Sh})}{(\hat{\theta}_{Sh_1}+\hat{\theta}_{Sh_2})}\right)\end{aligned}$$

$$\tilde{\tilde{R}}_{Sh}=1-\frac{\tilde{\tilde{B}}_{Sh_1}(\tilde{\tilde{\theta}},\tilde{\tilde{\alpha}})}{(\tilde{\tilde{\theta}}_1+\tilde{\tilde{\theta}}_2)^2}(\tilde{\tilde{\theta}}_1+\tilde{\tilde{\theta}}_2+\tilde{\tilde{\alpha}}_1)-\frac{\tilde{\tilde{\alpha}}_2\tilde{\tilde{B}}_{Sh_2}(\tilde{\tilde{\theta}},\tilde{\tilde{\alpha}})\tilde{\tilde{B}}_{Sh_2}(\tilde{\tilde{\theta}},\tilde{\tilde{\alpha}})}{\tilde{\tilde{\theta}}_2(\tilde{\tilde{\theta}}_1+\tilde{\tilde{\theta}}_2)^2}\left(\frac{\tilde{\tilde{\theta}}_1+\tilde{\tilde{\theta}}_2+2\tilde{\tilde{\alpha}}_1}{(\tilde{\tilde{\theta}}_1+\tilde{\tilde{\theta}}_2)}\right)$$

شبیه‌سازی

با به کارگیری نرم‌افزار R، دو نمونه از توزیع‌های لیندلی دو پارامتری به ترتیب با پارامترهای θ_1، مقدار حدسی θ_{1g}، اطلاعات بازه‌ای $(\theta_{1o},\theta_{11})$، θ_2، مقدار حدسی θ_{2g}، اطلاعات بازه‌ای $(\theta_{20},\theta_{21})$و α_1 و α_2 معلوم، با تعداد تکرار ۱۰۰۰ تولید شده‌اند. سپس مقدار تنش مقاومت براساس برآوردگشتاوری، برآورد انقباضی و برآورد انقباضی- بازه‌ای به ترتیب $\hat{R}$، $\hat{R}_{Sh}$و $\tilde{\tilde{R}}_{Sh}$ در جداول ۱ تا ۴ محاسبه و آورده شده‌اند. همان طورکه مشاهده می‌شود با افزایش حجم نمونه مقدار میانگین مربعات خطا برای همه برآوردگرها کاهش می‌یابد و همواره مقدار میانگین مربعات خطای برآوردگر انقباضی- بازه‌ای در مقایسه با مقدار میانگین مربعات خطای برآوردگر گشتاوری و انقباضی کمتر است.

جدول شمارهٔ ۱

$\theta_۱ = ۱ , \theta_{۱g} = ۰/۷ \ , \theta_۱ \in (۰/۵ , ۱/۲) \ , \ \theta_۲ = ۲ \ , \ \theta_{۲g} = ۱/۶ \ , \theta_۲ \in (۱/۶ , ۲/۲) , \alpha_۱ = \alpha_۱ = ۳ \ , R = ۰/۷۳۳۳$

n	m	$\hat{R}$	$MSE(\hat{R})$	$\hat{R}_{Sh}$	$MSE(\hat{R}_{Sh})$	$\tilde{\tilde{R}}_{Sh}$	$MSE(\tilde{\tilde{R}}_{Sh})$
۳۰	۱۵	۰,۷۳۲۷۰۳	۰,۰۹۳۳۴۰۹۶	۰,۷۸۸۶۲۶۲	۰,۰۰۲۹۱۶۷۷۲	۰,۷۶۵۵۲۷۱	۰,۰۰۱۰۳۳۱۸۵
۳۰	۲۵	۰,۷۵۲۱۴۸۷	۰,۰۷۷۱۴۲۹۲	۰,۷۸۸۵۴۹۹	۰,۰۰۲۸۴۳۳۴۷	۰,۷۶۵۴۸۶	۰,۰۰۱۰۸۱۷۹
۴۰	۱۵	۰,۸۶۶۲۴۱۴	۰,۰۷۶۱۵۴۱۷	۰,۷۸۶۷۸۵۸	۰,۰۰۲۶۲۹۱۵۴	۰,۷۶۵۴۸۱	۰,۰۰۱۰۵۷۸۹۷
۴۰	۲۰	۰,۷۸۱۲۷۰۲	۰,۰۷۵۸۰۶۹۱	۰,۷۸۸۵۰۴۱	۰,۰۰۲۶۵۰۷۶۷	۰,۷۶۵۵۴۳۱	۰,۰۰۱۰۵۰۵۶۴
۴۰	۲۵	۰,۷۷۹۷۸۸۴	۰,۰۷۰۲۷۴۱۲	۰,۷۸۸۴۹۲۳	۰,۰۰۲۵۳۱۹۲۱	۰,۷۶۵۵۵۴۴	۰,۰۰۱۰۱۰۰۴۱
۵۰	۱۵	۰,۸۹۹۲۷۴۷	۰,۰۶۹۱۶۹۱۳	۰,۷۷۲۴۷۷۶	۰,۰۰۱۳۴۴۳۶۵	۰,۷۶۵۳۶۴۷	۰,۰۰۱۰۰۷۵۵۶
۵۰	۲۰	۰,۶۰۱۷۴۷۶	۰,۰۶۸۹۶۲۸۴	۰,۷۷۵۱۰۸۹	۰,۰۰۱۲۴۱۸۷	۰,۷۶۵۷۳۰۱	۰,۰۰۰۹۹۲۳۹۵

