عدد تناوبی گراف‌ها

حسین حاجی‌ابوالحسن، دانشگاه شهید بهشتی، دانشکدهٔ علوم ریاضی،
دانشگاه صنعتی دانمارک، دانشکدهٔ ریاضی کاربردی و علوم کامپیوتر، کپنهاگ، دانمارک
میثم علیشاهی*، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده علوم ریاضی

دریافت ۹۶/۰۴/۰۲   پذیرش ۹۷/۰۵/۱۴

چکیده

در سال ۲۰۱۵، حاجی‌ابوالحسن و علیشاهی عددهای تناوبی گراف‌ها را به‌عنوان یک کران پایین برای عدد رنگی گراف‌ها معرفی کردند. اثبات ارائه شده به‌وسیلهٔ آن‌ها مبتنی برلم تاکر (معادل ترکیبیاتی قضیه بورسوک-اولام) است که یک نتیجه در ترکیبیات توپولوژیکی است. در این مقاله یک اثبات کاملاً ترکیبیاتی برای این قضیه از علیشاهی و حاجی‌ابوالحسن ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: گراف‌های کنسر، عدد رنگی، عدد تناوبی گراف‌ها

مقدمه

در این مقاله، برای هر عدد طبیعی t، مجموعه $\{1,\dots,t\}$ را با نماد $[t]$ نمایش می‌دهیم. یک ابرگراف $\mathcal{H}$، یک زوج مرتب $(V(\mathcal{H}),E(\mathcal{H}))$ است که در آن $V(\mathcal{H})$ یک مجموعه متناهی است که اعضای آن رأس نامیده می‌شوند و $E(\mathcal{H})$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های ناتهی از $V(\mathcal{H})$ است که به هر عضو آن یال می‌گوییم. یک t-رنگ‌آمیزی مجاز[1] از یک ابرگراف $\mathcal{H}$، یک تابع $c:V(\mathcal{H})\longrightarrow[t]$ است که برای آن هیچ یالی از $\mathcal{H}$ تکرنگ نیست (برای هر یال $e\in E(\mathcal{H})$ داریم $|c(e)|>1$). به کم‌ترین مقدار ممکن برای چنین t-ای عدد رنگی $\mathcal{H}$ می‌گوییم که آن را با $\chi(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهیم. درصورتی که ابرگراف $\mathcal{H}$ دارای یالی از اندازه ۱ باشد عدد رنگی آن را بینهایت تعریف می‌کنیم.

برای یک بردار $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\{R,0,B\}^n$، دنبالهٔ $x_{a_1},x_{a_2},\dots,x_{a_t}$ ($1\le a_1<\cdots<a_t\le n$) که در آن x_{a_j}ها درایه‌هایی ناصفر از X هستند را متناوب می‌نامیم هرگاه هر دو عضو متوالی از این دنباله متفاوت باشند. به اندازهٔ بزرگ‌ترین دنباله متناوب در X عدد تناوب X می‌گوییم و آن را با $alt(X)$ نمایش می‌دهیم. هم‌چنین برای بردار $X=(0,\dots,0)\in\{R,0,B\}^n$ مقدار $alt(X)$ را برابر با صفر تعریف می‌کنیم. علاوه براین X^R و X^B را نیز به فرم زیر به X نسبت می‌دهیم:

