عملگرهای پوچ دوگانه و بررسی قضیهٔ بیرکهوف در فضاهای گسسته از نوع l^p

علی بیاتی اشکفتکی
دانشگاه شهرکرد، گروه ریاضی

دریافت ۹۶/۱۱/۰۶ پذیرش ۹۷/۱۰/۲۴

چکیده

ماتریس‌های تصادفی دوگانه نقشی اساسی در نظریه احاطه‌سازی در ابعاد متناهی دارند. قضیهٔ بیرکهوف رابطهٔ میان ماتریس‌های تصادفی دوگانه و جای‌گشت‌های $n \times n$ را بیان می‌کند. این ماتریس‌ها در ابعاد نامتناهی به عملگرهای تصادفی دوگانه و جای‌گشت‌های روی فضاهای $l^p(I)$ گسترش می‌یابند. در این مقاله ابتدا عملگرهای پوچ دوگانه را معرفی کرده و خواص مهمی از آنها را بررسی می‌کنیم. سپس به‌کمک عملگرهای پوچ دوگانه قضیهٔ بیرکهوف را در ابعاد نامتناهی بررسی کنیم.

واژه‌های کلیدی: عملگر تصادفی دوگانه، عملگر پوچ دوگانه، قضیه بیرکهوف، نقاط لبه‌ای.
رده‌بندی ریاضی(۲۰۱۰): 47B37, 15B48, 15B51.

مقدمه

فرض کنیم A یک ماتریس $m \times n$ باشد. ماتریس A را نامنفی می‌گوییم هر گاه همهٔ درایه‌های آن نامنفی باشند. ماتریس نامنفی A را تصادفی سطری (ستونی)[1] گوییم هر گاه مجموع درایه‌های هر سطر (ستون) A برابر با یک باشد. واضح است تنها ماتریس‌های مربعی می‌توانند هم تصادفی سطری و هم تصادفی ستونی باشند. ماتریس نامنفی و مربعی D را تصادفی دوگانه[2] می‌نامیم هر گاه هم تصادفی سطری و هم تصادفی ستونی باشد. این نمونه از ماتریس‌ها علاوه بر نظریه ماتریس‌ها در زمینه‌های متعددی از جمله تجزیهٔ ترکیبیاتی، بررسی نامساوی‌ها، توابع شور-محدب[3]، احتمال و فرایندهای تصادفی نقش دارند. به‌عنوان مثال [۱] حاوی اطلاعات جامعی در مورد این مباحث است. نوع خاصی از ماتریس‌های تصادفی دوگانه ماتریس‌های جای‌گشت[4] هستند. یک ماتریس جای‌گشت ماتریسی است که در هر سطر و ستون آن دقیقاً یک بار عدد یک ظاهر شده باشد و بقیهٔ درایه‌ها صفر باشند. ماتریس‌های تصادفی دوگانه یک مجموعهٔ محدب در فضای ماتریس‌های مربعی هستند.

---

*نویسنده مسئول bayati.ali@sku.ac.ir

1. Row (column) stochastic
2. Doubly stochastic
3. Schur-convex
4. Permutation

بیرکهوف [۲] نشان داد که ماتریس‌های تصادفی دوگانه پوش محدب ماتریس‌های جای‌گشت هستند. علاوه بر این ماتریس‌های جای‌گشت نقاط لبه‌ای[۱] مجموعه ماتریس‌های تصادفی دوگانه هستند. این مسئله در ابعاد نامتناهی به‌صورت‌های مختلفی مطرح می‌شود. بیرکهوف سپس یک پرسش کلی در مورد چگونگی و درستی توسیع قضیهٔ قبل در ابعاد نامتناهی مطرح کرد [۳]. بعدها این پرسش به مسئلهٔ ۱۱۱ بیرکهوف[۲] مشهور شد. این مسئله تا کنون در فضاهای مختلف و به‌صورت‌های متنوعی بررسی شده است. به‌عنوان مثال ایزبل [۴] فضای خاصی از ماتریس‌های از مرتبه شمارای نامتناهی با نام ماتریس‌های خطی-جمع‌پذیر کراندار[۳] را معرفی کرده سپس نشان داد در این فضا پوش محدب ماتریس‌های جای‌گشت برابر با مجموعه ماتریس‌های تصادفی دوگانه نیست و در واقع فقط یک زیرمجموعه اکید از آن است. ایزبل پوش محدب مجموعه جای‌گشت‌ها را تعیین کرد. سپس کندال [۵] توپولوژی خاصی معرفی کرد و نشان داد که تحت این توپولوژی بستار پوش محدب جای‌گشت‌ها دقیقاً برابر با مجموعه همهٔ ماتریس‌های تصادفی دوگانه است. کندال هم‌چنین نشان داد که جای‌گشت‌ها برابر با نقاط لبه‌ای ماتریس‌های تصادفی دوگانه هستند. بنابراین مسئله ۱۱۱ بیرکهوف جواب مثبتی در فضای ماتریس‌های خطی- جمع‌پذیر کراندار در بعد شمارای نامتناهی دارد.

