

# نقاط ثابت دو نوع انقباض غیر دوری و ارتباط آنها با بهترین نقاط تقریبی انقباض‌های دوری متناظر

سعید استاد باشی\*، علی عبادیان

دانشگاه ارومیه، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

دریافت: ۹۷/۰۸/۱۲

پذیرش: ۹۹/۰۲/۲۲

## چکیده

فرض کنید  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه غیر تهی از فضای متریک  $(X, d)$  باشند. در این مقاله ابتدا دو نوع انقباض غیر دوری روی مجموعه  $A \cup B$  معرفی می‌کنیم. سپس به بررسی وجود و یکتایی زوج بهینه از نقاط ثابت برای چنین نگاشت‌هایی در فضاهای متریک با در نظر گرفتن خاصیت  $UC$  می‌پردازیم. نتایج اصلی به دست آمده تعمیمی از قضایای بهترین نقاط تقریبی موجود برای انقباض‌های دوری متناظر مربوط به دی‌باری-سوزوکی-وترو و فلیسیت-الدرد هستند.

واژه‌های کلیدی: نقطه ثابت، بهترین نقطه تقریبی، نگاشت‌های غیر دوری و دوری، انقباض میر-کیلر، خاصیت  $UC$ .

## ۱. مقدمه

فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متریک باشد. نقطه  $z \in X$  یک نقطه ثابت خودنگاشت  $T : X \rightarrow X$  نامیده می‌شود هرگاه  $Tz = z$  همچنین اگر  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه غیر تهی فضای  $X$  باشند، در این صورت خودنگاشت  $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$  غیر دوری [۳] نامیده می‌شود هرگاه  $T(A) \subseteq A$  و  $T(B) \subseteq B$  و نگاشتی دوری [۴] گفته می‌شود هرگاه  $T(A) \subseteq B$  و  $T(B) \subseteq A$ . با فرض  $d(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$ ، دوتایی مرتب  $(z, u) \in A \times B$  را یک زوج بهینه از نقاط ثابت نگاشت غیر دوری  $T$  می‌نامیم هرگاه  $z$  و  $u$  نقاط ثابتی از  $T$  باشند که  $d(z, u) = d(A, B)$ . نقطه  $z \in A \cup B$  را بهترین نقطه تقریبی نگاشت دوری  $T$  گوئیم چنانچه  $d(z, Tz) = d(A, B)$ . در سال‌های اخیر یافتن شرایطی برای تضمین وجود، یکتایی و همگرایی نقاط ثابت و بهترین نقاط تقریبی کلاس‌های متفاوتی از خودنگاشت‌های انقباضی دوری و غیر دوری به منظور به دست آوردن تعمیم‌هایی برای اصل انقباض باناخ، مورد توجه بسیاری از نویسندگان قرار گرفته است [۱، ۲، ۴، ۵، ۶،

۷، ۸، ۱۱، ۱۳]. اما در این بین بحث وجود نقاط ثابت برای نگاشت‌های غیر دوری کمتر بررسی شده است. در [۴]، الدرد و ویرامانی تعمیم زیر از اصل انقباض باناخ را برای یک نگاشت انقباض دوری به دست آوردند. قضیه ۱. [۲] فرض کنید  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌هایی ناتهی و محدب از یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب باشند. در این صورت چنانچه نگاشت  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  یک انقباض دوری باشد، یعنی عدد  $c \in (0,1)$  موجود باشد به گونه‌ای که برای هر  $(x,y) \in A \times B$  داشته باشیم:

$$d(Tx, Ty) \leq cd(x, y) + (1-c)d(A, B),$$

آن‌گاه  $T$  دارای بهترین نقطه تقریبی یکتایی در  $A$  مانند  $z$  است که به ازای هر نقطه  $x_0 \in A$  دنباله  $\{T^{2n}x_0\}$  همگرا به آن می‌باشد.

از طرفی میر و کیلر [۱۰]، با تعریف یک انقباض جدید به صورت زیر، تعمیم دیگری از اصل انقباض باناخ ارائه کردند. تعریف ۱. [۱۰] خودنگاشت  $T: X \rightarrow X$  یک انقباض میر-کیلر نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ، عددی مانند  $\delta > 0$  موجود باشد به گونه‌ای که برای هر  $x, y \in X$  داشته باشیم:

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(Tx, Ty) < \varepsilon.$$

بعد از آن بسیاری از نویسندگان از ایده میر و کیلر استفاده کرده و تعمیم‌های دیگری از اصل انقباض باناخ به دست آورده و قضایای نقطه ثابت جدیدی را ارائه نمودند [۲، ۹، ۱۲]. از جمله در سال ۲۰۰۸ دی‌باری، سوزوکی و وترو [۲] به معرفی مفهوم نگاشت‌های انقباض دوری میر-کیلر پرداخته و تعمیمی از قضیه ۱ را برای این کلاس از توابع به دست آوردند. اما یک نکته ساده و قابل توجه این است که چنانچه  $T$  یک خودنگاشت دوری باشد خودنگاشت  $T^2$  غیر دوری خواهد بود. با توجه به این ارتباط ساده این سوال مطرح می‌شود که آیا می‌توان با تعریف یک انقباض غیر دوری میر-کیلر، قضیه دی‌باری-سوزوکی-وترو را به این کلاس از خودنگاشت‌ها تعمیم داد؟ جواب ما به این سوال مثبت است. در بخشی از این مقاله به معرفی انقباض‌های غیر دوری میر-کیلر پرداخته، سپس به بررسی شرایط وجود و یکتایی نقاط ثابت برای این کلاس از توابع در یک فضای متریک با استفاده از خاصیت  $UC$  می‌پردازیم. نتیجه‌ای که به دست خواهیم آورد تعمیمی از قضیه دی‌باری-سوزوکی-وترو خواهد بود.

