بررسی ویژگی‌های طیف آروسون بر ابرگروه‌های موضعاً فشرده

سید محمد طباطبایی، سیده بنت الهدی سادات حسینی*
دانشگاه قم، گروه ریاضی

دریافت ۹۶/۰۲/۰۹ پذیرش ۹۷/۰۴/۰۴

چکیده

در این مقاله به بررسی بیش‌تر مفهوم طیف‌های آروسون[1] بر ابرگروه‌های موضعاً فشرده می‌پردازیم و خواص اساسی آن را به گروه‌های آبلی موضعاً فشرده و ردهٔ مهمی از ابرگروه‌ها را توسعه می‌دهیم که فشرده و شمارای نامتناهی هستند. به‌ویژه ثابت می‌کنیم $M(\pi,E_1)M(\pi,E_2)\subseteq M(\pi,\overline{E_1 * E_2})$، که در آن (M,K,π) یک W^*- سیستم[2] و E_1 و E_2 زیرمجموعه‌های بسته از $\hat{K}$ هستند.

واژه‌های کلیدی. ابرگروه، طیف آروسون، زیرفضای طیفی، W^*- جبر

مقدمه

طیف‌های آروسون و کون[3] ابزارهایی کلیدی برای رده‌بندی جبرهای فون نویمن[4] هستند [۳]، [۸]. نخستین بار مدقالچی و طباطبایی مفهوم طیف آروسون و زیرفضاهای طیفی را بر ابرگروه‌های موضعاً فشرده تعریف کردند [۹]. در این مقاله برخی خواص اساسی طیف آروسون را بر گروه‌های موضعاً فشرده و نیز ردهٔ مهمی از ابرگروه‌های دانکل[5] و رامیرز[6] در [۵] را توسعه می‌دهیم که ابرگروه‌هایی فشرده و شمارای نامتناهی هستند. (لازم به ذکر است که برخلاف حالت گروهی که هر گروه فشردهٔ نامتناهی لزوماً ناشمارا است، در ابرگروه‌ها این اتفاق نمی‌افتد. به‌عبارت دیگر، ابرگروه‌های فشرده‌ای وجود دارند که شمارای نامتناهی هستند [۵]). این خواص نقشی مهم در سایر بررسی‌ها در این زمینه دارند. در واقع نشان می‌دهیم که $\mathrm{sp}_\pi(x_1x_2)\subseteq \mathrm{sp}_\pi(x_1)*\mathrm{sp}_\pi(x_2)$ که در آن $x_1,x_2\in M$ و (M,K,σ) یک W^*- سیستم است. در تذکر ۶ خاصیت (α) را بیان کرده‌ایم که برای اثبات قضیهٔ اصلی ۸ لازم است. در بخش ۴ مثال‌هایی از ابرگروه‌ها را بیان می‌کنیم که خاصیت (α) برای آن‌ها برقرار است.

در بخش دو به بیان تعریف و برخی خواص بنیادین ابرگروه‌های موضعاً فشرده می‌پردازیم. در این مقاله K یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده است. مجموعهٔ همهٔ اندازه‌های رادون مختلط بر K را با $M(K)$ و مجموعه همهٔ اعضای نامنفی $M(K)$ را با $M^+(K)$ نشان می‌دهیم. محمل هر عضو μ از $M(K)$ را با $\mathrm{supp}\,\mu$ نشان می‌دهیم. فرض

---

*نویسندهٔ مسئول Sb.sadathosseini@stu.qom.ac.ir

1. Arveson
2. W^*–system
3. Connes
4. Von Neumann
5. Dunkl
6. Ramirez

کنید E زیر مجموعه‌ای از K باشد. در این صورت بستار E را با $\overline{E}$ و تابع مشخصه روی E را با χ_E و متمم E را با E^c نشان می‌دهیم. هم‌چنین اندازهٔ دیراک در نقطهٔ x را با δ_x و مجموعهٔ همهٔ توابع مختلط مقدار پیوسته با محمل فشرده روی K را با $C_c(K)$ نشان می‌دهیم.