البته قضیهٔ بیرکهوف توسیع‌های دیگری هم دارد. به‌عنوان مثال سبورو و شهیدی [۶] مسئله بیرکهوف را در فضای ماتریس‌های سه-تصادفی، گانیخدزی و شهیدی [۷] برای عملگرهای مربعی، و هم‌چنین سفارو [۸]، [۹] برای عملگرهای چندبعدی و هم‌چنین خانواده‌ای شمارش‌پذیر از فضاهای احتمال گسسته (با اشتراک ناتهی) بررسی کرده‌اند.

بهرامی، بیاتی و منجگانی [۱۰] به‌منظور بررسی احاطه‌سازی[۴] و عملگرهای خطی و پیوسته حافظ این رابطه در فضاهای $l^p(I)$، عملگرهای تصادفی دوگانه و جای‌گشت‌ها را در این دسته از فضاها تعریف کردند. این عملگرها تعمیمی طبیعی از ماتریس‌های تصادفی دوگانه و ماتریس‌های جای‌گشت هستند. برای اطلاعات بیش‌تر در این زمینه و نحوه توسیع آنها به عملگرهای زیرتصادفی می‌توان به منابع [۱۰]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۳] مراجعه کرد. چنین عملگرهایی فضای مناسبی برای پرداختن به مسئله ۱۱۱ بیرکهوف را در اختیار قرار می‌دهند. چنانچه در ادامه این بخش می‌بینیم هر عملگر خطی و پیوسته روی $l^p(I)$ ماتریس نظیری به‌صورت $[a_{ij}]_{i,j\in I}$ دارد. بنابراین فضای مورد بحث در این مقاله گسترده‌تر از فضاهای متناهی و هم‌چنین فضای ماتریس‌های خطی-جمع‌پذیر کراندار است زیرا در واقع فضایی از ماتریس‌های از مرتبه $I\times I$ است که I یک مجموعهٔ ناتهی دلخواه است.

اگر $\{\alpha_i ; i\in I\}$ گردایه‌ای از اعداد نامنفی باشد، قرار می‌دهیم

$$\sum_{i\in I}\alpha_i=\sup\{\sum_{i\in F}\alpha_i ;\ \text{متناهی است}\ F\subseteq I\},$$

و به آن مجموع این گردایه می‌گوییم. به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که اگر $\sum_{i\in I}\alpha_i<\infty$ آن‌گاه حداکثر تعداد شمارش‌پذیری از α_iها اکیداً مثبت هستند. هم‌چنین اگر $\{\beta_i ; i\in I\}$ گردایه‌ای از اعداد حقیقی باشد و $I^{+}=\{i\in I;\beta_i>0\}$ و $I^{-}=\{ i\in I; \beta_i$، آن‌گاه به‌شرطی‌که $\sum_{i\in I}|\beta_i|>0$ قرار می‌دهیم $\sum_{i\in I}\beta_i=\sum_{i\in I^{+}}\beta_i+\sum_{i\in I^{-}}\beta_i$.

1. Extreme points
2. Birkhoff's Problem 111
3. Boundedly line- summable
4. Majorization

در سراسر این مقاله فرض می‌کنیم I یک مجموعه ناتهی باشد و $1 \le p < \infty$. فضای $l^p(I)$ را متشکل از همه توابع $f : I \to \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم که برای آنها $\sum_{i \in I} |f(i)|^p < \infty$. این فضا با قرار دادن $\|f\|_p = (\sum_{i \in I} |f(i)|^p)^{\frac{1}{p}}$ به یک فضای باناخ تبدیل می‌شود. همچنین برای هر $i \in I$، $e_i : I \to \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $e_i(j) = \delta_{ij}$ در نظر می‌گیریم که در این‌جا δ_{ij} دلتای کرونکر[1] است.

عملگر $T : l^p(I) \to l^p(I)$ را مثبت گوییم هرگاه به‌ازای هر $f \in l^p(I)$ که $f \ge 0$ داشته باشیم $Tf \ge 0$.

برای عملگر خطی و پیوسته $T : l^p(I) \to l^p(I)$ و هر $i, j \in I$ قرار می‌دهیم $t_{ij} = Te_j(i)$ و ماتریس (متناهی یا نامتناهی) $[T] = [t_{ij}]$ را ماتریس نظیر T می‌گوییم. به سادگی می‌توان بررسی کرد که اگر $f \in l^p(I)$ و $i \in I$ آن‌گاه $\sum_{j \in I} t_{ij} f(j)$ همگرا است و در ضمن $(Tf)(i) = \sum_{j \in I} t_{ij} f(j)$.