تابع  $f: \square \rightarrow \square$  را در نقطه  $x_0$  نیمه پیوسته پایینی می‌نامیم هرگاه به ازای هر  $\lambda < f(x_0)$  عدد حقیقی  $\eta > 0$  موجود باشد به گونه‌ای که برای هر  $x \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$  داشته باشیم  $\lambda \leq f(x)$ . همچنین تابع  $f$  را نیمه پیوسته بالایی می‌گوییم هرگاه  $-f$  نیمه پیوسته پایینی باشد. ثابت می‌شود تابع  $f$  در نقطه  $x_0$  نیمه پیوسته پایینی است اگر و تنها اگر  $f(x_0) \leq \liminf_{t \rightarrow x_0} f(t)$  و لذا در نقطه  $x_0$  نیمه پیوسته بالایی است اگر و تنها اگر  $\limsup_{t \rightarrow x_0} f(t) \leq f(x_0)$ . به طور مشابه

مفهوم نیمه پیوسته بالایی از راست برای تابع  $\square \rightarrow \square : f$  تعریف شده و نتیجه می‌شود که تابع  $f$  در نقطه  $x_0$  نیمه پیوسته بالایی است اگر و تنها اگر  $\limsup_{t \rightarrow x_0^+} f(t) \leq f(x_0)$ . با این توضیحات فرض کنیم  $\psi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  یک تابع نیمه پیوسته بالایی از راست باشد به این معنا که به ازای هر  $s \in [0, +\infty)$  داشته باشیم:

$$\limsup_{t \rightarrow s^+} \psi(t) \leq \psi(s).$$

همچنین فرض کنید به ازای هر  $t > 0$  داریم:  $0 \leq \psi(t) < t$ . در سال ۲۰۱۵، فلیسیت و الدرد [۶] تعمیمی از قضیه ۱ برای اثبات وجود و یکتایی بهترین نقطه تقریبی برای انواعی از خودنگاشت‌های  $p$ -دوری  $T : \bigcup_{i=1}^p A_i \rightarrow \bigcup_{i=1}^p A_i$  که برای هر  $1 \leq i \leq p$  و هر  $(x, y) \in A_i \times A_{i+1}$  در شرط زیر صادق باشند:

$$d(Tx, Ty) - d(A, B) \leq \psi(d(x, y) - d(A, B)),$$

را به دست آوردند. از آنجا که برای یک نگاشت  $p$ -دوری نگاشت  $T^p$  روی  $A_i \cup A_{i+1}$  برای هر  $1 \leq i \leq p$  غیر دوری است، لذا در بخش دیگری از این مقاله به بررسی شرایط وجود و یکتایی نقاط ثابت برای نگاشت‌های غیر دوری  $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$  با شرط انقباض مشابه می‌پردازیم. خواهیم دید که قضیه فلیسیت-الدرد نتیجه‌ای از قضیه اصلی این قسمت است.

## ۲. تعاریف و پیش‌نیازها

این بخش را با تعریف یک  $L$ -تابع که برای توصیف انقباض‌های میر-کیلر مفید خواهد بود آغاز می‌کنیم.

**تعریف ۲.** تابع  $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  یک  $L$ -تابع نامیده می‌شود هرگاه در سه شرط زیر صدق کند:

$$(۱) \quad \varphi(0) = 0$$

$$(۲) \quad \text{به ازای هر } s \in (0, +\infty) \text{ داشته باشیم } \varphi(s) > 0$$

$$(۳) \quad \text{به ازای هر } s \in (0, +\infty) \text{ عددی مانند } \delta > 0 \text{ موجود باشد به گونه‌ای که برای هر } t \in [s, s + \delta] \text{ داشته باشیم } \varphi(t) \leq s.$$

**لم ۱.** [۱۲]  $L$ -تابع  $\varphi$  و دنباله صعودی  $\{s_n\}$  از اعداد حقیقی غیر منفی را در نظر بگیرید. فرض کنید به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$

$$\text{که } s_n > 0 \text{ داشته باشیم: } s_{n+1} \leq \varphi(s_n). \text{ در این صورت } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0.$$

**لم ۲.** [۹] فرض کنید  $f$  و  $g$  توابعی از مجموعه ناتهی  $Y$  به  $[0, +\infty)$  باشند. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:

$$(۱) \quad \text{برای هر } \varepsilon > 0, \text{ عددی مانند } \delta > 0 \text{ موجود است به گونه‌ای که}$$

$$x \in Y, f(x) < \varepsilon + \delta \Rightarrow g(x) < \varepsilon.$$

(۲) یک  $L$ -تابع (صعودی و پیوسته)  $\varphi$  موجود است به گونه‌ای که

$$\begin{aligned}x \in Y, f(x) > 0 &\Rightarrow g(x) < \varphi(f(x)), \\x \in Y, f(x) = 0 &\Rightarrow g(x) = 0.\end{aligned}$$

در ادامه بدون هیچ تغییر محسوسی یک انقباض غیر دوری میر-کیلر را مشابه با یک انقباض دوری میر کیلر [۲] تعریف می‌کنیم. برای پرهیز از تکرار، از تعریف یک انقباض دوری میر-کیلر صرف نظر می‌نماییم.

**تعریف ۳.** فرض کنید  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه غیر تهی فضای متریک  $(X, d)$  باشند. در این صورت نگاشت غیر دوری  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  یک انقباض غیر دوری میر-کیلر نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ، عددی مانند  $\delta > 0$  موجود باشد به گونه‌ای که برای هر  $(x, y) \in A \times B$  که  $d(x, y) < d(A, B) + \varepsilon + \delta$  داشته باشیم:

$$d(Tx, Ty) < d(A, B) + \varepsilon.$$

گزاره زیر ارتباط بین یک  $L$ -تابع و یک انقباض غیر دوری میر-کیلر را بیان می‌کند.