$$X^R=\{i:x_i=R\} \text{ و } X^B=\{i:x_i=B\}.$$

*نویسنده مسئول   meysam_alishahi@shahroodut.ac.ir

1. Proper coloring

برای مثال اگر $X=(R,R,B,B,0,R,0,R,B)$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه $alt(X)=4$، $X^R=\{1,2,6,8\}$، و $X^B=\{3,4,9\}$. هم‌چنین توجه داشته باشید که با داشتن X^R و X^B می‌توان X را به‌طور یکتا تعیین کرد. لذا بردار $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ را می‌توان به‌صورت زوج مرتب $X=(X^R,X^B)$ نیز نمایش داد. در طول این مقاله ما از هر دو نمایش بردار X به تناسب کاربرد آن‌ها استفاده خواهیم کرد. برای دو بردار $X,Y\in\{R,0,B\}^n$، گوییم $X\subseteq Y$ هرگاه $X^R\subseteq Y^R$ و $X^B\subseteq Y^B$. توجه کنید که اگر $X\subseteq Y$ آن‌گاه هر دنباله متناوب از X یک دنبالهٔ متناوب از Y نیز هست، از این‌رو، $alt(X)\le alt(Y)$. علاوه براین با توجه به تعریف دنباله متناوب اولین درایه ناصفر از هر بردار غیرصفر X و اولین جمله هر دنباله متناوب با طول بیشینه از X همواره یک‌سان هستند. به‌عبارت دیگر، برای هر بردار غیرصفر X، اولین جمله از هر دنباله متناوب با طول ماکسیمم برابر است با مقدار درایه متناظر با کوچک‌ترین عضو از $X^R\cup X^B$.

ابرگراف $\mathcal{H}=(V,E)$ را در نظر بگیرید. قرار دهید $L_V=\left\{v_{i_1}<v_{i_2}<\ldots<v_{i_n}:(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in S_n\right\}$ مجموعهٔ همه ترتیب‌های خطی روی مجموعه V باشد. حال برای یک بردار $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\{R,0,B\}^n$ و یک ترتیب خطی $\sigma:v_{i_1}<v_{i_2}<\ldots<v_{i_n}\in L_V$ تعریف می‌کنیم

$$X_\sigma^R=\left\{v_{i_j}:x_j=R\right\}\text{، }X_\sigma^B=\left\{v_{i_j}:x_j=B\right\}\text{، و }X_\sigma=(X_\sigma^R,X_\sigma^B).$$

توجه کنید که اگر $V=[n]$ و $I:1<\cdots<n$، آن‌گاه $X^R=X_I^R$، $X^B=X_I^B$، و $X=X_I$. هم‌چنین زیرابرگرافی از $\mathcal{H}$ را که دارای مجموعه رأس‌های $X_\sigma^R\cup X_\sigma^B$ و مجموعه یال‌های

$$E(\mathcal{H}_{|X_\sigma})=\left\{e\in E(\mathcal{H}):\ e\subseteq X_\sigma^R \text{ or } e\subseteq X_\sigma^B\right\}$$

است را با $\mathcal{H}_{|X_\sigma}$ نمایش می‌دهیم.

گراف‌های کنسری کلی

ابرگراف $\mathcal{H}=(V,E)$ را در نظر بگیرید. گراف کنسر کلی[1] $\mathrm{KG}(\mathcal{H})$ گرافی است با مجموعه رأس‌های E که در آن دو رأس $e_1,e_2\in E$ به یک‌دیگر متصل هستند هرگاه $e_1\cap e_2=\varnothing$. برای یک گراف داده شده G، به هر ابرگراف $\mathcal{H}$ که برای آن $\mathrm{KG}(\mathcal{H})$ و G یکریخت هستند یک نمایش کنسری[2] از G گفته می‌شود. به سادگی می‌توان بررسی کرد که هر گراف G دارای تعداد نامتناهی نمایش کنسری است. برای اثبات کافی است ابرگراف $\mathcal{H}$ را با مجموعه رأس‌های $V(G)\cup E(\bar{G})$ در نظر بگیریم. متناظر با هر رأس $v\in V(G)$ یال e_v را برابر با مجموعه همه یال‌هایی از $\bar{G}$ که متصل به رأس v هستند به‌همراه خود رأس v تعریف می‌کنیم. نگاشت $v\longrightarrow e_v$ به‌وضوح یک یکریختی از G به $\mathrm{KG}(\mathcal{H})$ است، از این‌رو، $\mathrm{KG}(\mathcal{H})$ یک نمایش کنسری برای Gاست. حال تغییر دادن یال‌های $\mathcal{H}$ با افزودن رأس‌های جدید به‌گونه‌ای که اشتراک و عدم اشتراک‌ها در بین یال‌های $\mathcal{H}$ ثابت بمانند، باعث ساختن یک نمایش کنسری جدید برای G خواهد شد. بدیهی است که این کار به نامتناهی روش قابل انجام است.