تعریف بعد مفهوم ماتریس‌های تصادفی دوگانه و ماتریس‌های جای‌گشت را (که می‌توانند به‌عنوان عملگرهایی روی $\mathbb{R}^n$ لحاظ شوند) به فضاهای از نوع $l^p(I)$ تعمیم می‌دهد.

تعریف ۱. [۱۰]، عملگرخطی، پیوسته و مثبت $T : l^p(I) \to l^p(I)$ را

الف) تصادفی دوگانه می‌نامیم هرگاه

$$\forall i \in I, \ \sum_{j \in I} Te_j(i) = 1, \qquad \forall j \in I, \ \sum_{i \in I} Te_j(i) = 1$$

ب) جای‌گشت می‌گوییم هرگاه نگاشت دوسویی $\theta : I \to I$ وجود داشته باشد که به ازای هر $j \in I$ داشته باشیم $Te_j = e_{\theta(j)}$.

به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که هر جای‌گشت یک عملگر طولپا روی فضای $l^p(I)$ است. همچنین هر جای‌گشت یک عملگر تصادفی دوگانه است.

قضیهٔ ۲. [۱۰]، فرض کنیم $\{d_{ij} ; i, j \in I\}$ گردایه‌ای از اعداد نامنفی باشند که

$$\forall i \in I, \sum_{j \in I} d_{ij} = 1. \quad \text{و} \quad \forall j \in I, \sum_{i \in I} d_{ij} = 1$$

در این‌صورت عملگر تصادفی دوگانه یکتای $D : l^p(I) \to l^p(I)$ وجود دارد که $[D] = [d_{ij}]$.

در ادامه این مقاله از نمادگذاری‌های زیر استفاده می‌کنیم.

$$\mathcal{DS} = \{D : l^p(I) \to l^p(I);\ \text{یک عملگر تصادفی دوگانه باشد.}\ D\}$$

$$\mathcal{P} = \{P : l^p(I) \to l^p(I);\ \text{یک جایگشت باشد.}\ P\}$$

همچنین در فضای برداری X برای $A \subseteq X$، کوچک‌ترین مجموعه محدب شامل A را پوش محدب مجموعه A می‌نامیم و با $\mathrm{co}(A)$ نمایش می‌دهیم.

---
1. Kroneker's delta

عملگرهای پوچ دوگانه در فضای $l^p(I)$

در این بخش دسته خاصی از عملگرها روی فضای $l^p(I)$ را معرفی می‌کنیم که بر مبنای آنها می‌توان نقاط لبه‌ای مجموعه $\mathcal{DS}$ را توصیف کرد.

تعریف ۳. عملگر $T: l^p(I) \to l^p(I)$ را یک عملگر پوچ دوگانه می‌نامیم هرگاه هر سطر و ستون از ماتریس نظیر T به‌طور یکنواخت در $l^1(I)$ قرار داشته باشد. به‌علاوه مجموع هر سطر و هر ستون از T برابر با صفر باشد. مجموعه همه عملگرهای پوچ دوگانه روی فضای $l^p(I)$ را با $\mathcal{D}_0$ نشان می‌دهیم.

در این‌جا ابتدا مثالی از یک عملگر پوچ دوگانه معرفی کرده، سپس به بررسی خواص مهمی از این عملگرها می‌پردازیم.

مثال ۱. فرض کنیم به‌ازای هر $f = (f_1, f_2, f_3, \ldots) \in l^p$ عملگر $T: l^p \to l^p$ با ضابطهٔ

$$Tf = (f_1 - f_2, -f_1 + f_3, f_2 - f_4, -f_3 + f_5, f_4 - f_6, -f_5 + f_7, \ldots)$$

تعریف شده باشد. با توجه به روابط

$$\|Tf\|^p = |f_1 - f_2|^p + \sum_{i=1}^{\infty} |f_i - f_{i+2}|^p \le 2^{p-1}\left(|f_1|^p + |f_2|^p\right) + 2^{p-1}\sum_{i=1}^{\infty}\left(|f_i|^p + |f_{i+2}|^p\right)$$
$$= 2^p \sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^p = 2^p \|f\|^p,$$

T خوش تعریف است و چون T خطی است، با استفاده مجدد از این روابط داریم $\|Tf\| \le 2\|f\|$. بنابراین T پیوسته است.