**گزاره ۱.** زیرمجموعه‌های ناتهی  $A$  و  $B$  از فضای متریک  $(X, d)$  را در نظر بگیرید. نگاشت  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  یک انقباض غیر دوری میر-کیلر است اگر و تنها اگر یک  $L$ -تابع  $\varphi$  (صعودی و پیوسته) موجود باشد به گونه‌ای که به ازای هر  $(x, y) \in A \times B$  که  $d(x, y) - d(A, B) > 0$  داشته باشیم:

$$d(Tx, Ty) - d(A, B) < \varphi(d(x, y) - d(A, B)),$$

و برای هر  $(x, y) \in A \times B$  که  $d(x, y) - d(A, B) = 0$  داشته باشیم:  $d(Tx, Ty) - d(A, B) = 0$ .

**اثبات.** کافی است در لم ۲ قرار دهیم  $Y = A \times B$  و توابع  $f$  و  $g$  از  $Y$  به  $[0, +\infty)$  را با ضوابط زیر تعریف کنیم:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= d(x, y) - d(A, B), \\g(x, y) &= d(Tx, Ty) - d(A, B).\end{aligned}$$

در این صورت چون  $T$  یک انقباض غیر دوری میر-کیلر است، درستی احکام از لم ۲ نتیجه می‌شوند.  $\square$

لم ساده زیر در اثبات نتایج اصلی مفید می‌باشد.

**لم ۳.** فرض کنید  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه غیر تهی فضای متریک  $(X, d)$  باشند. برای انقباض غیر دوری میر-کیلر  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$ ،  $L$ -تابع  $\varphi$  را مانند گزاره قبل در نظر بگیرید. در این صورت برای هر  $(x, y) \in A \times B$  همواره داریم:

$$\begin{aligned}d(Tx, Ty) &\leq d(x, y), \\d(Tx, Ty) - d(A, B) &\leq \varphi(d(x, y) - d(A, B)).\end{aligned}$$

**اثبات.** از گزاره ۱ برای هر  $(x, y) \in A \times B$  که  $d(x, y) - d(A, B) = 0$  داریم:

$$d(Tx, Ty) - d(A, B) = 0 = \varphi(0) = \varphi(d(x, y) - d(A, B)) \leq d(x, y) - d(A, B). \quad (۱)$$

با استفاده مجدد گزاره ۱ برای هر  $(x, y) \in A \times B$  که  $d(x, y) - d(A, B) > 0$  داریم:

$$d(Tx, Ty) - d(A, B) < \varphi(d(x, y) - d(A, B)) \leq d(x, y) - d(A, B). \quad (۲)$$

اکنون احکام مورد نظر از روابط (۱۵) و (۱۵) نتیجه می‌شوند. □

شایان ذکر است که خاصیت ایده‌آل فضای به طور یکنواخت محدب  $X$ ، نقش مهمی در اثبات قضیه ۱ ایفا می‌کند. لذا در ادامه به تعریف سوزوکی، کیکاوا و وترو [۱۳] از خاصیت هندسی  $UC$ ، برگرفته شده از خاصیت فضاهای به طور یکنواخت محدب باناخ می‌پردازیم.

**تعریف ۴.** [۱۳] فرض کنید  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه غیر تهی فضای متریک  $(X, d)$  باشند. در این صورت می‌گوییم زوج  $(A, B)$  دارای خاصیت  $UC$  است هرگاه اگر  $\{x_n\}$  و  $\{x'_n\}$  دنباله‌هایی در مجموعه  $A$  و  $\{y_n\}$  دنباله‌ای در مجموعه  $B$  باشد به گونه‌ای که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x'_n, y_n) = d(A, B),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, x'_n) = 0$$

به عنوان مثال چنانچه  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه غیر تهی فضای متریک  $(X, d)$  باشند که  $d(A, B) = 0$ ؛ یا اگر  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه غیر تهی یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب  $X$  باشند چنانکه  $A$  محدب باشد، آنگاه زوج  $(A, B)$  دارای خاصیت  $UC$  است. مثال‌های دیگری از زوج مجموعه‌هایی که دارای خاصیت  $UC$  باشند را می‌توان در [۱۳] مشاهده کرد.

این بخش را با دو لم زیر که از اهمیت ویژه‌ای در این مقاله برخوردار می‌باشند به پایان می‌رسانیم.

**لم ۴.** [۱۳] فرض کنید  $(A, B)$  یک زوج از زیرمجموعه‌های غیر تهی فضای متریک  $(X, d)$  باشد که دارای خاصیت  $UC$  است. در این صورت چنانچه  $\{x_n\}$  و  $\{y_n\}$  دنباله‌هایی به ترتیب در مجموعه‌های  $A$  و  $B$  باشند به گونه‌ای که یکی از تساوی‌های

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} d(x_m, y_n) = d(A, B), \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} d(x_m, y_n) = d(A, B),$$

برقرار باشند، آنگاه دنباله  $\{x_n\}$  کشی است.

لم ۵. [۱۳] فرض کنید  $(A, B)$  یک زوج از زیرمجموعه‌های غیر تهی فضای متریک  $(X, d)$  باشد که دارای خاصیت  $UC$  است. همچنین فرض کنید  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  یک نگاشت دوری باشد چنان‌که به ازای هر  $x \in A \cup B$

$$d(T^2x, Tx) \leq d(x, Tx),$$

و به ازای هر  $x \in A \cup B$  که  $d(x, Tx) > d(A, B)$

$$d(T^2x, Tx) < d(x, Tx).$$

در این صورت  $z \in A$  یک بهترین نقطه تقریبی  $T$  است اگر و تنها اگر یک نقطه ثابت  $T^2$  باشد.