C^*- جبر M، یک W^*- جبر نامیده می‌شود اگر برای جبر باناخی مانند M_* رابطه $(M_*)^* = M$ برقرار باشد که در آن $(M_*)^*$ فضای مزدوج M_* است (M_* پیش‌دوگان M نامیده می‌شود). هر W^*- جبر یکدار است (با واحد 1_M) [8]. جبرهای فون نویمن نمونه‌ای از W^*- جبرها هستند.

مجموعه همهٔ عملگرهای $(\sigma(M,M_*),\sigma(M,M_*))$- پیوسته بر W^*- جبر M را با $B_\sigma(M)$ نشان می‌دهیم.

تعاریف و قضیه‌های مقدماتی

ابرگروه‌ها را در دههٔ ۱۹۷۰ (میلادی) جویت[1] [۷]، دانکل [۴]، و اسپکتور [۱۱] تعریف کردند. گروه‌های موضعاً فشرده، ابرگروه‌های هم‌دستهٔ دوگان و ابرگروه‌های چندجمله‌ای مثال‌هایی از ابرگروه‌ها هستند. برای مثال‌های بیش‌تر به [۱] مراجعه کنید.

در این بخش تعاریف و مفاهیم مرتبط با ابرگروه‌های موضعاً فشرده را بیان می‌کنیم. منابع اصلی ما [۱] و[۴] هستند.

۱. تعریف. فرض کنید K یک فضای هاسدورف، موضعاً فشرده و ناتهی باشد و در خواص زیر صدق کند:

۱. یک عمل دوتایی مانند $*: M(K)\times M(K)\to M(K)$ موجود باشد که $(M(K),+,*)$ را به یک جبر مختلط (شرکت‌پذیر) تبدیل می‌کند.

۲. برای هر $\mu,\nu\in M^+(K)$، $\mu*\nu\in M^+(K)$ و نگاشت $(\mu,\nu)\mapsto\mu*\nu$ از $M^+(K)\times M^+(K)$ به توی $M^+(K)$ پیوسته باشد، که در آن $M^+(K)$ را با توپولوژی مخروطی[2] در نظر می‌گیریم.

۳. برای هر $x,y\in K$، $\delta_x*\delta_y$ یک اندازه احتمال با محمل فشرده است.

۴. نگاشت $(x,y)\mapsto \mathrm{supp}(\delta_x*\delta_y)$ از $K\times K$ به $\varphi(K)$ پیوسته باشد، که $\varphi(K)$ فضای همهٔ زیرمجموعه‌های فشرده ناتهی K با توپولوژی مایکل[3] است. (توپولوژی مایکل توپولوژی تولید شده به‌کمک زیرپایه‌های $\varphi_{U,V} := \{A\in\varphi(K): A\cap U\neq\emptyset, A\subseteq V\}$ است که U و V زیرمجموعه‌های باز K هستند.)

۵. عنصر منحصر به فرد $e\in K$ چنان وجود داشته باشد که به‌ازای هر عضو $x\in K$،

$$\delta_x*\delta_e=\delta_e*\delta_x=\delta_x.$$

۶. یک هم‌سان‌ریختی $x\mapsto x^-$ از K به روی K موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x,y\in K$، $(x^-)^-=x$، $(\delta_x*\delta_y)^-=\delta_{y^-}*\delta_{x^-}$. برای هر $\mu\in M(K)$، μ^- را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\int_K f(t)d\mu^-(t)=\int_K f(t^-)d\mu(t) \qquad (f\in C_0(K)).$$

1. Jewett
2. Cone topology
3. Michael

۷. برای هر $x, y \in K$، $e \in \operatorname{supp}(\delta_x * \delta_y)$ اگر و تنها اگر $x = y^-$.

در این صورت $K \equiv (K, *, ^-, e)$ یک ابرگروه نامیده می‌شود.

