خواصی از عملگرهای $b-$ ضعیف فشرده روی مشبکه‌های باناخ

کاظم حق‌نژاد آذر*، اکبر بهرام‌نژاد
دانشگاه محقق اردبیلی، دانشکدهٔ علوم، گروه ریاضیات و کاربردها

دریافت: ۹۷/۰۷/۲۲ پذیرش: ۹۷/۱۱/۲۸

چکیده

در این مقاله شرط لازم و کافی برای این‌که مشبکه باناخ E، KB- فضا باشد را ارائه و بعضی از خواص عملگرهای $b-$ ضعیف فشرده از مشبکه باناخ E به فضای باناخ X را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر عملگر فشردهٔ ضعیف ترتیبی از مشبکهٔ باناخ E به فضای باناخ X $b-$ ضعیف فشرده است و با آوردن یک مثال، عکس آن را نقض می‌کنیم. هم‌چنین ثابت می‌کنیم که تحت شرایطی عکس آن برقرار است.

واژه‌های کلیدی: مشبکهٔ باناخ، KB- فضا، عملگر $b-$ ضعیف فشرده.

رده‌بندی ریاضی: ۴۶A۴۰و۴۶B۴۲

مقدمه

آلپای[1] و همکارانش در [۲] ردهٔ جدیدی از عملگرها را به نام عملگرهای b- ضـعیف فشـرده[2] مطرح کردند. آنها در این مقاله نشان دادند که عملگرهای b- ضعیف فشرده، متمایز از عملگرهای شناخته شده دیگر هستند. بعداً آلپای و ارکان[3] در [۳] و آلتین[4] در[۴] دربارهٔ خواص عملگرهای b- ضـعیف فشـرده تحقیقاتی انجام دادند و رابطهٔ عملگرهای b- ضعیف فشرده را با رده های دیگری از عملگرهای شناخته شده مانند عملگرهای ضعیف فشرده و نیم‌-فشرده[5] و غیره بررسی کردند. اکزوز[6] و همکارانش در [۵] نشان دادند که دوگان یک عملگر b-ضعیف فشرده در حالت کلی یک عملگر b-ضعیف فشرده نیست ولی تحت شرایطی لازم و کافی امکان‌پذیر است.

در این مقاله روی خواص عملگرهای ضعیف فشرده و b- ضعیف فشرده بررسی و تحقیق می‌کنیم. نشان می‌دهیم که در حالت کلی عملگر b- ضعیف فشرده، ضعیف فشرده نیست ولی تحت شرایطی روی مشبکه‌های باناخ، هر عملگر b- ضعیف فشرده، می‌تواند ضعیف فشرده باشد. هم‌چنین رابطهٔ عملگرهای b-ضعیف فشرده را با عملگرهای فشردهٔ

*نویسنده مسئول haghnejad@uma.ac.ir

1. Alpay
2. b-weakly compact
3. Ercan
4. Altin
5. Semi-compact
6. Aqzzouz

ضعیف ترتیبی[۱] بررسی کرده و نشان می‌دهیم که اگر مشبکه باناخ E دارای خاصیت b باشد، در این صورت هر عملگر فشردهٔ ضعیف ترتیبی از E بتوی فضای باناخ مانند X، $b-$ ضعیف فشرده است .

در سرتا سر این مقاله، فضای ریس[۲] (مشبکه برداری) را با E نمایش می‌دهیم و فضای ریس را کامل ددکنید[۳] می‌نامیم هرگاه هر زیرمجموعهٔ ناتهی و از بالا کراندار آن دارای سوپریمم باشد.

تعریف ۱. در فضای ریس E دو عضو x و y را مجزا (عمود بر هم) گوییم هرگاه :

$$|x| \wedge |y| = 0$$

و می‌نویسیم $x \perp y$.

تعریف ۲. نرم $\|.\|$ بر فضای ریس E را نرم مشبکه‌ای گوییم هرگاه برای هر $x, y \epsilon E$ ، اگر $|x| \leq |y|$ آن‌گاه $\|x\| \leq \|y\|$. م شبکهٔ برداری مجهز به این نرم را م شبکهٔ برداری نرمدار می‌گوییم. اگر م شبکهٔ برداری نرمدار E تام[۴] باشد، آن‌گاه آن را مشبکه باناخ می‌نامیم.