### ۳. نتایج و بحث اصلی

لم ۶. فرض کنید  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه غیر تهی فضای متریک  $(X, d)$  باشند. انقباض غیر دوری میر-کیلر  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  را در نظر بگیرید و فرض کنید  $x_0 \in A$  و  $y_0 \in B$ . دنباله‌های  $\{x_n\}$  در  $A$  و  $\{y_n\}$  در  $B$  را به صورت  $x_n := Tx_{n-1}$  و  $y_n := Ty_{n-1}$  در نظر بگیرید. در این صورت داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(A, B).$$

اثبات. دنباله  $\{s_n\} \subseteq [0, +\infty)$  را به صورت  $s_n := d(x_n, y_n) - d(A, B)$  تعریف کنید.  $L$ -تابع  $\varphi$  را مانند گزاره ۱ در نظر بگیرید. در این صورت از تعریف یک انقباض غیر دوری میر-کیلر بدیهی است که  $s_n > 0$  ایجاب می‌کند  $s_{n+1} < \varphi(s_n)$  لذا بنابر لم ۲ داریم:  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$ . □

لم ۷. فرض کنید  $(X, d)$ ،  $A$ ،  $B$ ،  $T$  و  $\{x_n\}$  مانند لم ۶ تعریف شوند. به علاوه فرض کنید  $(A, B)$  دارای خاصیت  $UC$  باشد. در این صورت اگر دنباله  $\{x_n\}$  همگرا به نقطه  $z \in A$  باشد، آنگاه  $z$  یک نقطه ثابت از نگاشت  $T$  است. همچنین دارای حداکثر یک نقطه ثابت در مجموعه  $A$  است.

اثبات. فرض کنیم  $y_0 \in B$  و دنباله  $\{y_n\}$  را به صورت  $y_n := Ty_{n-1}$  تعریف کنید. در این صورت چون

$$d(z, y_n) \leq d(z, x_n) + d(x_n, y_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

لذا بنابر لم ۶ داریم:  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(z, y_n) = d(A, B)$ . از طرفی بنابر لم ۳ داریم:

$$d(Tz, y_n) - d(A, B) \leq \varphi(d(z, y_{n-1}) - d(A, B)) \leq d(z, y_{n-1}) - d(A, B),$$

و در نتیجه  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(Tz, y_n) = d(A, B)$ . اکنون از آنجا که زوج  $(A, B)$  دارای خاصیت  $UC$  است داریم:  $Tz = z$ . فرض کنیم  $\bar{z} \in A$  نقطه ثابت دیگری از نگاشت  $T$  باشد در این صورت با استفاده از لم ۶ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(z, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(T^n z, y_n) = d(A, B) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(T^n \bar{z}, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\bar{z}, y_n),$$

اکنون از آنجا که زوج  $(A, B)$  دارای خاصیت  $UC$  است داریم:  $z = \bar{z}$ . □

لم ۸. فرض کنید  $(A, B)$  یک زوج از زیرمجموعه‌های غیر تهی فضای متریک  $(X, d)$  باشد که دارای خاصیت  $UC$  است. همچنین فرض کنید  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  یک انقباض غیر دوری میر-کیلر باشد. به ازای  $x_0 \in A$  و  $y_0 \in A$  دنباله‌های  $\{x_n\}$  در  $A$  و  $\{y_n\}$  در  $B$  را به صورت  $x_n := Tx_{n-1}$  و  $y_n := Ty_{n-1}$  تعریف کنید. در این صورت داریم:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} d(x_m, y_n) = d(A, B).$$

اثبات. بنابر لم ۶ داریم:  $\lim_{m \rightarrow \infty} d(x_m, y_m) = d(A, B)$  و  $\lim_{m \rightarrow \infty} d(x_{m+1}, y_m) = d(A, B)$ . لذا چون  $(A, B)$  دارای

خاصیت  $UC$  است  $\lim_{m \rightarrow \infty} d(x_m, x_{m+1}) = 0$ .

$\varepsilon > 0$  را دلخواه ولی ثابت در نظر بگیرید، بنابر تعریف  $L$ -تابع  $\varphi$  می‌توان  $\delta \in (0, \varepsilon)$  را به گونه‌ای انتخاب کرد که  $\varphi(\varepsilon + \delta) \leq \varepsilon$ . اکنون از لم ۶،  $L \in \mathbb{N}$  را به گونه‌ای انتخاب کنید که برای هر  $m \geq L$  داشته باشیم:

$$d(x_m, y_m) - d(A, B) < \varepsilon \quad (۳)$$

و

$$d(x_m, x_{m+1}) < \delta. \quad (۴)$$

عدد  $m \in \mathbb{N}$  که  $m \geq L$  را ثابت در نظر بگیرید، با روش استقراء ثابت می‌کنیم برای هر  $n \geq m$  داریم:

$$d(x_m, y_n) - d(A, B) < \varepsilon + \delta < 2\varepsilon. \quad (۵)$$

اگر  $n = m$  که رابطه (۵) بنابر رابطه (۳) برقرار است. فرض کنیم رابطه (۵) برای یک  $n \geq m$  برقرار باشد، در این صورت رابطه (۵) را برای  $n + 1$  به دست می‌آوریم. بنابر فرض استقراء و صعودی بودن  $\varphi$  داریم:

$$d(x_{m+1}, y_{n+1}) - d(A, B) \leq \varphi(d(x_m, y_n) - d(A, B)) \leq \varphi(\varepsilon + \delta) \leq \varepsilon. \quad (۶)$$

اکنون از روابط (۴) و (۶) نتیجه می‌گیریم

$$d(x_m, y_{n+1}) - d(A, B) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, y_{n+1}) - d(A, B) \leq \delta + \varepsilon < 2\varepsilon,$$

لذا رابطه (۵) برای  $n+1$  نیز برقرار است. □

**قضیه ۲.** فرض کنید  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه غیر تهی فضای متریک  $(X, d)$  باشند که  $(A, B)$  دارای خاصیت  $UC$  و  $A$  کامل باشد. فرض کنیم  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  یک انقباض غیر دوری میر-کیلر باشد. در این صورت  $T$  دارای نقطه ثابت یکتایی مانند  $z \in A$  است که به ازای هر  $x_0 \in A$  دنباله  $\{T^n x_0\}$  همگرا به آن می‌باشد. به علاوه اگر  $(B, A)$  دارای خاصیت  $UC$  و  $B$  نیز کامل باشد آنگاه  $T$  دارای نقطه ثابت یکتایی مانند  $u \in B$  است که به ازای هر  $y_0 \in B$  دنباله  $\{T^n y_0\}$  همگرا به آن است. همچنین  $d(z, u) = d(A, B)$ .