توجه کنید که در یک ابرگروه K، $\delta_x * \delta_y$ لزوماً یک اندازهٔ دیراک نیست.

مجموعهٔ $Z(K) := \{x \in K \mid$ برای هر $y \in K$، $\operatorname{supp}(\delta_x * \delta_y)$ تک‌عضوی است$\}$ را مرکز K می‌نامند. $Z(K)$ با عمل $(x, y) \mapsto x.y$ یک گروه موضعاً فشرده است که در آن $x, y \in Z(K)$ و $x.y$ عضو یکتای موجود در مجموعه $\operatorname{supp}(\delta_x * \delta_y)$ است.

ابرگروه K جابه‌جایی نامیده می‌شود اگر برای هر $x, y \in K$، $\delta_x * \delta_y = \delta_y * \delta_x$. در [۱۲] نشان داده شده است که هر ابرگروه جابه‌جایی K دارای اندازه رادون مثبت مخالف صفر m است به‌طوری‌که برای هر $x \in K$، $\delta_x * m = m$. (چنین اندازه m ای اندازه هار ابرگروه K نامیده می‌شود.)

در سراسر این مقاله فرض می‌کنیم K یک ابرگروه جابه‌جایی با اندازهٔ هار m است. فرض کنید f و g توابع بورل مختلط مقدار بر K باشند و $\mu \in M(K)$. برای هر $x, y \in K$ قرار می‌دهیم

$$f_x(y) = f(x * y) := \int_K f \; d(\delta_x * \delta_y).$$

هم‌چنین تعریف می‌کنیم

$$(\mu * f)(x) := \int_K f(y^- * x) \; d\mu(y),$$
$$(f * g)(x) := \int_K f(x * y) g(y^-) \; dm(y).$$

فرض کنید $A, B \subseteq K$. در این صورت قرار می‌دهیم

$$A * B = \bigcup_{x \in A, y \in B} \{x\} * \{y\}. \;,\; \{x\} * \{y\} = \operatorname{supp}(\delta_x * \delta_y),\; A^- = \{x^- : x \in A\}$$

تابع پیوسته مختلط ξ روی K را ضربی می‌نامیم اگر برای هر $x, y \in K$، $\xi(x * y) = \xi(x)\xi(y)$. فضای همهٔ توابع ضربی و کران‌دار بر K را با $X_b(K)$ نشان می‌دهیم. تابع ضربی، کران‌دار و مخالف صفر ξ بر K کاراکتر نامیده می‌شود در صورتی که برای هر x در K، $\xi(x^-) = \overline{\xi(x)}$. فضای هاسدورف و موضعاً فشرده همهٔ کاراکترها با توپولوژی همگرای یک‌نواخت بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ K را دوگان K می‌نامیم و با $\hat{K}$ نشان می‌دهیم. K را یک ابرگروه قوی می‌نامیم در صورتی که $\hat{K}$ با نگاشت مزدوج مختلط به‌عنوان بازگشت و با ضرب نقطه‌ای به‌عنوان پیچش یعنی:

$$\mu(x)\,\chi(x) = \int_{\hat{K}} \xi(x) d(\delta_\mu * \delta_\chi)(\xi) \qquad\qquad \forall \mu, \chi \in \hat{K}, x \in K$$

و تابع ثابت به‌عنوان همانی ابرگروه باشد.

فرض کنید τ اندازه پلانچرل مرتبط با m بر $\hat{K}$ باشد [۱]. در این صورت برای $1 \le p < \infty$، $L^p(K, m)$ را با $L^p(K)$ و $L^p(\hat{K}, \tau)$ را با $L^p(\hat{K})$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $f \in L^1(K)$ و $\mu \in M(K)$. در این صورت تبدیل فوریه f و μ را به ازای هر $\xi \in \hat{K}$ چنین تعریف می‌کنیم:

$$\hat{f}(\xi) = \int_K \overline{\xi(t)} f(t) dm(t) \qquad , \qquad \hat{\mu}(\xi) = \int_K \overline{\xi(t)} d\mu(t).$$