یادآوری می‌کنیم که دوگان جبری X^* از فضای برداری X شامل همه تابعک‌های خطی روی X است.

فرض کنید X و Y فضاهای برداری باشند. در این صورت الحاقی عملگر $T: X \to Y$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$T^*: Y^* \to X^*$$

$$\left(T^* f\right)(x) = f(Tx), \qquad \left(f \epsilon Y^*, \qquad x \epsilon X\right).$$

فرض کنیم (X, τ) یک فضای برداری توپولوژیک باشد. دوگان توپولوژیک X' از (X, τ) یک زیرفضای برداری از X^* شامل تمام تابعک های خطی τ - پیوسته روی X است. دوگان توپولوژیک فضای نرمدار ریس E را با E' و دوگان دوم توپولوژیک E را با E'' نشان می دهیم. برای هر $f \in E'$ نرم $\|f\|$ را به‌صورت

$$\|f\| = sup\{\|f(x)\|: \|x\| \leq 1 \},$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت منظور ما از نرم E'، $\|f\|$ برای هر $f \in E'$ است. اگر E یک مشبکه برداری باشد در این صورت E_+ را مجموعه تمام عضو های مثبت E می‌گیریم، به‌عبارت بهتر $E_+ = \{x \geq 0 : x \in E\}$.

تعریف ۳. مشبکهٔ باناخ E را یک KB- فضا[۵] می‌نامیم هرگاه هر دنبالهٔ صعودی نرم کراندار در E_+ نرم همگرا باشد.

تعریف ۴. زیرفضای برداری A از فضای ریس E را ایده‌آل نامیم هرگاه به‌ازای هر $x, y \in E$ اگر $|x| \leq |y|$ و $y \in A$ آن‌گاه $x \in A$.

1. order weakly compact
2. Riesz space
3. Dedekind complete
4. complete
5. KB-space

تعریف ۵. در فضـــای ریس E تور $(x_\alpha)_\alpha$ را همگرای ترتیبی به x گوییم، هرگاه تور[1] دیگری مانند $(y_\alpha)_\alpha$ وجود داشته باشد به طوری‌که :

$$y_\alpha \downarrow 0, \qquad \forall\alpha: \quad |x_\alpha - x| \leq y_\alpha$$

در این صــورت این همگرایی را به‌صــورت $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ نشــان می‌دهیم. عبارت $y_\alpha \downarrow 0$ به این معنی اســت که $(y_\alpha)_\alpha$ دنباله‌ای نزولی است و $\inf(y_\alpha) = 0$.

تعریف ۶. زیرمجموعه A از فضای ریس E را بستهٔ ترتیبی[2] نامیم، هرگاه اگر $(x_\alpha) \subseteq A$ و $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ آن‌گاه $x \in A$. هر ایده‌آل بستهٔ ترتیبی را یک نوار[3] می‌نامیم و نوار تولید شده به‌وسیلهٔ مجموعهٔ A در فضای ریس E را با B_A نمایش می‌دهیم.

قضیهٔ ۷. مشبک G باناخ E , KB– فضا است اگر و فقط اگر E نواری در E'' باشد.

اثبات. به قضیهٔ ۴٫۶۰ از منبع [۱] مراجعه شود

تعریف ۸. زیرمجموعهٔ A از فضـــای ریس E را کراندار ترتیبی نامیم هرگاه y ای در E موجود باشـــد به طوری‌که به ازای هر $x \in A$ داشته باشیم $|x| \leq y$.

تعریف ۹. فرض کنیم E و F دو فضای ریس باشند. عملگر خطی $T: E \to F$ را:

الف) مثبت گوییم هرگاه به‌ازای هر $x \in E_+$ داشته باشیم $T(x) \geq 0$.

ب) کراندار ترتیبی[4] گوییم هرگاه برای هر زیرمجموعهٔ کراندار ترتیبی A از E، $T(A)$ در F کراندار ترتیبی باشد.