**اثبات.** فرض کنیم  $x_0$  نقطه دلخواهی از مجموعه  $A$  باشد. از لم ۴ و لم ۸ دنباله  $\{T^n x_0\}$  کشی و لذا چون  $A$  کامل است همگرا به نقطه‌ای مانند  $z \in A$  است که بنا بر لم ۷ تنها نقطه ثابت نگاشت  $T$  در مجموعه  $A$  است. به طور مشابه اگر  $(B, A)$  دارای خاصیت  $UC$  و  $B$  نیز کامل باشد آنگاه  $T$  دارای نقطه ثابت یکتایی مانند  $u \in B$  است که به ازای هر  $y_0 \in B$  دنباله  $\{T^n y_0\}$  همگرا به آن است. از طرفی بنا بر لم ۶ داریم: □  $d(z, u) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(T^n z, T^n u) = d(A, B)$ .

**مثال ۱.** تابع  $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  با ضابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^2 & t \leq 1, \\ 1 & t > 1. \end{cases}$$

به ازای هر  $s \in (0, +\infty)$  داریم:  $\varphi(s) > 0$ ، همچنین  $\varphi(0) = 0$  و از طرفی به ازای هر  $s \in (0, 1)$  با انتخاب عدد مثبت  $\delta = \sqrt{s} - s$  برای هر  $t \in [s, s + \delta]$  داریم:

$$\varphi(t) = t^2 \leq (s + \delta)^2 = (\sqrt{s})^2 = s.$$

و به ازای هر  $s \in [1, +\infty)$  با انتخاب  $\delta > 0$  دلخواه و هر  $t \in [s, s + \delta]$  بدیهی است که  $\varphi(t) = 1 \leq s$ . لذا  $\varphi$  یک  $L$ -تابع است. دو مجموعه  $A = [0, \frac{1}{2}]$  و  $B = [-\frac{1}{2}, 0]$  را به عنوان زیرمجموعه‌هایی از مجموعه اعداد حقیقی مجهز به متر اقلیدسی در نظر بگیرید. خودنگاشت غیر دوری  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$Tx = \begin{cases} x^2 & x \in A, \\ -x^2 & x \in B. \end{cases}$$

در این صورت به ازای هر  $(x, y) \in A \times B$  که  $d(x, y) > 0$  داریم:

$$x^2 + y^2 = d(Tx, Ty) < \varphi(d(x, y)) = (x - y)^2,$$

و برای هر  $(x, y) \in A \times B$  که  $d(x, y) = 0$  داریم:  $d(Tx, Ty) = 0$ . لذا بنابر گزاره ۱ نگاشت  $T$  یک انقباض غیر دوری میر-کیلر است. از طرفی  $d(A, B) = 0$  پس  $(A, B)$  دارای خاصیت  $UC$  است و در نتیجه تمام شرایط قضیه ۲ برقرار هستند.  $z = u = 0$  نقطه ثابت یکتای  $T$  در مجموعه‌های  $A$  و  $B$  است که در احکام این قضیه صدق می‌کند.

به عنوان یک کاربرد از قضیه ۲ نتیجه زیر که تعمیمی از قضیه ۲ از [۲] می باشد را داریم.

**نتیجه ۱.** فرض کنید  $(A, B)$  یک زوج از زیرمجموعه‌های غیر تهی فضای متریک  $(X, d)$  باشد که دارای خاصیت  $UC$  و  $A$  کامل باشد. همچنین فرض کنید  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  یک انقباض دوری میر-کیلر باشد. در این صورت  $T$  دارای بهترین نقطه تقریبی یکتایی مانند  $z \in A$  است که یک نقطه ثابت نگاشت  $T^\wedge$  است و به ازای هر  $x_0 \in A$  دنباله  $\{T^{2n}x_0\}$  همگرا به آن است.

**اثبات.** واضح است که نگاشت  $T^2$  یک انقباض غیر دوری میر-کیلر است لذا بنابر قضیه ۲ نگاشت  $T^2$  دارای نقطه ثابت یکتایی مانند  $z \in A$  است و به ازای هر  $x_0 \in A$  دنباله  $\{T^{2n}x_0\}$  همگرا به نقطه  $z$  است. از طرفی به وضوح شرایط لم ۵ برقرار هستند لذا  $z$  یک بهترین نقطه تقریبی  $T$  نیز است.  $\square$

در ادامه به عنوان کاربردی دیگر از قضیه ۲، درستی قضیه ۱ را برای یک انقباض غیر دوری به دست می‌آوریم.

**نتیجه ۲.** فرض کنید  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌هایی غیر تهی و محدب از یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب باشند و نگاشت  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  یک انقباض غیر دوری باشد یعنی عدد  $c \in (0, 1)$  موجود باشد به گونه‌ای که برای هر  $(x, y) \in A \times B$  داشته باشیم:

$$d(Tx, Ty) \leq cd(x, y) + (1-c)d(A, B).$$

در این صورت  $T$  دارای زوج یکتای بهینه‌ای از نقاط ثابت مانند  $(z, u) \in A \times B$  است که به ازای هر نقطه  $x_0 \in A$  دنباله  $\{T^n x_0\}$  همگرا به  $z$  و به ازای هر نقطه  $y_0 \in B$  دنباله  $\{T^n y_0\}$  همگرا به  $u$  است.