---

1. General Kneser graph
2. Kneser representation

عدد تناوبی ابرگراف‌ها

برای ابرگراف داده شده $\mathcal{H}=(V,E)$، یک ترتیب خطی $\sigma\in L_V$ و عدد طبیعی k را درنظر بگیرید. k-امین عدد σ-تناوبی $\mathcal{H}$ را که با $alt_\sigma(\mathcal{H},k)$ نمایش می‌دهیم برابر با بزرگ‌ترین مقدار ممکن از t تعریف می‌کنیم که برای آن لااقل یک $X\in\{R,0,B\}^n$ وجود دارد که $alt(X)=t$ و هم‌چنین عدد رنگی ابرگراف $\mathrm{KG}(\mathcal{H}_{|X_\sigma})$ حداکثر برابر $k-1$ است. در حالت $k=1$ این بدان معنی است که ابرگراف $\mathcal{H}_{|X_\sigma}$ دارای هیچ یالی نیست. حال عدد تناوب k-ام ابرگراف $\mathcal{H}$ [1] را بدین‌صورت معرفی می‌کنیم:

$$alt(\mathcal{H},k)=\min\left\{alt_\sigma(\mathcal{H},k):\sigma\in L_V\right\}.$$

اکنون یک گراف دلخواه G و یک عدد صحیح k را که $1\le k\le\chi(G)+1$ در نظر بگیرید. k-امین عدد تناوبی G را بدین‌صورت معرفی می‌کنیم:

$$\zeta(G,k)=\max_{\mathcal{H}}\left\{|V(\mathcal{H})|-alt(\mathcal{H},k)+k-1:\mathrm{KG}(\mathcal{H})\longleftrightarrow G\right\}$$

که در آن $\mathrm{KG}(\mathcal{H})\longleftrightarrow G$ بدین معنی است که لااقل یک همریختی از $\mathrm{KG}(\mathcal{H})$ به G و لااقل یک همریختی از Gبه $\mathrm{KG}(\mathcal{H})$ وجود دارد. دقت کنید که اگر $k=\chi(G)+1$، آن‌گاه برای هر ابرگراف $\mathcal{H}$ که $\mathrm{KG}(\mathcal{H})\longleftrightarrow G$ داریم $k=\chi(\mathrm{KG}(\mathcal{H}))+1$، از این‌رو $alt(\mathcal{H},k)=|V(\mathcal{H})|$. هرچند که با توجه به تعریف مقدار $\zeta(G,k)$ ممکن است نامتنهاهی باشد، در خلال اثبات قضیهٔ ۱ می‌بینیم که همواره $\zeta(G,k)$ عددی متناهی است.

در مقالهٔ [۱] با استفاده از لم تاکر[2] که یک معادل ترکیبیاتی برای قضیهٔ معروف بورسوک-اولام[3] است، حاجی‌ابوالحسن و علیشاهی نشان دادند که برای هر گراف G و هر عدد صحیح k که $1\le k\le\chi(G)+1$، همواره k-امین عدد تناوبی G یک کران پایین برای عدد رنگی G ارائه می‌دهد.

قضیهٔ ۱. [۱] برای هر گراف G و هر عدد صحیح k که $1\le k\le\chi(G)+1$ داریم $\chi(G)\ge\zeta(G,k)$.