جدول شمارهٔ ۲

$\theta_۱ = ۱ \ , \theta_{۱g} = ۰/۷ \ , \ \theta_۱ \in (۰/۵ , ۱/۲) \ , \ \theta_۲ = ۲ \ , \theta_{۲g} = ۱/۶ \ , \ \theta_۲ \in (۱/۶ , ۲/۲) , \alpha_۱ = \alpha_۱ = ۲ \ , R = ۰/۷۲۸۳۹۵۱$

n	m	$\hat{R}$	$MSE(\hat{R})$	$\hat{R}_{Sh}$	$MSE(\hat{R}_{Sh})$	$\tilde{\tilde{R}}_{Sh}$	$MSE(\tilde{\tilde{R}}_{Sh})$
۳۰	۱۵	۰,۷۳۲۷۰۳	۰,۰۹۳۳۴۰۹۶	۰,۷۸۸۶۲۶۲	۰,۰۰۲۸۱۶۷۷۲	۰,۷۶۵۵۲۷۱	۰,۰۰۱۰۳۳۱۸۵
۳۰	۲۵	۰,۷۳۸۳۳۸۹	۰,۰۷۸۶۴۴۲۷	۰,۷۸۴۵۵۹۱	۰,۰۰۲۹۱۹۷۹۸	۰,۷۶۰۷۴۱۸	۰,۰۰۱۰۳۱۷۱۳
۴۰	۱۵	۰,۷۴۰۲۱۰۹	۰,۷۸۴۲۰۱۹	۰,۷۸۴۲۰۱۹	۰,۰۰۲۸۳۸۱۵۱	۰,۷۶۰۶۳۰۳	۰,۰۰۰۹۷۴۶۶۰۹
۴۰	۲۰	۰,۷۵۸۷۲۲۱	۰,۰۷۷۷۱۳۵۹	۰,۷۸۴۲۱۶۵	۰,۰۰۲۷۵۵۴۷	۰,۷۶۰۶۵۱۷	۰,۰۰۰۹۶۹۸۰۲
۴۰	۲۵	۰,۸۰۲۳۷۲۳	۰,۰۷۰۷۴۹۸	۰,۷۸۳۷۱۹۷	۰,۰۰۲۵۱۱۶۶	۰,۷۶۰۶۷۳۵	۰,۰۰۰۹۴۳۹۳۲۱
۵۰	۱۵	۰,۸۴۱۶۸۳۶	۰,۰۶۳۰۶۶۳۷	۰,۷۸۴۰۳۴۵	۰,۰۰۲۴۳۳۹۲	۰,۷۶۰۵۶۰۳	۰,۰۰۱۲۱۴۴۹۵
۵۰	۲۰	۰,۸۵۳۹۲۹۵	۰,۰۶۲۷۴۹۵۲	۰,۷۸۳۴۹۳۹	۰,۰۰۲۳۶۳۶۱	۰,۷۶۰۵۸۵۹	۰,۰۰۱۰۵۲۰۲۱