گردایهٔ همه تابعک‌های خطی کراندار ترتیبی بر فضـــای ریس E را با $E^\sim$ نشـــان می‌دهیم و آن را دوگان ترتیبی E می‌نامیم. با توجه به صفحهٔ ۵۸ از [۱] فضای دوگان ترتیبی، $E^\sim$ یک فضای ریس است.

دوگان ترتیبی $E^\sim$ را دوگان دوم ترتیبی فضای ریس E می‌گوییم و با $E^{\sim\sim}$ نشان می‌دهیم به‌عبارت دیگر

$$E^{\sim\sim} := (E^\sim)^\sim.$$

تعاریف b- کراندار ترتیبی و خاصیت b برای یک فضای ریس را که در زیر آورده‌ایم، برای اولین بار به‌وسیلهٔ آلپای و همکارانش برای بررسی خواص عملگرهای b-ضعیف فشرده ارائه شدند، برای اطلاعات بیش‌تر به [۳] مراجعه شود.

تعریف ۱۰. فرض کنیم E یک فضای ریس باشد. در این صورت

الف) $A \subseteq E$ را b– کراندار ترتیبی می‌نامیم هرگاه A در $E^{\sim\sim}$ کراندار ترتیبی باشد.

ب) E دارای خاصیت b است هرگاه هر زیرمجموعهٔ b- کراندار ترتیبی E در E کراندار ترتیبی باشد.

---

1. net
2. Order closed
3. Band
4. Order bounded

می‌توان نشـــان داد فضـــای ریس E دارای خاصـــیت b اســـت اگر و تنها اگر برای هر $(x_\alpha)_\alpha \subseteq E$ و xی در $E^{''}$ که $0 \le x_\alpha \uparrow \le x$ ، تور (x_α) در E کراندار ترتیبی باشد. رفت این قضیه واضح است، برای قسمت برگشت، فرض کنیم که $A \subseteq E$، b- کراندار ترتیبی با شد. در این صورت $x'' \in E''_+$ موجود ا ست که برای هر $x \in A$ داریم $|x| \le x''$. بازه $\left[\cdot, x^{''}\right]$ را به صـــورت توری مانند $(x''_\alpha)_{\alpha\in I}$ در نظر می‌گیریم که در این جا $I = \left[\cdot, x^{''}\right]$ و برای هر $\alpha\epsilon I$ قرار می‌دهیم $x''_\alpha = \alpha$. در این صـــورت $0 \le x''_\alpha \uparrow \le x''$. حال اگر قرار دهیم $B = \{|x|: x\epsilon A\}$، آن گاه B یک زیرتوری مانند $(x_\beta)_{\beta\epsilon J}$ از $(x''_\alpha)_{\alpha\in I}$ اســـت که $0 \le x_\beta \uparrow \le x''$. در این صـــورت بنا به فرض $z\epsilon E$ موجود اســـت که $0 \le x_\beta \uparrow \le z$ و بنا براین A کراندار ترتیبی است.

تعریف ۱۱. فرض کنیم E یک مشبکهٔ باناخ با نرم $\|.\|$ باشد. دراین صورت نرم $\|.\|$ بر مشبکهٔ باناخ E را پیوسته ترتیبی گوییم هرگاه اگر $x_\alpha \downarrow 0$ آن‌گاه $\|x_\alpha\| \to 0$.

قضیهٔ ۱۲. برای مشبکه باناخ E احکام زیر هم‌ارزند.

۱. E دارای نرم پیوسته ترتیبی است.

۲. E یک ایده‌آل در $E^{''}$ است.

۳. هر بازهٔ مرتب E فشردهٔ ضعیف است.

اثبات. برای اثبات به قضیهٔ ۴٫۹ از منبع [۱] مراجعه شود.

قضیهٔ ۱۳. شرط لازم و کافی برای این‌که مشبکهٔ باناخ E یک KB-*فضا* باشد آن است که E دارای خاصیت b و نرم پیوستهٔ ترتیبی باشد.