در [۱] برای حالت $k=1$ نشان داده شده است که قضیهٔ مذکور یک بهبود از قضیهٔ مشهور دولنیکوف [۴] است. هم‌چنین در [۱]، [۲] عدد رنگی بعضی از خانواده‌های گراف‌ها به‌کمک این کران پایین محاسبه شده‌اند. علاوه براین علیشاهی و حاجی‌ابوالحسن به‌کمک یک تعمیم از لم گیل[4] نشان دادند که اولین عدد تناوبی، یک کران پایین دقیق[5] برای بعضی از کران‌های پایین توپولوژیکی برای عدد رنگی گراف‌ها است [۳]. برای بررسی بیش‌تر می‌توانید به [۳] مراجعه کنید. میونیر اثبات کرد که محاسبهٔ اولین عدد تناوبی گراف‌ها یک مسئله سخت است [۱۰]. در حقیقت او نشان داد که برای یک ابرگراف داده شده $\mathcal{H}$ و یک ترتیب خطی σ، به‌دست آوردن $alt_\sigma(\mathcal{H},1)$ یک مسئله NP-سخت است.

1. *k*-th alternation number
2. Tucker lemma
3. Borsuk-Ulam Theorem
4. Gale lemma
5. Sharp

اثبات ترکیبیاتی برای قضیهٔ ۱

برای دو عدد m و n که $m \geq 2n$، گراف کنسر معمولی[1] $\mathrm{KG}(m,n)$ گرافی است با مجموعه رأس‌های متشکل از همه زیرمجموعه‌های k-عضوی از $[m]$ که در آن دو رأس به یک‌دیگر متصل هستند اگر و تنها اگر اشتراک آن‌ها تهی باشد. کنسر در سال ۱۹۵۵ [5] حدس زد که $\chi(\mathrm{KG}(m,n)) = m-2n+2$. در حقیقت او یک رنگ‌آمیزی مجاز برای $\mathrm{KG}(m,n)$ با $m-2n+2$ رنگ ارائه داد. این حدس در سال ۱۹۷۸ به‌وسیلهٔ لواژ [۷] و به‌کمک ابزارهای توپولوژیکی به اثبات رسید. مقاله لواژ به‌عنوان سرآغاز بررسی ترکیبیات به‌کمک ابزارهای توپولوژیکی باعث تولد شاخه‌ای از ترکیبیات شد که امروزه به‌عنوان ترکیبیات توپولوژیکی[2] شناخته می‌شود. اسکرایور [۱۱] زیرگرافی از گراف کنسر $\mathrm{KG}(m,n)$ را معرفی کرد که نه تنها دارای عدد رنگی یک‌سانی با $\mathrm{KG}(m,n)$ است بلکه یک گراف رأس بحرانی نیز هست. این زیرگراف را با $\mathrm{SG}(m,n)$ نمایش می‌دهیم. در [۱] ثابت شده است که قضیهٔ ۱ به سادگی نتایج لواژ و اسکرایور را نتیجه می‌دهد. در ادامه این بخش یک اثبات کاملاً ترکیبیاتی برای قضیهٔ ۱ ارائه می‌دهیم. لازم به ذکر است که ایده این اثبات مبتنی بر اثباتی ترکیبیاتی از قضیه لواژ است که برای اولین بار به‌وسیلهٔ متوسک در [۹] ارائه شده است.

اثبات قضیهٔ ۱. فرض کنید حکم قضیه برقرار نباشد و داشته باشیم $\zeta(G,k) > \chi(G)$. ابرگراف $\mathcal{H}$ را چنان در نظر بگیرید که $\mathrm{KG}(\mathcal{H})$ و G همریخت باشند و هم‌چنین داشته باشیم:

$$\zeta(G,k) \geq |V(\mathcal{H})| - alt(\mathcal{H},k) + k - 1 = |V(\mathcal{H})| - alt_{\sigma}(\mathcal{H},k) + k - 1 > \chi(G)$$