از طرفی به‌کمک ضابطهٔ T داریم $Te_1 = e_1 - e_2$ و برای هر $k \ge 2$، $Te_k = (-1)^k (e_{k+2} - e_k)$. بنابراین نمایش ماتریسی T عبارت است از

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

اما چون نرم-یک هر سطر و هر ستون در این ماتریس برابر با مقدار ثابت $M = 2$ است، پس همهٔ سطرها و ستون‌های T به‌طور یکنواخت در $l^1 = l^1(\mathbb{N})$ قرار می‌گیرند. این مطلب نشان می‌دهد که T یک عملگر پوچ دوگانه است.

لازم به ذکر است که برای یک عملگر خطی و پیوسته روی $l^p(I)$ این امکان ممکن وجود دارد که مجموع سطرها و همین‌طور مجموع همه ستون‌های ماتریس نظیر آن برابر با صفر باشد بدون این‌که سطرها یا ستون‌های این عملگر به‌طور یکنواخت در $l^1(I)$ قرار داشته باشند. در ادامه مثالی از این نوع می‌آوریم.

مثال ۲. عملگر $T: l^1 \to l^1$ را با ضابطهٔ

$$Tf = (f_1 - f_2, -f_1 + f_2, f_3 - f_4 + f_5 - f_6, -f_3 + f_4 - f_5 + f_6, f_7 - f_8 + f_9 - f_{10} + f_{11} - f_{12}, -f_7 + f_8 - f_9 + f_{10} - f_{11} + f_{12}, \ldots)$$

به‌ازای هر $f = (f_1, f_2, f_3, \cdots) \in l^1$ در نظر می‌گیریم. ابتدا توجه می‌کنیم که

$$\|Tf\| = 2|f_1 - f_2| + 2|f_3 - f_4 + f_5 - f_6| + 2|f_7 - f_8 + f_9 - f_{10} + f_{11} - f_{12}| + \cdots \leq 2\|f\|.$$

بنابر ضابطهٔ عملگر T و با توجه به روابط قبل T خوش‌تعریف، خطی و پیوسته است. این عملگر دارای ماتریس نظیری بدین‌صورت است:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

چنان‌که دیده می‌شود در ماتریس نظیر این عملگر مجموع درایه‌های هر سطر و ستون صفر است. هم‌چنین هر سطر و هر ستون در فضای l^1 قرار دارد. این در حالی است که سطرهای این عملگر به‌طور یک‌نواخت در l^1 قرارنمی‌گیرند.

در ادامه این بخش خواصی از عملگرهای پوچ دوگانه را بررسی می‌کنیم.

قضیهٔ ۴. $\mathcal{D}_0$ یک زیرفضای $\mathrm{B}(l^p(I))$، مجموعه عملگرهای خطی و کراندار روی $l^p(I)$ است. به‌علاوه این زیرفضا نسبت به ترکیب بسته است.

اثبات: با یک بررسی ساده معلوم می‌شود که $\mathcal{D}_0$ زیرفضای $\mathrm{B}(l^p(I))$ است. نشان می‌دهیم این زیرفضا نسبت به‌ترکیب عملگرها بسته است. فرض کنیم $A, B \in \mathcal{D}_0$. هم‌چنین فرض کنیم $[A] = [a_{ij}]$، $[B] = [b_{ij}]$ و $[AB] = [c_{ij}]$. نشان می‌دهیم $AB \in \mathcal{D}_0$. برای این منظور فرض کنیم α و β به‌ترتیب کران‌هایی برای نرم-یک سطر و ستون‌های $[A]$ و $[B]$ باشند.

اما به‌ازای هر $i, j \in I$ داریم $c_{ij} = \sum_{k \in I} a_{ik} b_{kj}$. بنابراین باتوجه به قضیهٔ فوبینی

$$\sum_{i \in I} |c_{ij}| = \sum_{i \in I} \Big|\sum_{k \in I} a_{ik} b_{kj}\Big| \leq \sum_{i \in I}\sum_{k \in I} |a_{ik} b_{kj}| = \sum_{k \in I}\sum_{i \in I} |a_{ik} b_{kj}| = \sum_{k \in I} |b_{kj}| \sum_{i \in I} |a_{ik}| \leq \alpha \sum_{k \in I} |b_{kj}| \leq \alpha\beta.$$

هم‌چنین به طریق مشابه داریم $\sum_{j \in I} |c_{ij}| \leq \alpha\beta$.

بنابراین سطر و ستون‌های $[AB] = [c_{ij}]$ به‌طور یکنواخت در $l^1(I)$ قرار دارند. از طرف دیگر با توجه به این‌که در سری‌های زیر حداکثر تعداد شمارش‌پذیری از جملات غیرصفر هستند، پس می‌توان از قضیهٔ فوبینی استفاده کرد و در این‌صورت داریم

$$\sum_{i \in I} c_{ij} = \sum_{i \in I}\sum_{k \in I} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k \in I}\sum_{i \in I} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k \in I} b_{kj} \sum_{i \in I} a_{ik} = 0.$$

به طریق مشابه $\sum_{j \in I} c_{ij} = 0$. پس $AB \in \mathcal{D}_0$ و اثبات قضیه کامل می‌شود.