جدول شمارهٔ ۳

$\theta_۱ = ۲ \ , \theta_{۱g} = ۱/۵ \ , \ \theta_۱ \in (۱/۷ , ۲/۳) \ , \theta_۲ = ۴ \ , \theta_{۲g} = ۳/۶ \ , \theta_۲ \in (۳/۸ , ۴/۲) , \alpha_۱ = \alpha_۱ = ۳ , R = ۰/۷۲۳۸۰۹۵$

n	m	$\hat{R}$	$MSE(\hat{R})$	$\hat{R}_{Sh}$	$MSE(\hat{R}_{Sh})$	$\tilde{\tilde{R}}_{Sh}$	$MSE(\tilde{\tilde{R}}_{Sh})$
۳۰	۱۵	۰,۶۷۵۴۳۴۶	۰,۰۹۷۰۰۶۹	۰,۷۷۶۲۱۶۲	۰,۰۰۴۱۳۷۷	۰,۷۲۳۸۲۴۱	۰,۰۰۰۱۴۵۳۷۹۴
۳۰	۲۵	۰,۷۶۰۲۷۵۵	۰,۰۷۹۶۱۹۹۸	۰,۷۷۵۶۸	۰,۰۰۳۰۱۱۴۵۳	۰,۷۲۳۸۳۴۱	۰,۰۰۰۰۴۰۰۵۲۵
۴۰	۱۵	۰,۷۱۲۲۲۰۵	۰,۰۷۹۱۴۷۲۵	۰,۷۷۵۸۳۱۱	۰,۰۰۳۰۰۷۶۴	۰,۷۲۳۸۰۰۷	۰,۰۰۰۰۱۹۳۷۳۰
۴۰	۲۰	۰,۵۹۲۱۶۰۱	۰,۰۷۷۹۱۰۳	۰,۷۷۵۹۳۲۷	۰,۰۰۲۶۰۴۶۰۵	۰,۷۲۳۸۱۴	۰,۰۰۰۰۰۶۲۳۰۶
۴۰	۲۵	۰,۸۵۳۵۹۱۶	۰,۰۷۲۲۳۳۰۸	۰,۷۷۴۹۵۲۵	۰,۰۰۲۵۴۵۰۴۳	۰,۷۲۳۸۰۱۱	۰,۰۰۰۰۰۴۸۷۴۰
۵۰	۱۵	۰,۵۳۲۲۷۳۳	۰,۰۷۱۹۳۹۱۶	۰,۷۷۶۲۴۱۴	۰,۰۰۲۴۷۲۳۶۶	۰,۷۲۳۸۲۶۲	۰,۰۰۰۰۴۴۶۴۲۵
۵۰	۲۰	۰,۷۲۷۶۸۱	۰,۰۷۰۲۰۰۴۳	۰,۷۷۵۹۵۰۳	۰,۰۰۲۴۶۴۱۲۰	۰,۷۲۳۸۱۵۲	۰,۰۰۰۰۲۶۹۵۶

جدول شمارهٔ ۴

$\theta_۱ = ۲ \ , \ \theta_{۱g} = ۱/۵ \ , \theta_۱ \in (۱/۷ , ۲/۳) \ , \ \theta_۲ = ۴ \ , \theta_{۲g} = ۳/۶ \ , \theta_۲ \in (۳/۸ , ۴/۲) , \alpha_۱ = \alpha_۱ = ۲ \ , R = ۰/۷۱۶۰۴۹۴$

n	m	$\hat{R}$	$MSE(\hat{R})$	$\hat{R}_{Sh}$	$MSE(\hat{R}_{Sh})$	$\tilde{\tilde{R}}_{Sh}$	$MSE(\tilde{\tilde{R}}_{Sh})$
۳۰	۱۵	۰,۶۹۴۵۰۷۱	۰,۰۹۲۶۸۲۸۳	۰,۷۶۷۸۶۲۷	۰,۰۰۶۵۴۹۴۴	۰,۷۱۶۰۴۹۷	۰,۰۰۰۰۲۶۶
۳۰	۲۵	۰,۶۰۴۴۸۹۷	۰,۰۷۷۷۰۹۱۴	۰,۷۶۸۰۴۶۵	۰,۰۰۴۳۵۶۷۶۸	۰,۷۱۶۰۵۹۹	۰,۰۰۰۰۰۶۳
۴۰	۱۵	۰,۷۴۰۱۴۳۵	۰,۰۸۹۶۷۲۲۶	۰,۷۶۷۸۷۳۳	۰,۰۰۳۴۵۷۷۹۶	۰,۷۱۶۰۵۱۵	۰,۰۰۰۰۲۸۶
۴۰	۲۰	۰,۷۲۸۹۵۱۳	۰,۰۷۹۲۹۴۴۲	۰,۷۶۸۰۸۱۳	۰,۰۰۳۳۱۷۵۱۱	۰,۷۱۶۰۶۳۳	۰,۰۰۰۰۲۶۸
۴۰	۲۵	۰,۸۲۱۵۶۷۷	۰,۰۷۱۹۶۰۱۵	۰,۷۶۷۵۷۹۴	۰,۰۰۲۵۶۳۶۹۸	۰,۷۱۶۰۴۱۳	۰,۰۰۰۰۰۲۵
۵۰	۱۵	۰,۸۶۶۹۵۱۹	۰,۰۸۶۸۹۷۳۶	۰,۷۶۶۸۵۶۶	۰,۰۰۲۸۶۵۸۰۲	۰,۷۱۶۰۳۷۱	۰,۰۰۰۳۳۷۳
۵۰	۲۰	۰,۷۶۴۵۴۷۳	۰,۰۷۳۶۸۰۵۵	۰,۷۶۷۷۴۹۴	۰,۰۰۴۱۳۵۸۴۷	۰,۷۱۶۰۵۹۷	۰,۰۰۰۱۲۰۹