که در آن $\sigma \in L_{V(\mathcal{H})}$. توجه کنید که بدون کاستن از کلیت و برای سادگی در نوشتن می‌توانیم فرض کنیم که $V(\mathcal{H}) = [n]$ و $\sigma = I : 1 < \cdots < n$. یک رنگ‌آمیزی مجاز

$$h : V(\mathrm{KG}(\mathcal{H})) = E(\mathcal{H}) \longrightarrow \{1, \ldots, n - alt(\mathcal{H},k) + k - 2\}$$

از $\mathrm{KG}(\mathcal{H})$ را در نظر بگیرید. برای هر زیرمجموعه $M \subseteq V(\mathcal{H})$ تعریف می‌کنیم $\bar{h}(M) = \max\{h(e) : e \subseteq M, e \in E(\mathcal{H})\}$. اگر $e \in E(\mathcal{H})$ وجود نداشت که $e \subseteq M$، آن‌گاه قرار می‌دهیم $\bar{h}(M) = 0$. حال برای هر بردار $X = (X^R, X^B) \in \{R, 0, B\}^n$ قرار می‌دهیم $\bar{h}(X) = \max\{\bar{h}(X^R), \bar{h}(X^B)\}$. اکنون نگاشت $\lambda : \{R,0,B\}^n \longrightarrow \{\pm 1, \ldots, \pm n\}$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم.

۱. اگر $X = (X^R, X^B) \in \{R,0,B\}^n$ و $alt(X) \leq alt_I(\mathcal{H},k)$، آن‌گاه

$$\lambda(X) = \begin{cases} +alt(X)+1 & \text{if } X^B = \varnothing \text{ or } \min(X^R \cup X^B) \in X^R \\ -alt(X)-1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

۲. اگر $X = (X^R, X^B) \in \{R,0,B\}^n$ و $alt(X) \geq alt_I(\mathcal{H},k)+1$، آن‌گاه

1. Usual Kneser graph
2. Topological Combinatorics

$$\lambda(X)=\begin{cases} alt_I(\mathcal{H},k)+\bar{h}(X)-k+2 & \text{if } \bar{h}(X)=\bar{h}(X^R) \\ -(alt_I(\mathcal{H},k)+\bar{h}(X)-k+2) & \text{if } \bar{h}(X)=\bar{h}(X^B) \end{cases}$$

از آن‌جاکه h یک رنگ‌آمیزی مجاز است می‌توان به سادگی بررسی کرد که نگاشت λ تعریف شده در بالا خوش‌تعریف است. خوش‌تعریفی نگاشت λ در حالت ۱ کاملاً بدیهی است. از این‌رو، کافی است نشان دهیم که در حالت ۲، برای هر X دلخواه، تنها یکی از دو حالت $\bar{h}(X)=\bar{h}(X^R)$ یا $\bar{h}(X)=\bar{h}(X^B)$ می‌تواند رخ دهد. در غیر این‌صورت، با توجه به تعریف $\bar{h}(X)$، باید $\bar{h}(X^R)=\bar{h}(X^B)$ و لذا دو رأس A و B از گراف $\mathrm{KG}(\mathcal{H})$ چنان وجود دارند که $A\subseteq X^R$، $B\subseteq X^B$، و $h(A)=h(B)$. از طرفی $X^R\cap X^B=\varnothing$ نتیجه می‌دهد که $A\cap B=\varnothing$ و لذا A به B در $\mathrm{KG}(\mathcal{H})$ متصل است که این با مجاز بودن رنگ‌آمیزی h در تناقض است.