اثبات. فرض کنیم E یک KB- فضا باشد. در این صورت با توجه به توضیحات صفحه ۲۳۲ از [۱] مشبکهٔ باناخ E دارای نرم پیوستهٔ ترتیبی است. حال نشان می‌دهیم E دارای خاصیت b نیز هست. فرض کنیم $(x_\alpha) \subseteq E$ و $x^{''}$ای در $E^{''}$ وجود داشته باشد که $0 \le x_\alpha \uparrow \le x''$. بنابراین $sup \parallel x_\alpha \parallel \le \parallel x^{''} \parallel < +\infty$ و چون E یک KB- فضا است، در نتیجه $x \in E$ موجود است که $\parallel x_\alpha - x \parallel \longrightarrow 0$. در این صورت بنا به قضیهٔ ۳٫۴۶ از [۱] داریم $0 \le x_\alpha \uparrow x$ و بنابراین حکم برقرار است.

برعکس، با توجه به قضیهٔ ۷ کافی است نشان دهیم E نواری در $E^{''} = E^{\sim\sim}$ است. از این‌که E دارای نرم پیوستهٔ ترتیبی است بنا بر قضیهٔ ۱۲، E ایده‌آلی در $E^{''}$ است. حال فرض می‌کنیم (x_α) یک تور در E باشد به‌طوری‌که به‌ازای $x^{''}$ای در $E^{''}$ شرط $0 \le x_\alpha \uparrow x^{''}$ برقرار باشد. کافی است بنا به لم ۱٫۳۷ از [۱] نشان دهیم که $x^{''} \in E$. از آن‌جاکه بنا به فرض E دارای خاصیت b است ، پس $z \in E$ ای با شرط $0 \le x_\alpha \le z$ *برای هر* α برقرار است. چون با توجه به نتیجهٔ ۴٫۱۰ از [۱]، E یک فضای کاملاً ددکنید است در این صورت $x = sup\, x_\alpha$ وجود دارد *و بنا براین* $x \in E$ از این‌رو، $x = x^{''}$ ،و بنابراین E نواری در $E^{''}$ *است*.

بخش اصلی

تعریف ۱۴. فرض کنیم E یک مشبکهٔ باناخ و X یک فضای باناخ باشد. عملگر $T: E \to X$ را $b-$ ضعیف فشرده می‌نامیم هرگاه T، هر زیرمجموعهٔ b –کراندار ترتیبی از E را به زیرمجموعهٔ فشردهٔ نسبی ضعیف از X ببرد.
مجموعهٔ همهٔ عملگرهای فشردهٔ ضعیف از E به توی X را با $W(E,X)$ و مجموعهٔ همهٔ عملگرهای$b-$ ضعیف فشرده را با $W_b(E,X)$ نشان می‌دهیم .

قضیهٔ ۱۵. فرض کنیم E یک فضای ریس باشد. در این صورت E یک KB- *فضا است* اگر و فقط اگر عملگر همانی $I : E \to E$ عملگری $b-$ ضعیف فشرده باشد.

اثبات. فرض کنیم E یک KB- *فضا* و A یک دنبالهٔ b –کراندار ترتیبی از E باشد. بنا بر قضیهٔ ۱۳ هر KB- فضا دارای خاصیت b است پس E دارای خاصیت b است. از این‌رو، A یک زیرمجموعهٔ کراندار ترتیبی E است. بنابراین $x \in E_+$ وجود دارد به‌طوری‌که $A \subset [-x,x]$. از طرفی بنا بر قضیهٔ ۱۲ مجموعهٔ $[-x,x]$ فشردهٔ ضعیف است. چون $[-x,x]$ گوی یکهٔ بسته است پس A زیرمجموعهٔ نسبی فشردهٔ ضعیف است. از آن‌جاکه I عملگر همانی است در نتیجه I، $b-$ضعیف فشرده است.
برعکس، فرض کنیم $I: E \to E$ ، b- ضعیف فشرده و (x_n) یک دنبالهٔ صعودی و نرم کراندار در E_+ باشد. نشان می‌دهیم (x_n) همگرا است. نگاشت $\hat{x} : E_+^{'} \to R$ را برای هر $f \in E_+^{'}$ به‌صورت $\hat{x}\,(f) = \lim_n f(x_n)$ تعریف می کنیم. $\hat{x}$ روی$E_+^{'}$ جمعی است زیرا :

$$\begin{aligned}\hat{x}(f+g) &= \lim_n (f+g)(x_n) = \lim_n \big(f(x_n)+g(x_n)\big) \\ &= \lim_n \big(f(x_n)\big) + \lim_n \big(g(x_n)\big) = \hat{x}(f) + \hat{x}(g)\end{aligned}$$