برای هر $f, g \in L^2(K)$ داریم $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(\hat{K})$ و $\hat{f} * \hat{g} = (fg)\hat{}$ [۱]. بر خلاف حالت گروهی، در ابرگروه‌ها فضای ساختاری جبر باناخ $L^1(K)$ لزوماً برابر با $\hat{K}$ نیست. در اینجا فقط تساوی $\Delta(L^1(K)) = X_b(K)$ برقرار است و این در حالی است که $\hat{K} \subseteq X_b(K)$. در این مقاله فرض می‌کنیم K یک ابرگروه قوی و جابه‌جایی باشد و $\hat{K} = X_b(K)$ (این شرایط را با $(\wp)$ نشان می‌دهیم). واضح است که هر گروه آبلی موضعاً فشرده در این شرایط صدق می‌کند. هم‌چنین اگر G یک گروه آبلی موضعاً فشرده و $\mathcal{H}$ زیرگروه فشرده از $Aut(G)$ (گروه همه خودریختی‌های G) باشد آن‌گاه فضای G_H شامل همهٔ H- مدارها، ابرگروهی جابه‌جایی است که در شرایط $(\wp)$ صدق می‌کند. در حقیقت $(G_H)\hat{} \cong (\hat{G})_H$. برای جزئیات بیش‌تر به [۱۰] مراجعه شود. فرض کنید G گروهی موضعاً فشرده باشد و Z را برابر با مجموعهٔ $\{x \in G \mid xy = yx$ ، برای هر $y \in G\}$ در نظر می‌گیریم. بفرض G/Z فشرده و K ابرگروه همهٔ رده‌های تزویج G است. به‌عبارت دیگر، $K := \{[a] : a \in G\}$ که در آن $[a] := \{b \in G : \exists g \in G; b = gag^{-1}\}$. در این صورت K و دوگان آن $\hat{K}$ در شرایط $(\wp)$ صدق می‌کنند [۱].

در ادامه به بیان دو لم که در بخش‌های بعدی از آن‌ها استفاده می‌کنیم می‌پردازیم. اثبات این دو لم را می‌توان در [۱] و [۲] مشاهده کرد.

لم ۲. فرض کنید C و U دو زیرمجموعه از $\hat{K}$ باشند به‌طوری‌که C فشرده، U باز و $C \subseteq U$ باشد. در این صورت $f \in L^1(K)$ موجود است به‌طوری‌که $0 \le \hat{f} \le 1$ و $\hat{f} = 1$ روی C و $\operatorname{supp}(\hat{f}) \subseteq U$.

در ادامه قرار می‌دهیم:

$$\mathbf{K}^1(K) := \{ f \in L^1(K) : \text{فشرده باشد } \operatorname{supp}(\hat{f}) \}.$$

لم ۳. $\mathbf{K}^1(K)$ در $L^1(K)$ چگال است.

طیف آروسون بر ابرگروه‌ها

فرض کنید A یک جبر باناخ جابه‌جایی باشد و $E \subseteq A$. در این صورت غلاف E را با $\operatorname{hull}(E)$ نشان می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم:

$$\operatorname{hull}(E) := \{\varphi \in \Delta(A) : \ \forall a \in E \ , \ \hat{a}(\varphi) = 0\},$$

که در آن $\Delta(A)$ فضای ساختاری A است.

تعریف ۴. فرض کنید M یک W^*- جبر، و $\pi : M(K) \longrightarrow B_\sigma(M)$ یک هم‌سان‌ریختی نرم کاهنده باشد. برای هر t در K، $\pi(\delta_t)$ را با π_t نشان می‌دهیم. π یک نمایش نامیده می‌شود در صورتی که در شرایط زیر صدق کند:

۱. برای هر $t \in K$، $\pi_t : M \to M$ یک ∗- خودریختی باشد.
۲. برای هر $x \in M$ و هر $p \in M_*$، تابع $t \mapsto \langle \pi_t(x), p \rangle$ پیوسته باشد.
۳. $\pi_e = I_M$ ، که در آن e عضو همانی K و I_M نگاشت همانی روی M است.