هم‌چنین به سادگی می‌توان دید که برای هر $(A,B)\subseteq(A',B')$ داریم $\lambda(A,B)+\lambda(A',B')\neq 0$. برای اثبات فرض کنید که $(A,B)\subseteq(A',B')$ چنان وجود دارند که $\lambda(A,B)=-\lambda(A',B')=\ell$. در ابتدا، با توجه به تعریف λ، توجه کنید برای $X=(A,B)$ و $Y=(A',B')$، یا هر دو در حالت ۱ و یا هر دو در حالت ۲ از تعریف λ صدق می‌کنند. اگر X و Y هر دو در حالت ۱ از تعریف صدق کنند در این صورت $alt(X)=alt(Y)=\ell-1$ و اولین درایه‌های ناصفر در X و Y به‌ترتیب باید R و B باشند. ولی از آن‌جاکه $X\subseteq Y$، این نتیجه می‌دهد که $alt(X)<alt(Y)$ و این امکان‌پذیر نیست. حال فرض کنید که X و Y هر دو در حالت ۲ از تعریف λ صدق کنند. لذا باید داشته باشم

$$\bar{h}(X)=\bar{h}(X^R)=\ell-alt_I(\mathcal{H},k)+k-2=c$$

و

$$\bar{h}(Y)=\bar{h}(Y^b)=\ell-alt_I(\mathcal{H},k)+k-2=c.$$

بنابراین دو رأس A و B از $\mathrm{KG}(\mathcal{H})$ چنان وجود دارند که $A\subseteq X^R$، $B\subseteq X^B$، و $h(A)=h(B)=c$. از طرفی چون $A\subseteq X^R\subseteq Y^R$، $B\subseteq Y^B$، و $Y^R\cap Y^B=\varnothing$ دو رأس A و B در $\mathrm{KG}(\mathcal{H})$ متصل هستند که این در تناقض با مجاز بودن رنگ‌آمیزی h است. هم‌چنین با توجه به تعریف $alt_I(\mathcal{H},k)$، اگر $alt(X)\geq alt_I(\mathcal{H},k)+1$، آن‌گاه عدد رنگی گراف $\mathrm{KG}(\mathcal{H}_{|x})$ حداقل k خواهد بود، از این‌رو، $|\lambda(X)|\geq alt_I(\mathcal{H},k)+2$. از طرفی بنابر تعریف تابع λ واضح است که $\lambda((\varnothing,\varnothing))=1$.

در ادامه گراف ساده و متناهی H را به‌گونه‌ای می سازیم که این گراف دارای تنها یک رأس از درجهٔ ۱ است در حالی که سایر رأس‌های آن همگی از درجهٔ ۲ هستند. از آن‌جاکه مجموع درجهٔ رأس‌های هر گراف عددی زوج است، واضح است که چنین چیزی امکان‌پذیر نیست، از این‌رو، این تناقض باعث تکمیل اثبات می‌شود.

برای هر زیرمجموعه $A\subseteq[n]$ تعریف می‌کنیم $-A=\{-t:t\in A\}$. توجه کنید که اگر $A=\varnothing$، آن‌گاه $-A=\varnothing$. یک دنبالهٔ مجاز یک دنبالهٔ $(A_0,B_0)\subseteq(A_1,B_1)\subseteq\cdots\subseteq(A_m,B_m)$ از اعضای $\{R,0,B\}^n$ است به‌طوری‌که برای هر $0\leq i\leq m$ داریم $|A_i|+|B_i|=i$ و هم‌چنین

$$A_m \cup -B_m \subseteq \left\{\lambda((A_0,B_0)),\lambda((A_1,B_1)),\ldots,\lambda((A_m,B_m))\right\}.$$

توجه کنید که همواره $A_0=B_0=\varnothing$ و $0\le m\le n$. هم‌چنین مجاز بودن دنبالهٔ $(\varnothing,\varnothing)$ نتیجه مستقیم تعریف دنبالهٔ مجاز است.

مجموعه رأس‌های گراف H را مجموعه همه دنباله‌های مجاز تعریف می‌کنیم. حال به تعریف یال‌های این گراف می‌پردازیم. برای دنبالهٔ مجاز $(\varnothing,\varnothing)$ همسایه یکتای آن را دنبالهٔ مجاز $(\varnothing,\varnothing)\subseteq(\{1\},\varnothing)$ تعریف می‌کنیم. برای هر دنبالهٔ مجاز دیگر، دو همسایه آن را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم.