**اثبات.** تابع  $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  با ضابطه  $\varphi(x) = cx$  را در نظر بگیرید. بدیهی است که  $\varphi(0) = 0$  و به ازای هر  $s \in (0, +\infty)$  داریم  $\varphi(s) > 0$ ، از طرفی به ازای هر  $s \in (0, +\infty)$  با انتخاب عدد مثبت  $\delta = \frac{s - cs}{c}$  برای هر  $t \in [s, s + \delta]$  داریم:

$$\varphi(t) = ct \leq c(s + \delta) = c\left(s + \frac{s - cs}{c}\right) = s.$$

لذا  $\varphi$  یک  $L$ -تابع است. اکنون حکم از قضیه ۲ به دست می‌آید.  $\square$

فرض کنید  $A_1, A_2, \dots, A_p$  زیرمجموعه‌هایی غیر تهی از فضای متریک  $(X, d)$  باشند. در این صورت نگاشت  $T: \bigcup_{i=1}^p A_i \rightarrow \bigcup_{i=1}^p A_i$  یک نگاشت  $p$ -دوری نامیده می‌شود هرگاه برای هر  $1 \leq i \leq p$ ،  $T(A_i) \subseteq A_{i+1}$  که  $A_{p+1} = A_1$ .

همچنین یک نقطه  $z \in A_i$  بهترین نقطه تقریبی  $T$  در  $A_i$  نامیده می‌شود هرگاه  $d(z, Tz) = d(A_i, A_{i+1})$ .

**تعریف ۵.** فرض کنید  $A_1, A_2, \dots, A_p$  زیرمجموعه‌هایی ناتهی از فضای متریک  $(X, d)$  باشند. در این صورت نگاشت  $p$ -دوری  $T: \bigcup_{i=1}^p A_i \rightarrow \bigcup_{i=1}^p A_i$  یک انقباض  $p$ -دوری میر-کیلر نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر  $1 \leq i \leq p$  و هر  $\varepsilon > 0$ ، عددی مانند  $\delta > 0$  موجود باشد به گونه‌ای که به ازای هر  $(x_i, x_{i+1}) \in A_i \times A_{i+1}$  که  $d(x_i, x_{i+1}) < d(A_i, A_{i+1}) + \varepsilon + \delta$  داشته باشیم:  $d(Tx_i, Tx_{i+1}) < d(A_{i+1}, A_{i+2}) + \varepsilon$ .

به عنوان نتیجه دیگری از قضیه ۲، در ادامه تعمیمی از نتیجه ۱ برای نگاشت‌های  $p$ -دوری در یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب  $X$  ارائه می‌دهیم.

**نتیجه ۳.** فرض کنید  $A_1, A_2, \dots, A_p$  زیرمجموعه‌هایی ناتهی، بسته و محدب از فضای باناخ به طور یکنواخت محدب  $X$  باشند. همچنین فرض کنید  $T: \bigcup_{i=1}^p A_i \rightarrow \bigcup_{i=1}^p A_i$  یک انقباض  $p$ -دوری میر-کیلر باشد. در این صورت به ازای هر  $1 \leq i \leq p$  نگاشت  $T$  دارای بهترین نقطه تقریب یکتایی مانند  $z_i \in A_i$  است که یک نقطه ثابت نگاشت  $T^p$  است و به ازای هر  $x_0 \in A_i$  دنباله  $\{T^m x_0\}$  همگرا به نقطه  $z_i$  است.

**اثبات.** به ازای هر  $1 \leq i \leq p$  بدیهی است که نگاشت  $T^p$  یک انقباض غیر دوری میر-کیلر روی  $A_i \cup A_{i+1}$  و زوج  $(A_i, A_{i+1})$  دارای خاصیت  $UC$  است. لذا از قضیه ۲ کافی است ثابت کنیم  $z_i$  بهترین نقطه تقریبی  $T$  است. اگر  $d(z_i, Tz_i) \neq d(A, B)$  از گزاره ۱ داریم:

$$\begin{aligned} d(Tz_i, z_i) - d(A_i, A_{i+1}) &= d(T^{p+1}z_i, T^p z_i) - d(A_i, A_{i+1}) \\ &< \varphi(d(Tz_i, z_i) - d(A_i, A_{i+1})) \\ &\leq d(Tz_i, z_i) - d(A_i, A_{i+1}). \end{aligned}$$

این تناقض ایجاب می‌کند  $d(z_i, Tz_i) = d(A_i, A_{i+1})$ .  $\square$

فرض کنید  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌هایی غیر تهی از یک فضای متریک باشند. به ازای  $y \in B$  فرض کنیم:

$$P_A(y) = \{x \in A : d(x, y) = d(A, y)\}.$$

در ادامه بحث به بررسی شرایط وجود و یکتایی نقاط ثابت برای نگاشت‌های غیر دوری  $\psi$ -انقباضی می‌پردازیم. لم زیر برای به دست آوردن نتایج بعدی مفید خواهد بود.

لم ۹. فرض کنید  $A$  و  $B$  دو مجموعه غیر تهی از فضای متریک  $(X, d)$  باشند به طوری که زوج‌های  $(A, B)$  و  $(B, A)$  دارای خاصیت  $UC$  باشند. همچنین فرض کنید  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  یک نگاشت غیر دوری باشد که به ازای هر  $(x, y) \in A \times B$  که  $d(x, y) > d(A, B)$  داشته باشیم:

$$d(Tx, Ty) < d(x, y),$$

در این صورت برای هر  $(x, y) \in A \times B$  چنانچه  $d(x, y) = d(A, B)$  داریم:  $d(Tx, Ty) = d(A, B)$ .  
 اثبات. فرض کنیم  $x \in A$  و  $y \in B$  چنان باشند که  $d(x, y) = d(A, B)$ . در این صورت می‌توان دنباله‌های  $\{x_n\} \subseteq A$  و  $\{y_n\} \subseteq B$  را چنان انتخاب نمود که به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $d(x_n, y_n) \neq d(A, B)$ ،  $x_n \neq x$  و  $y_n \neq y$  و  $d(x_n, y_n) \rightarrow d(A, B)$ . در این صورت بنابر خاصیت  $UC$  بدیهی است که به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $d(x_n, y) \neq d(A, B)$ .  
 لذا

$$d(A, B) \leq d(Tx_n, Ty) < d(x_n, y),$$

در نتیجه

$$d(Tx_n, Ty) \rightarrow d(A, B). \quad (7)$$

از طرفی به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$

$$d(P_A(Ty), Ty) = d(A, Ty) \leq d(Tx_n, Ty),$$

لذا با حدگیری و استفاده از رابطه قبل داریم:

$$d(P_A(Ty), Ty) = d(A, B). \quad (8)$$

از ترکیب روابط (۷) و (۸) و استفاده از خاصیت  $UC$ ،  $P_A(Ty)$  مجموعه‌ای تک عضوی است و داریم:

$$Tx_n \rightarrow P_A(Ty). \quad (9)$$

به طور مشابه می‌توان ثابت کرد

$$d(P_B(Tx), Tx) = d(A, B), \quad (10)$$

و

$$Ty_n \rightarrow P_B(Tx). \quad (11)$$

از طرفی برای هر  $n \in \mathbb{N}$

$$d(A, B) \leq d(Tx_n, Ty_n) < d(x_n, y_n),$$

لذا  $d(Tx_n, Ty_n) \rightarrow d(A, B)$  در نتیجه از روابط (۹) و (۱۱) داریم:  $d(P_A(Ty), P_B(Tx)) = d(A, B)$ . در نتیجه با استفاده مجدد از خاصیت  $UC$  و استفاده از روابط (۸) و (۱۰) داریم:  $P_A(Ty) = Tx$  و  $P_B(Tx) = Ty$ . لذا  $d(Tx, Ty) = d(A, B)$  □

لم ۱۰. فرض کنید  $A$  و  $B$  دو مجموعه غیر تهی از فضای متریک  $(X, d)$  باشند به طوری که زوج‌های  $(A, B)$  و  $(B, A)$  دارای خاصیت  $UC$  باشند. همچنین فرض کنید  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  یک نگاشت غیر دوری باشد که به ازای هر  $(x, y) \in A \times B$  داشته باشیم:

$$d(Tx, Ty) - d(A, B) \leq \psi(d(x, y) - d(A, B)),$$

که در آن  $\psi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  یک تابع نیمه پیوسته بالایی از راست است که به ازای هر  $t > 0$  داریم:  $0 \leq \psi(t) < t$ . در این صورت برای هر  $(x, y) \in A \times B$  داریم:  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(T^n x, T^n y) = d(A, B)$ . اثبات. بنابر مفروضات واضح است که اگر  $d(x, y) > d(A, B)$  آنگاه  $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ . لذا بنابر لم ۹ برای هر  $(x, y) \in A \times B$  داریم:  $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ . فرض کنیم  $s_n := d(T^n x, T^n y) - d(A, B)$  در این صورت بنابر رابطه قبل همواره داریم:  $s_n \leq s_{n-1}$ . لذا دنباله حقیقی  $\{s_n\}$  یک دنباله نزولی از پایین کراندار و در نتیجه همگرا به یک مقدار  $s \geq 0$  می‌باشد. کافی است ثابت کنیم  $s = 0$ . از برهان خلف فرض کنیم  $s > 0$  لذا بنابر فرض داریم:  $\psi(s) < s$ . از طرفی به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  می‌دانیم  $s_n \leq \psi(s_{n-1})$  و در نتیجه چون  $\psi$  در نقطه  $s$  نیمه پیوسته بالایی از راست است داریم:

$$s = \limsup_n s_n \leq \limsup_n \psi(s_{n-1}) \leq \limsup_{t \rightarrow s^+} \psi(t) \leq \psi(s),$$

که این تناقض برهان را کامل می‌کند. □

قضیه ۳. اگر علاوه بر مفروضات لم ۱۰  $A$  و  $B$  کامل،  $(B, A)$  نیز دارای خاصیت  $UC$  و همچنین  $\psi(0) = 0$  باشد، آنگاه  $T$  دارای نقطه ثابت یکتایی مانند  $z \in A$  و نقطه ثابت یکتایی مانند  $u \in B$  است که به ازای هر  $x_0 \in A$  دنباله  $\{x_n\}$  با تعریف  $x_n := Tx_{n-1}$  همگرا به نقطه  $z$  و به ازای هر  $y_0 \in B$  دنباله  $\{y_n\}$  با تعریف  $y_n := Ty_{n-1}$  همگرا به نقطه  $u$  است. همچنین  $d(z, u) = d(A, B)$ .

اثبات. از لم ۱۰ داریم:  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(A, B)$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, y_n) = d(A, B)$  اما  $(A, B)$  دارای خاصیت  $UC$  است

لذا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0. \quad (۲)$$

به طور مشابه ثابت می‌شود

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, y_{n+1}) = 0. \quad (۱۳)$$

ثابت می‌کنیم به ازای هر  $\varepsilon > 0$  عدد  $N_0 \in \mathbb{N}$  موجود است به گونه‌ای که به ازای هر  $m, n \in \mathbb{N}$  که  $m > n \geq N_0$  داریم:

$$d(x_m, y_n) \leq d(A, B) + \varepsilon.$$

از برهان خلف فرض کنیم  $\varepsilon > 0$  وجود دارد به گونه‌ای که به ازای هر  $k \in \mathbb{N}$  اعداد  $m_k$  و  $n_k$  که  $m_k > n_k \geq k$  وجود دارند به گونه‌ای که

$$d(x_{m_k}, y_{n_k}) > d(A, B) + \varepsilon. \quad (۱۴)$$

همچنین  $m_k$  را می‌توان کوچکترین عدد طبیعی بزرگتر از  $n_k$  انتخاب کرد که رابطه (۱۴) برقرار باشد و همچنین

$$d(x_{m_k-1}, y_{n_k}) \leq d(A, B) + \varepsilon.$$

در این صورت داریم:

$$d(A, B) + \varepsilon < d(x_{m_k}, y_{n_k}) \leq d(x_{m_k}, x_{m_k-1}) + d(x_{m_k-1}, y_{n_k}) \leq d(x_{m_k}, x_{m_k-1}) + d(A, B) + \varepsilon,$$