از این‌رو، بنابه قضیهٔ ۱٫۱۰ از [۱] به یک عنصر $E^{''}$ قابل توسیع است که آن را دوباره با $\hat{x}$ نشان می‌دهیم. در $E^{''}$ برای هر n داریم: $0 \le x_n \le \hat{x}$. بنابراین (x_n) زیرمجموعهٔ $b-$ کراندار ترتیبی از E است. حال چون I ، $b-$ ضعیف فشرده است پس $\big(I(x_n)\big)$ نسبت به نرم همگرا است از این‌رو، (x_n) همگرا است. و حکم ثابت می شود.

گزارهٔ ۱۶. فرض کنیم E مشبکهٔ باناخ باشد. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند :

۱. E یک $KB-$ فضاست.
۲. برای هر فضای باناخ F داریم : $L(E,F) = W_b(E,F)$.

اثبات ۲←۱). فرض کنیم E یک KB - فضا باشد و فرض کنیم F یک فضای باناخ و T عملگری پیوسته از E بتوی F و A یک زیرمجموعهٔ $b-$کراندار ترتیبی از E باشد. بنا برقضیهٔ ۱۳ هر $KB-$ فضا دارای خاصیت b است، پس A در E کراندار ترتیبی است. از این‌رو، عنصر مثبتی مانند x در E وجود دارد که $A \subseteq [-x,x]$. چون E دارای نرم پیوستهٔ ترتیبی است (بنا به قضیهٔ ۱۳ هر KB-فضا دارای نرم پیوسته ترتیبی است)، بنا بر قضیهٔ ۱۲ بازهٔ مرتب $[-x,x]$ یک

زیرمجموعهٔ نسبی فشردهٔ ضعیف است. از طرفی، $\overline{A}^{w} \subseteq [-x,x]$ و چون $\overline{A}^{w}$ بستهٔ ضعیف و $[-x,x]$ فشردهٔ ضعیف است از این‌رو، $\overline{A}^{w}$ فشردهٔ ضعیف است. از این‌که عملگر T پیوسته است نتیجه می‌شود که $T(\bar{A}^{w})$ فشردهٔ ضعیف است. حال چون $\overline{T(A)}^{w} \subseteq T(\overline{A}^{w})$ لذا $\overline{T(A)}^{w}$ فشردهٔ ضعیف است پس T، b- ضعیف فشرده است یعنی

$$L(E,F) \subseteq W_b(E,F).$$

از طرفی بدیهی است که $W_b(E,F) \subseteq L(E,F)$ بنابراین حکم ثابت می شود.

۱ $\rightarrow$ ۲). فرض کنیم برای هر فضای باناخ F، $L(E,F) = W_b(E,F)$. در این‌صورت عملگر همانی $I: E \rightarrow E$ ، b- ضعیف فشرده است. بنابراین از قضیهٔ ۱۵، نتیجه می‌شود که E یک KB– فضا ست.

قضیهٔ ۱۷. فرض کنیم $T: E \rightarrow X$ یک عملگر پیوسته از مشبکهٔ باناخ E به فضای باناخ X باشد. در این صورت عملگر T ، b-ضعیف فشرده است اگر و فقط اگر به‌ازای هر دنبالهٔ b–کراندار ترتیبی مجزا مانند (x_n) در E_+ داشته باشیم:

$$\lim_{n}\|T(x_n)\| = 0.$$

اثبات. برای اثبات به گزارهٔ ۱ از منبع [۴] مراجعه شود.

گزارهٔ ۱۸. فرض کنیم $T: E \rightarrow F$ یک عملگر کراندار ترتیبی از مشبکهٔ باناخ E بتوی مشبکهٔ باناخ کامل ددکینید F باشد. اگر c_0 در F نشانده نشود، آن‌گاه $L(E,F) = W_b(E,F)$.