در این صورت (M, K, π) یک W^*- سیستم نامیده می‌شود.

در سراسر این مقاله M یک W^*- جبر و π یک نمایش از ابرگروه K روی M است.

برای هر $\mu \in M(K)$ داریم،

$$\langle \pi(\mu)(x), p\rangle = \int_K \langle \pi_t(x), p\rangle d\mu(t)$$

که در آن $x \in M$ و $p \in M_*$ [9].

تعریف ۵. ۱. طیف آروسون برای نگاشت π را چنین تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{sp}\,\pi := \mathrm{hull}(\{ f \in L^1(K) : \pi(f) = 0\}).$$

در این صورت $\mathrm{sp}\,\pi$ زیرمجموعه بسته‌ای از $\hat{K}$ است و $1 \in \mathrm{sp}\,\pi$ [9].

۲. فرض کنید $x \in M$. تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{sp}_\pi(x) := \mathrm{hull}(\{ f \in L^1(K) : \pi(f)(x) = 0\})$$

۳. فرض کنید E زیرمجموعه بسته‌ای از $\hat{K}$ باشد. در این صورت $M(\pi, E)$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$M(\pi, E) := \{x \in M : \mathrm{sp}_\pi(x) \subseteq E\}.$$

تذکر ۶. گوییم ابرگروه K در خاصیت (α) صدق می‌کند هرگاه به‌ازای هر دو زیرمجموعه فشرده E_1 و E_2 از $\hat{K}$ و هر عضو $L^1(K)$ مانند f، که $\hat{f}$ بر یک همسایگی از $E_1 * E_2$ برابر با صفر باشد، اعضایی از $L^1(K)$ مانند f_1 و f_2 موجود باشند که برای $i=1,2$، بر یک همسایگی از E_i، داشته باشیم $\hat{f}_i \equiv 1$ و برای هر $s_1, s_2 \in K$ و تقریباً هر $t \in \mathrm{supp}(\delta_{s_1} * \delta_{s_2})$،

$$\kappa(s_1, s_2, t) := \int f(s) f_1(s_1 * s^-) f_2(t * s^-) dm(s) = 0.$$

آشکارا چون K جابه‌جایی است مجموعه‌های $\mathrm{supp}(\delta_{s_1} * \delta_{s_2})$ و $\mathrm{supp}(\delta_{s_2} * \delta_{s_1})$ با هم برابرند اما در حالت کلی $\kappa(s_1, s_2, t) \neq \kappa(s_2, s_1, t)$. در بخش ۴ نشان می‌دهیم که گروه‌های موضعاً فشرده و ابرگروه‌های معرفی شده به‌وسیلهٔ دانکل و رامیرز در خاصیت (α) صدق می‌کنند.

لم ۷. فرض کنیم (M, K, π) یک W^*- سیستم باشد، $f_1, f_2 \in L^1(K)$ و $x_1, x_2 \in M$ به‌طوری‌که به‌ازای $i=1,2$، بر یک همسایگی از $\mathrm{sp}_\pi(x_i)$ داریم $\hat{f}_i \equiv 1$. به‌ازای $i=1,2$ و هر $p \in M_*$ و $t \in K$ قرار می‌دهیم $h_i(t) := \langle \pi_t(x_i), p\rangle$. در این صورت برای هر $f \in L^1(K)$ داریم

$$\langle \pi(f)(x_1 x_2), p\rangle == \int_K \int_K \int_K \kappa(u, v, t) h_1(u) h_2(t) d(\delta_u * \delta_v)(t) dm(u) dm(v).$$

اثبات. با استفاده از ([7], 3.1 F) به‌ازای هر $s \in K$ داریم

$$\begin{aligned}\int_K f_2(v * s^-) h_2(v) dm(v) &= \int_K f_2(v * s^-) h_2(v) d(\delta_u * m)(v)\\ &= \int_K \int_K f_2(t * s^-) h_2(t) d(\delta_u * \delta_v)(t) dm(v).\end{aligned}$$