یک دنبالهٔ مجاز $(A_0,B_0)\subseteq(A_1,B_1)\subseteq\cdots\subseteq(A_m,B_m)$ را که $m\ge1$ در نظر بگیرید. برای هر $0\le i\le m$ قرار دهید $\lambda_i=\lambda(A_i,B_i)$. با توجه به تعریف نگاشت λ واضح است که اگر $(A,B)\subseteq(A',B')$، آن‌گاه $|\lambda(A,B)|\le|\lambda(A',B')|$. با توجه به رابطه

$$A_m \cup -B_m \subseteq \left\{\lambda((A_0,B_0)),\lambda((A_1,B_1)),\ldots,\lambda((A_m,B_m))\right\}$$

و از آن‌جاکه $|A_m\cup -B_m|=m$، مجموعه $\left\{\lambda((A_0,B_0)),\lambda((A_1,B_1)),\ldots,\lambda((A_m,B_m))\right\}$ دارای m و یا $m+1$ عضو است. بنابراین یکی از این دو حالت رخ می‌دهد.

۱. اندیس یکتای i چنان وجود دارد که $0\le i<m$ و $\lambda_i=\lambda_{i+1}$.

۲. اندیس یکتای i چنان وجود دارد که $0\le i\le m$ و $\lambda_i\notin A_m\cup -B_m$.

ابتدا حالت اول را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که در این حالت $i=0$ امکان‌پذیر نیست، زیرا با توجه به تعریف نگاشت λ، برای هر $j>0$ داریم $|\lambda_j|>1$. حال اگر $\lambda_i=\lambda_{i+1}$ برای یک $1\le i<m$، دو همسایه دنباله $\mathcal{S}=(A_0,B_0)\subseteq(A_1,B_1)\subseteq\cdots\subseteq(A_m,B_m)$ بدین‌صورت تعریف می‌شوند:

الف) اولین همسایه دنبالهٔ $\mathcal{S}$ دنباله $(A'_0,B'_0)\subseteq(A'_1,B'_1)\subseteq\cdots\subseteq(A'_m,B'_m)$ است که در آن $(A'_i,B'_i)=(A_{i-1}\cup(A_{i+1}\setminus A_i),B_{i-1}\cup(B_{i+1}\setminus B_i))$ و برای هر $r\ne i$ داریم $(A'_r,B'_r)=(A_r,B_r)$.

ب) اگر $i<m-1$، آن‌گاه $(A''_0,B''_0)\subseteq(A''_1,B''_1)\subseteq\cdots\subseteq(A''_m,B''_m)$ همسایهٔ دیگر دنبالهٔ مجاز $\mathcal{S}$ است که $(A''_{i+1},B''_{i+1})=(A_i\cup(A_{i+2}\setminus A_{i+1}),B_i\cup(B_{i+2}\setminus B_{i+1}))$ و برای هر $r\ne i+1$ نیز داریم $(A''_r,B''_r)=(A_r,B_r)$. در غیر این‌صورت اگر $i=m-1$، آن‌گاه همسایهٔ دیگر دنبالهٔ مجاز $\mathcal{S}$ برابر دنبالهٔ $(A_0,B_0)\subseteq(A_1,B_1)\subseteq\cdots\subseteq(A_{m-1},B_{m-1})$ تعریف می‌شود.