اثبات. با توجه به این که $T = T^+ - T^-$، بدون این که به کلیت خللی وارد شود T را مثبت می‌گیریم. حال چون T مثبت است بنا به قضیهٔ ۴٫۳ از [۱] عملگر T پیوسته است. بنا به قضیهٔ ۱۷ کافی است نشان دهیم به‌ازای هر دنبالهٔ – b کراندار ترتیبی مجزا مانند (x_n) در E_+، $\lim\limits_{n}\|T(x_n)\| = 0$. فرض کنیم (x_n) یک دنبالهٔ مجزا در E_+ باشد که در رابطه با آن x ای در E'' وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر n، x $0 \leq x_n \leq x$. در این صورت بنابر قضیهٔ ۱٫۳ از [۱] داریم $\sum_{n=1}^{k} x_n = \vee_{n=1}^{k} x_n$ و بنابراین به‌ازای هر $x' \in E'$ مثبت و هر k داریم $x'(\sum_{n=1}^{k} x_n) = x'(\vee_{n=1}^{k} x_n) \leq x'(x)$. از این‌رو به‌ازای هر $x' \in E'$، $\sum_{n=1}^{\infty} x'(x_n) < \infty$. در این‌صورت به‌ازای هر $x' \in F'$ داریم $\sum_{n=1}^{\infty} x'(Tx_n) = \sum_{n=1}^{\infty} T^*x'(x_n) < +\infty$ و با توجه به این‌که دنبالهٔ $(S_m = \sum_{n=1}^{m} Tx_n)_m$ کراندار ضعیف است، بنا به قضیهٔ ۲٫۵٫۵ از [۷] کراندار نرمی است. از آن‌جاکه c_0 در F نشانده نمی‌شود بنا به قضیهٔ ۴٫۶۰ از [۱] مشبکه باناخ F یک KB - فضا است. چون دنبالهٔ (S_m) صعودی و نرم کراندار است پس نرم همگرا است و بنابراین $(\sum_{n=m}^{k} Tx_n)$ در نرم همگرا به صفر است و چون عملگر T مثبت است داریم $\|Tx_m\| \leq \left\|\sum_{n=m}^{k} Tx_n\right\|$ و بنابراین $\lim\limits_{n}\|Tx_n\| = 0$. در نتیجه بنا به قضیهٔ ۴٫۲ عملگر T، b– ضعیف فشرده است.

تعریف ۱۹. فرض کنید E و F دو فضای ریس و T, S عملگرهایی از E بتوی F باشند. در این صورت می‌گوییم S به وسیلهٔ T محدود شده است هرگاه به‌ازای هر $x \in E$ داشته باشیم

$$|S(x)| \leq T(|x|).$$

قضیهٔ ۲۰. فرض کنیم $S, T: E \to F$ عملگرهایی بین مشبکه‌های باناخ و S به‌وسیلهٔ T محدود شده باشد. اگر عملگر T، $b-$ ضعیف فشرده باشد، آن‌گاه S نیز $b-$ ضعیف فشرده است.

اثبات. فرض کنیم (x_n) یک دنبالهٔ $b-$ کراندار مرتب مجزا در E باشد. کافی است که بنا به قضیهٔ ۱۷ ثابت کنیم که $\lim_n \|S(x_n)\| = 0$. به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $x_n = x_n^+ - x_n^-$. بنابراین (x_n^+) و (x_n^-) دنباله‌هایی مجزا هستند و چون S به‌وسیلهٔ T محدود شده است داریم

$$0 \le |S(x_n^+)| \le T(|x_n^+|) = T(x_n^+),$$
$$0 \le |S(x_n^-)| \le T(|x_n^-|) = T(x_n^-),$$

از این‌رو

$$0 \le |S(x_n)| = |S\,(x_n^+ - x_n^-)| \le |S(x_n^+)| + |S(x_n^-)| \le T(x_n^+) + T(x_n^-).$$

از طرف دیگر چون عملگر T، $b-$ ضعیف فشرده است بنا بر قضیهٔ ۱۷ داریم $\lim_n T(x_n^+) = 0$ و $\lim_n T(x_n^-) = 0$ از این‌رو، $lim_n \|S(x_n)\| = 0$ یعنی عملگر S ، $b-$ ضعیف فشرده است.