قضیهٔ ۵. تفاضل هر دو عملگر تصادفی دوگانه یک عملگر پوچ دوگانه است.

اثبات: فرض کنیم $D_1, D_2 \in \mathcal{DS}$ به‌ترتیب دارای ماتریس‌های نظیر $[a_{ij}]$ و $[b_{ij}]$ باشند. آن‌گاه داریم

$$\sum_{i\in I}|a_{ij}-b_{ij}|\le\sum_{i\in I}|a_{ij}|+\sum_{i\in I}|b_{ij}|=\sum_{i\in I}a_{ij}+\sum_{i\in I}b_{ij}=2.$$

به‌همین ترتیب $\sum_{j\in I}|a_{ij}-b_{ij}|\le 2$. پس سطرها و ستون‌های D_1-D_2 به‌طور یکنواخت در $l^1(I)$ قرار می‌گیرند. هم‌چنین به‌سادگی داریم $\forall i\in I,\ \sum_{j\in I}(a_{ij}-b_{ij})=0$ و $\forall j\in I,\ \sum_{i\in I}(a_{ij}-b_{ij})=0$. پس $D_1-D_2\in\mathcal{D}_0$.

تذکر ۱. به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که برای یک عملگر پوچ دوگانه مانند $T:l^p(I)\to l^p(I)$ با ماتریس نظیر $[T]=[t_{ij}]$ است. این عملگر $[t_{ji}]$، ماتریس نظیر یک عملگر(خطی و پیوسته) یکتا مانند $T^t:l^p(I)\to l^p(I)$ یکتا را ترانهاده[1] عملگر T می‌نامیم و با T^t نمایش می‌دهیم. این مفهوم از ترانهاده در حالتی که I متناهی باشد (یا به‌طور معادل حالتی که $\dim l^p(I)<\infty$) با مفهوم ترانهاده یک ماتریس مطابقت دارد. از این تعریف به‌سادگی داریم $(T^t)^t=T$ و این‌که عملگرهای پوچ دوگانه نسبت به عمل ترانهاده بسته هستند. در واقع $T\in\mathcal{D}_0$ اگر و تنها اگر $T^t\in\mathcal{D}_0$.

رابطهٔ جای‌گشت‌ها و عملگرهای تصادفی دوگانه

در این بخش ابتدا قضیه بیرکهوف را در مورد ماتریس‌ها آورده، سپس به بررسی درستی این قضیه در مورد عملگرهای تصادفی دوگانه در فضاهای $l^p(I)$ خواهیم پرداخت.

قضیهٔ ۶. (بیرکهوف) [۱]، نقاط لبه‌ای مجموعه ماتریس‌های تصادفی دوگانه دقیقاً برابر با مجموعه ماتریس‌های جای‌گشت هستند. به‌علاوه پوش محدب ماتریس‌های جای‌گشت برابر با ماتریس‌های تصادفی دوگانه است.

اگر ادعای قضیهٔ بیرکهوف در مورد فضاهای $l^p(I)$ هم درست باشد، آن‌گاه باید داشته باشیم $\mathrm{co}(\mathcal{P})=\mathcal{DS}$. در قضیهٔ ۷ نشان می‌دهیم این مطلب درست نیست. در واقع تنها می‌توانیم نشان دهیم $\mathrm{co}(\mathcal{P})\subseteq\mathcal{DS}$.

قضیهٔ ۷. در فضای $l^p(I)$ داریم $\mathrm{co}(\mathcal{P})\subseteq\mathcal{DS}$. در ضمن تساوی تنها زمانی برقرار است که I متناهی باشد.

اثبات: چون هر جای‌گشت یک عملگر تصادفی دوگانه است پس $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{DS}$. اما $\mathcal{DS}$ یک مجموعه محدب است. بنابراین $\mathrm{co}(\mathcal{P})\subseteq\mathcal{DS}$.