لذا بنابر رابطه (۲) داریم:

$$d(x_{m_k}, y_{n_k}) \rightarrow d(A, B) + \varepsilon. \quad (۱۵)$$

اما از طرف دیگر

$$\begin{aligned} d(x_{m_k}, y_{n_k}) &\leq d(x_{m_k}, x_{m_k+1}) + d(x_{m_k+1}, y_{n_k+1}) + d(y_{n_k+1}, y_{n_k}) \\ &\leq d(x_{m_k}, x_{m_k+1}) + \psi(d(x_{m_k}, y_{n_k}) - d(A, B)) + d(A, B) + d(y_{n_k+1}, y_{n_k}). \end{aligned}$$

با گرفتن  $\limsup$  از طرفین رابطه بالا و استفاده از روابط (۲)، (۱۳) و (۱۵) به دست می‌آوریم  $\varepsilon \leq \psi(\varepsilon)$ ، این تناقض

ادعای ما را ثابت می‌کند. لذا می‌توان نتیجه گرفت

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_m, y_n) = d(A, B),$$

و در نتیجه بنابر لم ۴،  $\{x_n\}$  دنباله‌ای کشی و چون  $A$  کامل است همگرا به نقطه‌ای مانند  $z \in A$  است. به طور مشابه می‌توان ثابت کرد  $\{y_n\}$  دنباله‌ای کشی و چون  $B$  کامل است همگرا به نقطه‌ای مانند  $u \in B$  است. اما

$$d(z, u) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(A, B). \quad (۱۶)$$

از طرفی اگر  $t := d(Tz, u) - d(A, B)$  آنگاه

$$\begin{aligned} t = d(Tz, u) - d(A, B) &\leq \limsup_n (d(Tz, T^n y_0) - d(A, B)) \\ &\leq \limsup_n \psi(d(z, T^{n-1} y_0) - d(A, B)). \end{aligned}$$

لذا در نتیجه  $d(Tz, u) = d(A, B)$ . این رابطه به همراه رابطه (۱۶) و اینکه  $(A, B)$  دارای خاصیت  $UC$  است ایجاب می‌کند که  $Tz = z$ . اگر فرض کنیم  $\bar{z} \in A$  نقطه ثابت دیگری از نگاشت  $T$  باشد در این صورت بنابر لم ۹ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(T^n z, y_n) = d(A, B) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(T^n \bar{z}, y_n),$$

اکنون از آنجا که زوج  $(A, B)$  دارای خاصیت  $UC$  است داریم:  $z = \bar{z}$ . به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که  $u$  تنها نقطه ثابت  $T$  در  $B$  است. □

به عنوان نتیجه ای از قضیه ۳، می‌توان به قضیه ۵.۳ از [۶] اشاره کرد.

**مثال ۲.** تابع  $\psi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  را با ضابطه زیر در نظر بگیرید:

$$\psi(t) = \begin{cases} t^2 & t \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}t & t > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

دو مجموعه  $A = [0, \frac{1}{4}]$  و  $B = [-\frac{1}{4}, 0]$  را به عنوان زیر مجموعه‌هایی از مجموعه اعداد حقیقی مجهز به متر اقلیدسی در نظر بگیرید. خودنگاشت غیر دوری  $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$  را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$Tx = \begin{cases} x^2 & x \in A, \\ -x^2 & x \in B. \end{cases}$$

در این صورت به ازای هر  $(x, y) \in A \times B$  داریم:

$$x^2 + y^2 = d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y)) = (x - y)^2.$$

به سادگی می‌توان بررسی کرد که  $\psi$ ،  $T$ ،  $A$  و  $B$  در شرایط قضیه ۳ صدق می‌کنند و  $z = u = 0$  نقطه ثابت یکتای مجموعه‌های  $A$  و  $B$  است که در احکام این قضیه صدق می‌کند.

## References

1. Aydi H., Lakzian H., Mitrović Z.D., Radenović S., "Best Proximity Points of  $MT$ -Cyclic Contractions with Property UC", Numer. Funct. Anal. Optim., 41(7) (2020) 871-882.
2. Di Bari C., Suzuki T., Vetro C., "Best proximity points for cyclic Meir-Keeler contractions", Nonlinear Analysis, 69(11) (2008) 3790-3794.
3. Eldred A. A., Kirk W. A., Veeramani, P., "Proximal normal structure and relatively nonexpansive mappings", Studia Math., 171(3) (2005) 283-293.
4. Eldred A. A., Veeramani P., "Existence and convergence of best proximity points", J. Math. Anal. Appl., 323(2) (2006) 1001-1006.
5. Fallahi K., Ghahramani H., Soleimani-Rad, Gh., "Integral type contractions in partially ordered metric spaces and best proximity point", Iran J Sci Technol Trans Sci., 44 (2020) 177-183.
6. Felicit J. M., Eldred A. A., "Best proximity points for cyclical contractive mappings", Appl. Gen. Topol., 16(2) (2015) 119-126.
7. Fernández León A., Gabeleh M., "Best proximity pair theorems for noncyclic mappings in Banach and metric spaces", Fixed Point Theory, 17(1) (2016) 63-84.
8. Gabeleh M., Maria Felicit J., Anthony Eldred A., "Edelstein's theorem for cyclic contractive mappings in strictly convex Banach spaces", Numer. Funct. Anal. Optim., <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/01630563.2020.1737114>.
9. Lim T.C., "On characterizations of Meir-Keeler contractive maps", Nonlinear Analysis, 46(1) (2001) 113-120.

10. Meir A., Keeler E., "A theorem on contraction mappings", *J. Math. Anal. Appl.*, 28(2) (1969) 326-329.
11. Safari-Hafshejani A., Amini-Harandi A., Fakhar F., "Best proximity points and fixed points results for noncyclic and cyclic Fisher quasi-contractions", *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 40(5) (2019) 603-619.
12. Suzuki T., "Some notes on Meir-Keeler contractions and L-functions", *Bull. Kyushu Inst. Technol. Pure Appl. Math.*, (53) (2006) 1-13.
13. Suzuki T., Kikkawa M., Vetro C., "The existence of best proximity points in metric spaces with the property UC", *Nonlinear Analysis*, 71(7) (2009) 2918-2926.