تعریف ۲۱. عملگر T از مشبکهٔ باناخ E بتوی فضای باناخ X را فشردهٔ ضعیف ترتیبی گوییم هرگاه به‌ازای هر $x \in E_+$، $\overline{T([-x,x])}$ زیرمجموعهٔ فشردهٔ ضعیف از X باشد.

قضیهٔ ۲۲. اگر مشبکهٔ باناخ E دارای خاصیت b باشد، در این صورت هرعملگر فشردهٔ ضعیف ترتیبی از E بتوی فضای باناخ X، $b-$ ضعیف فشرده است .

اثبات. فرض کنیم که E دارای خاصیت b و $T: E \to X$ یک عملگر فشردهٔ ضعیف ترتیبی و A زیرمجموعهٔ $b-$کراندار ترتیبی E باشد. از آن‌جاکه E دارای خاصیت b است، پس A در E کراندار ترتیبی است. از این‌رو، عنصر مثبتی مانند x در E وجود دارد به‌طوری‌که $A \subseteq [-x, x]$. پس داریم:

$$T\,(A) \subseteq T\,([-x,x] \Longrightarrow \overline{T(A)}^w \subseteq \overline{T\,([-x,x])}^w.$$

با توجه به این‌که عملگر T فشردهٔ ضعیف ترتیبی است پس نتیجه می‌شود که $\overline{T\,(A)}^w$ زیرمجموعه فشردهٔ ضعیف از X است. از این‌رو T ، b- ضعیف فشرده است.

تبصره: هرزیرمجموعهٔ $b-$ کراندار ترتیبی، کراندار است. پس هر عملگر فشردهٔ ضعیف، b- ضعیف فشرده است. یعنی

$$W(E,X) \subseteq W_b(E,X) \tag{۱}$$

زیرا، فرض کنیم $T \in W(E,X)$ و $B \subseteq E$ مجموعه‌ای $b-$ کراندار ترتیبی باشد از این‌رو، B کراندار است و چون T فشردهٔ ضعیف است پس $\overline{T(B)}$ فشردهٔ ضعیف است لذا T ، b- ضعیف فشرده است.

تعریف ۲۳. نرم $\|.\|$ تعریف شده روی مشبکهٔ باناخ E را p– جمعی[1] ($1 \leq p < \infty$) گوییم هرگاه به‌ازای هر $x, y \in E_+$ عمود بر هم، تساوی $(\|x+y\|)^p = (\|x\|)^p + (\|y\|)^p$ برقرار باشد.

گزارهٔ ۲۴. فرض کنیم $1 \leq p < \infty$. در این صورت هر مشبکهٔ باناخ E با یک نرم p– جمعی یک KB-فضاست.

اثبات. برای اثبات به نتیجه۲٫۴٫۱۳ از منبع [۶] مراجعه شود.

مثال ۲۵. عملگر همانی $I: L_1[a,b] \to L_1[a,b]$ b– ضعیف فشرده است، که در این جا

$$(L_1[a,b] = \{ f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : \|f\|_1 = \int_a^b \left| f(x) \right| dx < \infty \text{ و } f \text{ اندازه پذیر} \}).$$

(در $L_1[a,b]$ دو عضو را که تقریباً همه جا مساوی باشند، یکی می‌گیریم) با توجه به این‌که $L_1[a,b]$ یک فضای باناخ است و تحت رابطهٔ $f \leq g$ (در این جا برای هر $x \in [a,b]$ داریم: $f(x) \leq g(x)$) یک فضای ریس است و به‌ازای هر $f, g \in L_1[a,b]$ که $|f(x)| \leq |g(x)|$ داریم:

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b |g(x)| dx$$

یعنی $\|f\|_1 \leq \|g\|_1$ ، از این‌رو، $L_1[a,b]$ یک مشـــبکهٔ باناخ اســـت. به‌ازای هر دو عنصـــر مثبت و عمود برهم $f, g \in L_1[a,b]$ داریم:

$$\|f+g\|_1 = \int_a^b |f(x)+g(x)| dx = \int_a^b (f(x)+g(x)) dx = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

پس $L_1[a,b]$ دارای نرم p– جمعی است (در این‌جا $p = 1$). در نتیجه بنا به گزارهٔ ۲۴، $L_1[a,b]$ یک KB - فضا است. از این‌رو، از قضیهٔ ۱۵ نتیجه می‌شود که عملگر همانی فوق b– ضعیف فشرده است. از طرفی، چون $L_1[a,b]$ انعکاسی نیست، بنا به قضیهٔ ۲٫۸٫۲ از [۷]، $L_1[a,b]$ ضعیف فشرده نیست.

گزارهٔ ۲۶. فرض کنیم عملگر خطی T از مشبکهٔ باناخ E بتوی فضای باناخ X پیوسته باشد. در این صورت اگر B_E نوار تولید شده به‌وسیلهٔ E در E'' باشد، آن‌گاه $T''(B_E) \subset X$ است اگر و فقط اگر T ، b- ضعیف فشرده باشد.

اثبات. برای اثبات به گزارهٔ ۲٫۸ از منبع [۲] مراجعه شود.

قضیهٔ ۲۷. این احکام برای مشبکهٔ باناخ E هم‌ارزند:

۱. نرم تعریف شده روی E' پیوستهٔ ترتیبی است.

۲. $B_E = E''$ (B_E نوار تولید شده توسط E در E'' است).

۳. E' یک KB – فضا است.

اثبات. برای اثبات به قضیهٔ ۲٫۴٫۱۴ از منبع [۶] مراجعه شود.

1. P-additive

قضیهٔ ۲۸. اگر $T: X \to Y$ عملگر پیوسته بین فضاهای باناخ باشد، آن‌گاه این عبارات معادلند:

۱. T فشردهٔ ضعیف است.

۲. $T''(X'') \subset Y$.

۳. T' فشردهٔ ضعیف است.

اثبات. برای اثبات به قضیهٔ ۵٫۲۳ از منبع [۱] مراجعه شود.

قضیهٔ ۲۹. فرض کنیم E مشبکهٔ باناخ و X فضای باناخ باشند. اگر نرم تعریف شده روی E' پیوستهٔ ترتیبی باشد آن‌گاه هر عملگر پیوستهٔ $b-$ضعیف فشردهٔ $T: E \to X$، فشردهٔ ضعیف است.

اثبات. فرض کنیم نرم تعریف شده روی E' پیوستهٔ ترتیبی باشد و فرض کنیم $T: E \to X$ یک عملگر $b-$ضعیف فشرده و B_E یک نوار تولید شده به‌وسیلهٔ E در E'' باشد. در این صورت از گزارهٔ ۲۶ نتیجه می‌شود که $T''(B_E) \subset X$ که T'' الحاقی دوم T است. از طرفی چون نرم تعریف شده روی E' پیوستهٔ ترتیبی است بنابر قضیهٔ ۲۷ داریم $B_E = E''$. بنابراین $T''(E'') \subset X$ و از این رو بنابر قضیهٔ ۲۸ نتیجه حاصل می‌شود.

References

1. Aliprantis C. D., Burkinshaw O., "Positive Operators", Academic press, Inc. (2006).

2. Alpay S., Altin B., Tonyal C., "On property (b) of vector lattices", Positivity, 7 (2003) 135-139.

3. Alpay S., Ercan Z., "Characterizations of Riesz spaces with b-property", Positivity, 13 (2009) 21-30.

4. Altin B., "On b-weakly compact operators on Banach lattices", Taiwan. J. Math, 11, (2007) 143-150.

5. Aqzzouz B., Elbour A., Hamichane J., "The duality problem for the class of b-weakly compact operators", Positivity 13 (2009) 683-692.

6. Meyer-Nieberg P., "Banach Lattices", Springer, Berlin, (1991).

7. Megginson R., "An introduction to Banach space theory", Springer (1991).