حال حالت دوم را در نظر می‌گیریم. یعنی اندیس یکتای i چنان وجود دارد که $0\le i\le m$ و $\lambda_i\notin A_m\cup -B_m$. در این حالت دو همسایه $\mathcal{S}=(A_0,B_0)\subseteq(A_1,B_1)\subseteq\cdots\subseteq(A_m,B_m)$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

الف) اولین همسایهٔ دنبالهٔ $\mathcal{S}$ دنبالهٔ $(A'_0,B'_0)\subseteq(A'_1,B'_1)\subseteq\cdots\subseteq(A'_m,B'_m)\subseteq(A'_{m+1},B'_{m+1})$ است که در آن برای هر $0\le r\le m$ داریم $(A'_r,B'_r)=(A_r,B_r)$. اگر $\lambda_i>0$، آن‌گاه $(A'_{m+1},B'_{m+1})=(A_m\cup\{\lambda_i\},B_m)$ و در غیر این‌صورت $(A'_{m+1},B'_{m+1})=(A_m,B_m\cup\{-\lambda_i\})$.

ب) اگر $1 \le i \le m-1$، آن‌گاه همسایهٔ دیگر دنبالهٔ S را دنبالهٔ $(A''_0, B''_0) \subseteq (A''_1, B''_1) \subseteq \cdots \subseteq (A''_m, B''_m)$ تعریف می‌کنیم که

$$(A''_i, B''_i) = (A_{i-1} \cup (A_{i+1} \setminus A_i), B_{i-1} \cup (B_{i+1} \setminus B_i))$$

و برای هر $r \neq i$ داریم $(A''_r, B''_r) = (A_r, B_r)$. اما اگر $i = m$، آن‌گاه همسایهٔ دوم را برابر دنبالهٔ

$$(A_0, B_0) \subseteq (A_1, B_1) \subseteq \cdots \subseteq (A_{m-1}, B_{m-1})$$

قرار می‌دهیم. در نهایت برای حالت $i = 0$، همسایهٔ دوم را دنبالهٔ $(B_0, A_0) \subseteq (B_1, A_1) \subseteq \cdots \subseteq (B_m, A_m)$ تعیین می‌کنیم.

مجاز بودن دنباله‌های معرفی شده در دو قسمت مذکور به سادگی قابل بررسی است. هم‌چنین می‌توان مشاهده کرد که تعاریف همسایگی‌ها به‌صورت متقارن هستند، از این‌رو، گراف H حاصل شده یک گراف ساده با شرایط ادعا شده است که منجر به تکمیل اثبات می‌شود.

منابع

1. Alishahi M., Hajiabolhassan H., "On the chromatic number of general Kneser hypergraphs", Journal of Combinatorial Theory, Series B, 115 (2015) 186-209.

2. Alishahi M., Hajiabolhassan H., "Altermatic number of categorical products of graphs", Discrete Mathematics, 341 (2018) 1316-1324.

3. Alishahi M., Hajiabolhassan H., "A Generalization of Gale's lemma", Journal of Graph Theory, 88(2) (2018) 337-346.

4. Dol'nikov V. L., "A combinatorial inequality", Sibirsk. Mat. Zh., 29 (3) 219 (1988) 53-58.

5. Kneser M., "Satz über abelsche Gruppenmit Anwendungen auf die Geometrie der Zahlen", Math. Z., 61 (1955) 429-434.

6. Kříž I., "Equivariant cohomology and lower bounds for chromatic numbers", Trans. Amer. Math. Soc., 333(2) (1992) 567-577.

7. Lovász L., "Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy", Journal of Combinatorial Theory, Series A, 25(3) (1978) 319-324.

8. Matoušek J., "Using the Borsuk-Ulam theorem", Universitext. Springer-Verlag, Berlin, Lectures on topological methods in combinatorics and geometry, Written in cooperation with Anders Björner and Günter M. Ziegler (2003).

9. Matoušek J., "A combinatorial proof of Kneser's conjecture", Combinatorica, 24(1) (2004) 163-170.

10. Meunier F., "Colorful Subhypergraphs in Kneser Hypergraphs", Electronic Journal of Combinatorics, 21(1): Research Paper #P1.8 (2014) 13 (electronic).

11. Schrijver A., "Vertex-critical subgraphs of Kneser graphs", Nieuw Arch. Wisk. (3) 26 (3) (1978) 454-461.