مثال کاربردی

در این بخش برای مجموعه داده‌هایی که توسط بارد و پریست[۵] ارائه شده کارائی برآورد انقباضی بازه‌ای در مقایسه برآورد گشتاوری مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مجموعهٔ دادهٔ اول ($n=۶۹$)

1.312	1.314	1.479	1.552	1.700	1.803	1.861	1.865	1.944	1.958
1.966	1.997	2.006	2.021	2.027	2.055	2.063	2.098	2.140	2.179
2.224	2.240	2.253	2.270	2.272	2.274	2.301	2.301	2.359	2.382
2.382	2.426	2.434	2.435	2.478	2.490	2.511	2.514	2.535	2.554
2.566	2.570	2.586	2.629	2.633	2.642	2.648	2.684	2.697	2.726
2.770	2.773	2.800	2.809	2.818	2.821	2.848	2.880	2.954	3.012
3.067	3.084	3.090	3.096	3.128	3.233	3.433	3.585	3.585	

مجموعهٔ دادهٔ دوم ($n=۶۵$)

1.339	1.434	1.549	1.574	1.589	1.613	1.746	1.753	1.764	1.807
1.812	1.840	1.852	1.852	1.862	1.864	1.931	1.952	1.974	2.019
2.051	2.055	2.058	2.088	2.125	2.162	2.171	2.172	2.180	2.194
2.211	2.270	2.272	2.280	2.299	2.308	2.335	2.349	2.356	2.386
2.390	2.410	2.430	2.431	2.458	2.471	2.497	2.514	2.558	2.577
2.593	2.601	2.604	2.620	2.633	2.670	2.682	2.699	2.705	2.735
2.785	3.020	3.042	3.116	3.174					

جدول شمارهٔ ۵. برآورد پارامترهای توزیع لیندی دو پارامتری

روش	$\hat{\alpha}_{۱}$	$\hat{\theta}_{۱}$	$\hat{\alpha}_{۲}$	$\hat{\theta}_{۲}$	$\hat{R}$	$-۲\log l(\hat{\alpha}_{۱},\hat{\theta}_{۱})$	$-۲\log l(\hat{\alpha}_{۲},\hat{\theta}_{۲})$
گشتاوری	-۰,۰۶۹۹۸	۰,۲۴۰۹۹	۰,۳۴۲۵۸	۰,۲۶۲۸۹	۰,۲۷۵۹۱	۲۴۹,۶۱۱۶	۲۸۵,۱۰۸۳
انقباضی بازه‌ای	-۰,۰۶۳۳۷	۰,۲۹۷۵۵	-۰,۰۷۳۹۴	۰,۲۹۹۶۶	۰,۵۱۶۰۸	۲۳۶,۵۹۴۲	۲۳۰,۹۲۰۶

با توجه نتایج و مقادیر $-۲\log l$ در جدول ۵، برای بازه‌های $\theta_{۱}\in(۰/۱ , ۰/۵)$ و $\theta_{۲}\in(۰/۲ , ۰/۴)$، روش برآورد انقباضی بازه‌ای در مقایسه با روش گشتاوری بهتر عمل می‌کند.

References

1. Abouammoh, A. M., Alshangiti, A. M. and Raqab, I. E., “A new generalized Lindley distribution”, J. Commun. Statist. Simul. Comp., (2015) 1-17.
2. Al Mutairi, D. K., Ghitany M. E. and Kundu, D., Inference on stress-strength Reliability from Lindely distributions, Communications in Statistics: Theory and Methods,42 (2013) 1443-1463.
3. Amin, A.E., “Estimation of stress-strength reliability for Kumaraswamy exponential distribution based on upper record values”, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 12(2) (2017) 59-71.

4. Awad, A.M. and Gharraf, M.K., “Esrimation of P(Y<X) in the Burr case: A comparative study”, Commun. Statist. Simul. Comp., 15(2) (1986) 389-403.