برای اثبات قسمت دوم قضیه، اگر $I=\{i_1,\dots i_n\}$ یک مجموعه متناهی باشد، آن‌گاه نگاشت $\theta:l^p(I)\to\mathbb{R}^n$ که با ضابطهٔ $\theta(f)=(f(i_1),\dots,f(i_n))$ به‌ازای هر $f\in l^p(I)$ تعریف شده است، یک نگاشت خطی و دوسویی است. حال اگر $D:l^p(I)\to l^p(I)$ یک نگاشت خطی باشد، آن‌گاه چون θ خطی است $\theta D\theta^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ هم یک نگاشت خطی خواهد شد و به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که ماتریس نظیر عملگر D با ماتریس متناظر با نگاشت $\theta D\theta^{-1}$(در پایه استاندارد) یکسان است. به‌عبارت دیگر $[D]=[\theta D\theta^{-1}]$. این مطلب نشان می‌دهد $D:l^p(I)\to l^p(I)$ یک عملگر تصادفی دوگانه (جای‌گشت) است، اگر و تنها اگر ماتریس نظیر $\theta D\theta^{-1}$ یک ماتریس تصادفی دوگانه (جایگشت) باشد. حال فرض کنیم $D\in\mathcal{DS}$. در این‌صورت بنا به قضیه بیرکهوف می‌توان نگاشت‌های جای‌گشت $P_1,\dots,P_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ و اعداد نامنفی $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ با شرط $\sum_{i=1}^{k}\lambda_k=1$ را یافت به-

---

1. Transpose

طوری‌که $\theta D\theta^{-1}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i P_i$. بنابراین $D=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \theta^{-1}P_i\theta$. ولی چون $\theta^{-1}P_i\theta$ها، همگی جای‌گشت‌هایی روی $l^p(I)$ هستند، پس $D=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \theta^{-1}P_i\theta\in \mathrm{co}(\mathcal{P})$. تا اینجا معلوم می‌شود که اگر I یک مجموعه متناهی باشد، آن‌گاه $\mathcal{DS}\subseteq \mathrm{co}(\mathcal{P})$. از طرفی چون همواره داریم $\mathrm{co}(\mathcal{P})\subseteq \mathcal{DS}$، پس $\mathcal{DS}=\mathrm{co}(\mathcal{P})$.

برعکس، فرض کنیم $\mathcal{DS}=\mathrm{co}(\mathcal{P})$. نشان می‌دهیم I یک مجموعه متناهی است. با برهان خلف فرض کنیم I نامتناهی باشد. در ادامه برای رسیدن به تناقض، عملگر تصادفی دوگانه D را چنان می‌یابیم که $D\in \mathcal{DS}-\mathrm{co}(\mathcal{P})$. برای این منظور فرض کنیم $A=\{i_1,i_2,\ldots\}\subseteq I$ یک زیرمجموعه شمارای نامتناهی I باشد و $B=I-A$. هم‌چنین به‌ازای هر $i,j\in I$ قرار می‌دهیم

$$d_{ij}=\begin{cases}\frac{1}{2^n} & i,j\in A, i=i_1, j=i_n, n>1\\ \frac{1}{2^m} & i,j\in A, i=i_m, j=i_1, m>1\\ 1-\frac{1}{2^n} & i,j\in A, i=j=i_n\\ 1 & i,j\in B, i=j\\ 0 & \text{در غیر این‌صورت}\end{cases}$$

یک بررسی نسبتاً ساده نشان می‌دهد

$$\forall i\in I,\sum_{j\in I}d_{ij}=1 \qquad \text{و} \qquad \forall j\in I,\sum_{i\in I}d_{ij}=1.$$

بنابراین طبق قضیهٔ ۲ عملگر $D\in\mathcal{DS}$ وجود دارد که $[D]=[d_{ij}]$. نشان می‌دهیم $D\not\in \mathrm{co}(\mathcal{P})$. زیرا اگر $D=\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_kP_k$ آن‌گاه در سطر $i=i_1$ از ماتریس نظیر D بینهایت درایه غیرصفر وجود دارد در حالی که در سطر $i=i_1$ از ماتریس نظیر $\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_kP_k$ حداکثر k درایه غیرصفر وجود دارد. پس $D\neq\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_kP_k$. این تناقض نشان می‌دهد $D\not\in \mathrm{co}(\mathcal{P})$.

اکنون قسمت دیگر قضیه بیرکهوف را در مورد نقاط لبه‌ای مجموعه $\mathcal{DS}$ بررسی می‌کنیم. این بحث را با یک مثال شروع می‌کنیم. برای این منظور لم زیر مورد نیاز است.

لم ۸. فرض کنیم عملگر $D\in\mathcal{DS}$ دارای ماتریس نظیر $[d_{ij}]$ باشد. در این‌صورت D یک جای‌گشت است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $i,j\in I$، $d_{ij}=0$ یا $d_{ij}=1$.

اثبات: ابتدا فرض کنیم به‌ازای هر $i,j\in I$، داشته باشیم $d_{ij}=0$ یا $d_{ij}=1$. برای $j_0\in I$، با توجه به این ($D\in\mathcal{DS}$ داریم $\sum_{i\in I}d_{ij_0}=1$. اما چون $d_{ij}=0$ یا $d_{ij}=1$، پس دقیقاً یک $i_0\in I$ هست به‌طوری‌که $d_{i_0j_o}=1$ و ضمناً برای بقیه $i\in I$ها داریم $d_{ij_o}=0$.

اکنون $\theta:I\to I$ را نگاشت با ضابطهٔ $\theta(j_0)=i_0$ در نظر می‌گیریم. باتوجه به توضیحات قبل برای هر $j\in I$ داریم $De_j=e_{\theta(j)}$. ابتدا نشان می‌دهیم θ یک به یک و پوشا است. برای این منظور اگر $j_0\neq j_1$ و $i_0=\theta(j_0)=\theta(j_1)$، آن‌گاه داریم $1=\sum_{j\in I}d_{i_0j}\geq d_{i_0j_0}+d_{i_0j_1}=2$ که تناقض است. این تناقض نشان می‌دهد T یک به یک است.

برای اثبات پوشایی، فرض کنیم $i_0 \in I$. با توجه به این‌که $\sum_{j\in I} d_{i_0 j}=1$ و به‌کمک فرض به‌ازای هر $i,j \in I$، $d_{ij}=0$ یا $d_{ij}=1$) مجدداً می‌توان دقیقاً یک $j_0 \in I$ یافت که برای آن $d_{i_0 j_0}=1$. بنابراین داریم $\theta(j_0)=i_0$ و از این‌رو، θ پوشا است.

اکنون اگر $P_\theta : l^p(I) \to l^p(I)$ جای‌گشت متناظر با نگاشت دوسویی $\theta : I \to I$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\forall j \in I, \qquad D(e_j)=e_{\theta(j)}=P_\theta(e_j).$$

این مطلب نشان می‌دهد $D=P_\theta$. به‌عبارت دیگر D یک جای‌گشت است.

اثبات عکس این قضیه ساده است.

قضیهٔ ۹. هر جای‌گشت یک نقطه لبه‌ای از مجموعه $\mathcal{DS}$ است.

اثبات: فرض کنیم $P : l^p(I) \to l^p(I)$ یک جای‌گشت باشد. با برهان خلف اگر $P \notin \mathrm{Ext}(\mathcal{DS})$، آن‌گاه $D_1, D_2 \in \mathcal{DS}$ با شرط $D_1 \neq D_2$ و $\lambda \in (0,1)$ وجود دارند که $P=\lambda D_1+(1-\lambda)D_2$. حال فرض کنیم $[P]=[p_{ij}]$، $[D_1]=[a_{ij}]$ و $[D_2]=[b_{ij}]$. چون $D_1 \neq D_2$، پس $i,j \in I$ وجود دارند به‌طوری‌که $a_{ij} \neq b_{ij}$. بنابراین به‌کمک تساوی $P=\lambda D_1+(1-\lambda)D_2$ داریم $p_{ij}=\lambda a_{ij}+(1-\lambda)b_{ij}$. چون $a_{ij}, b_{ij} \in [0,1]$ و $a_{ij} \neq b_{ij}$ پس حداقل یکی از این دو مقدار اکیداً مثبت است و چون $\lambda \in (0,1)$ پس $p_{ij}=\lambda a_{ij}+(1-\lambda)b_{ij}>0$. به‌طور مشابه حداقل یکی از دو مقدار a_{ij}, b_{ij} اکیداً کوچک‌تر از یک است. پس $p_{ij}=\lambda a_{ij}+(1-\lambda)b_{ij}<\lambda+(1-\lambda)=1$. بنابراین $0<p_{ij}<1$ که با لم قبل در تناقض است.

در ادامه مثالی از یک عملگر تصادفی دوگانه می‌آوریم که در آن مجموعه I ناشماراست.

مثال ۳. فرض کنیم $\lambda \in [0,1]$ و $D : l^p(\mathbb{R}) \to l^p(\mathbb{R})$ با ضابطهٔ $D(f)(x)=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(x^3)$ به‌ازای هر $f \in l^p(\mathbb{R})$ و $x \in \mathbb{R}$ تعریف شده باشد. واضح است که D خطی و پیوسته است. حال اگر $\theta_1, \theta_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را به‌ترتیب توابع دوسویی به‌صورت $\theta_1(x)=x$ و $\theta_2(x)=\sqrt[3]{x}$ تعریف کنیم، آن‌گاه داریم $D=\lambda P_{\theta_1}+(1-\lambda)P_{\theta_2}$. پس D یک عملگر تصادفی دوگانه است. زیرا ترکیب محدبی از دو جای‌گشت است. واضح است که طبق تعریف نقاط لبه‌ای اگر $\lambda \in (0,1)$، آن‌گاه $D \notin \mathrm{Ext}(\mathcal{DS})$. اما اگر $\lambda=0$ یا $\lambda=1$ آن‌گاه بنا به قضیهٔ ۹ داریم $D \in \mathrm{Ext}(\mathcal{DS})$.