5. Bader, M.G., Priest, A.M., Statistical aspects of fiber and bundle strength in hybrid Composites, in: Hayashi, T., Kawata, K., Umekawa, S. (Eds.) Progress in Science and Engineering Composites. ICCM-IV, Tokyo, 1129–1136, (1982).

6. Beg, M.A. and Singh, N, “Estimation of P(Y<X) for the pareto distribution”, IEEE Trans. Reliab., 28(5) (1979) 411-414.

7. Birnbaum, Z.W. (1956). On a use of Mann-Whitney statistic. Proceedings of the Third Berekley Symposium Math, Statistic Probability, 13-17.

8. Church, J.D. and Harris, B. (1970). The estimation of reliability from stress strength relationship, Technometrics, 12, 49-54.

9. Ghitany, M. E., Atieh, B., and Nadarajah, S. Lindley distribution and its application, Math. Comput.Simul. 78 (2008) 493-506.

10. Golosnoy, V. and Liesenfeld, R. Interval shrinkage estimators, J. Appl. Stat. 38 (2011) 465-477.

11. Kotz, S.,Lumelskii, Y., Pensky, M. “The Stress-Strength Model and its Generalizations: Theory and Applications”, World Scientific Press, Singapore., (2003).

12. Kundu, D. and Gupta R.D, “Estimation of P(X < Y) for generalized exponential distribution”, Metrika, 61(3) (2005) 291-308.

13. Kundu, D. and Gupta R.D., “Estimation of P(X < Y) for Weibull Distributions”, IEEE Trans. Reliab., 55(2) (2006) 270-280.

14. Lindely DV, Fiducial distributions and Bayes ‘theorem. J. Roy. Statist. Soc. B, 20 (1958) 102-107.

15. McCool, J.I., “Inference on P(Y < X) in the Weibull case”, Commun. Statist.Simul. Comp., 20(1) (1991) 129-148.

16. Nadarajah, S., Bakouch, H.S. and Tahmasbi, R., “A generalized Lindley distribution”, Sankhya B, 73 (2011) 331-359.

17. Nasiri, P. and Jabbari M., “Estimation of P[X<Y] for generalized exponential distribution in presence of outlier”, Mashhad R. J. Math. Sci., 2(1) (2010) 69-80.

18. Raqab M.Z. and Kundu, D.,”Comparison of different estimators of P(X<Y) for a scaled Burr type X distribution”, Commun. Statist. Simul. Comp., 34(20) (2005) 465-483.

19. Rezaei, A., Sharafi, M., Behboodian, J. and Zamani, A. Inferences on stress-strength parameter based on GLD5 distribution, J. Commun. Statist. Simul. Comp., 4 (2017).

20. Saracoglu, B., Kaya, M.F. and Abd-Elfattah, A.M., "Comparison of estimators for stress-strength reliability in Gompertz Case", Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 38(3) (2009) 339-349.

21. Saracoglu, B., Kaya, M.F. and Abd-Elfattah, A.M., "Maximum Likelihood estimation and confidence intervals of system reliability for Gompertz distribution in stress-strength models", Selcuk J. Appl. Math., 8 (2007) 25-36.

22. Saracoglu, B., Kinaci, I. and Kundu, D., "On estimation of R= P (Y< X) for exponential distribution under progressive type-II censoring", J. Stat. Comput. Simul, 82(5) (2011) 729-744.

23. Shanker. R, Kamlesh, KK. And Fesshaye, H., "A Two parameter Lindely distribution: Its properties and Applications", Biostatistics and Biometrics, 1(4) (2017).

24. Shanker. R, Kamlesh, KK. And Fesshaye, H., "A Two parameter Lindley distribution for modeling waiting and survival times data", Applied Mathematics, 4 (2013) 363-368.

25. Surles, J.G. and Padgett, W.J., "Inference for P(Y<X) in the Burr type-X model", J. Appl.Statist. Sci., 7(4) (1998) 225-238.

26. Surles, J.G. and Padgett, W.J., "Inference for reliability and stress-strength for a scaled Burr-type X distribution", Lifetime Data Analy., 7 (2001) 187-200.

27. Thompson, J. R., "Accuracy borrowing in the estimation of the mean byshrinkage to an interval", J. Amer. Statist. Assoc., 63 (1968) 953-963.

28. Tong, H. (1974). A note on estimation of P(Y<X) in the exponential case, Technometrics, 16, 625-625.

29. Woodward, W.A. and Kelley, G.D. (1977). Minimum variance unbiased estimation of P(Y<X) in the normal case, Technometrics, 19, 95-98.

30. Zakerzadeh, H. and Dolati, A., "Generalized Lindley distribution", J. Math. Extension, 3 (2009) 12-25.