سوالی که در این‌جا مطرح می‌شود این است که آیا تنها فقط جای‌گشت‌ها نقاط لبه‌ای عملگرهای تصادفی دوگانه روی $l^p(I)$ هستند؟ در واقع ما نتوانسته‌ایم جواب این مسئله را بیابیم. بنابراین جواب کامل این مسئله را به‌عنوان یک سوال باز مطرح می‌کنیم. اما حداقل می‌توان نقاط لبه‌ای مجموعه $\mathcal{DS}$ را بر حسب عملگرهای پوچ دوگانه توصیف کرد.

قضیهٔ ۱۰. فرض کنیم $D \in \mathcal{DS}$. در این‌صورت شرایط زیر معادل است.

الف) $D \notin \mathrm{Ext}(\mathcal{DS})$.

ب) یک عملگر پوچ دوگانه غیرصفر مانند $T \in \mathcal{D}_0$ هست به‌طوری‌که $D \pm T \in \mathcal{DS}$.

اثبات: ابتدا فرض کنیم شرط الف) برقرار باشد. چون D یک نقطه لبه‌ای برای مجموعه $\mathcal{DS}$ نیست، $D_1, D_2 \in \mathcal{DS}$ (که $D_1 \neq D_2$) می‌توان یافت کـه $D = \frac{1}{2}(D_1 + D_2)$. بنـابراین $D - D_1 = D_2 - D$. اکنـون قـرار مـی‌دهـیم $T = D - D_1 = D_2 - D$. واضح است که $T \neq 0$. با توجه به قضیهٔ ۵ داریم $T \in \mathcal{D}_0$. هم‌چنـین $D + T = D_2$ و $D - T = D_1$ که هر دو عملگرهایی تصادفی دوگانه هستند.

برعکس: چون $T \neq 0$ پس $D + T \neq D - T$. از طرفی طبق فرض هر کدام از عملگرهای $D + T$ و $D - T$ در مجموعه $\mathcal{DS}$ قرار دارند. علاوه بر این داریم $D = \frac{1}{2}\big((D+T) + (D-T)\big)$ و در نتیجه $D \not\in \mathrm{Ext}(\mathcal{DS})$.

یک نتیجه سرراست از قضیهٔ ۱۰ به این صورت است که: $D \in \mathcal{DS}$ یک نقطه لبه‌ای برای مجموعه $\mathcal{DS}$ است، اگر و تنها اگر به‌ازای هر $T \in \mathcal{D}_0$ داشته باشیم $D + T \not\in \mathcal{DS}$ یا $D - T \not\in \mathcal{DS}$.

منابع

1. Marshall A., Olkin I., "Inequalities: Theory of Majorization and its Applications", Academic Press, New York–London (1979).
2. Birkhoff G., "Three observations on linear algebra", Rev. Univ. Nac. Tucuman, 5 (1946) 147-151.
3. Birkhoff G., "Lattice Theory", revised edition, New York, (1948).
4. Isbell J. R, "Birkhoff's Problem 111", Proc. American Math. Soc., 6 (1955) 217-218.
5. Kendall D. G., "On infinite doubly-stochastic matrices and Birkhoff's Problem 111", J. London Math. Soc., **35** (1960) 81-84.
6. Saburov M., Shahidi F., "Birkhoff's theorem for triple stochastic matrices related to quadratic stochastic operators", in: Proceedings of the 4th ICREM, October 21-23, Malaysia, Univ. Putra Malaysia, (2009) 478-482.
7. Ganikhodzhaev R. N., Shahidi F.A., "On doubly stochastic quadratic operators and Birkhoff's problem", Linear Algebra Appl. 432 (2010) 24-35.
8. Safarov Yu., "Birkhoff's theorem and multidimensional numerical range", J. Funct. Anal., 222 (2005) 61-97.
9. Safarov Yu., "Birkhoff's Theorem for a Family of Probability Spaces", Algebra i Analiz 17 (5) (2005) 143-165. (in Russian).
10. Bahrami F., Bayati A., Manjegani S. M., "Linear preservers of majorization on $l^p(I)$", Linear Algebra Appl., 436 (2012) 3177-3195.

11. Bayati A., "Generalized Kakutani’s conjecture for doubly stochastic operators", Linear Multilinear Algebra, 65 (7) (2017) 1311-1315.

12. Ljubenovic M., "Weak majorization and doubly substochastic operators on $l^p(I)$", Linear Algebra Appl., 486 (2015) 295-316.

13. Ljubenovic M., Djordjevic D. S., "Linear preservers of weak majorizationon $l^1(I)^+$, when I is an infinite set", Linear Algebra Appl. 517 (2017) 177-198.