از این‌رو بنا بر ([9], 3.3(viii)) به ازای $i=1,2$ داریم، $\pi(f_i)(x_i) = x_i$ و برای هر $p \in M_*$ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\langle \pi(f)(x_1 x_2), p\rangle &= \int_K \langle \pi_s(x_1 x_2), p\rangle f(s) dm(s)\\ &= \int_K \langle \pi_s(x_1), p\rangle \langle \pi_s(x_2), p\rangle f(s) dm(s)\\ &= \int_K \langle \pi_s(\pi(f_1)(x_1)), p\rangle \langle \pi_s(\pi(f_2)(x_2)), p\rangle f(s) dm(s)\\ &= \int_K \langle \pi(\delta_s * f_1)(x_1), p\rangle \langle \pi(\delta_s * f_2)(x_2), p\rangle f(s) dm(s)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_K \int_K \int_K h_1(u*s) f_1(u) h_2(v*s) f_2(v) f(s) dm(s) dm(u) dm(v) \\
&= \int_K \int_K \int_K f(s) f_1(u*s^-) f_2(v*s^-) h_1(u) h_2(v) dm(s) dm(u) dm(v) \\
&= \int_K \int_K \int_K \int_K f(s) f_1(u*s^-) f_2(t*s^-) h_1(u) h_2(t) dm(s) d(\delta_u * \delta_v)(t) dm(u) dm(v) \\
&= \int_K \int_K \int_K \kappa(u,v,t) h_1(u) h_2(t) d(\delta_u * \delta_v)(t) dm(u) dm(v).
\end{aligned}
$$

قضیهٔ ۸. فرض کنید (M, K, π) یک W^*- سیستم باشد و K در خاصیت (α) صدق کند. در این صورت برای هر $x_1, x_2 \in M$، $\mathrm{sp}_\pi(x_1x_2) \subseteq \mathrm{sp}_\pi(x_1) * \mathrm{sp}_\pi(x_2)$.

اثبات. ابتدا فرض کنید برای $i = 1,2$، $\mathrm{sp}_\pi(x_i)$ فشرده باشد. قرار می‌دهیم $(i = 1,2)$ $\quad E_i := \mathrm{sp}_\pi(x_i)$ و $x := x_1x_2$. با استفاده از ([9], 3.3(vi)) کافی است نشان دهیم برای هر $f \in L^1(K)$ که $\hat{f}$ بر یک همسایگی از $E := E_1 * E_2$ برابر صفر است داریم $\sigma(f)(x) = 0$.

فرض کنید $f \in L^1(K)$ و بر یک همسایگی از E، $\hat{f} \equiv 0$. از آنجا که K در خاصیت (α) صدق می‌کند برای $i = 1,2$ می‌توانیم عناصر f_i از $L^1(K)$ را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که بر یک همسایگی از E_i، $\hat{f}_i \equiv 1$ و برای هر $s_1, s_2 \in K$ و تقریباً هر $t \in \mathrm{supp}(\delta_{s_1} * \delta_{s_2})$، $\kappa(s_1, s_2, t) = 0$. در این صورت بنا بر لم قبل و خاصیت (α)، به‌ازای هر $p \in M_*$، $\langle \pi(f)(x), p \rangle = 0$ یعنی، $\pi(f)(x) = 0$. بنابراین با استفاده از ([۹] ۳.۳ (vi))، $x \in M(\pi, E)$. حال فرض کنید به‌ازای $i = 1,2$، $\mathrm{sp}_\pi(x_i)$ فشرده نباشد و فرض کنید (f_α) همانی تقریبی برای $L^1(K)$ باشد (۲.۲.۲۸ از [۱]). در این صورت برای هر $y \in M$، $\pi(f_\alpha)y \to y$ با توپولوژی $\sigma(M, M_*)$. بنابراین

$$y \in \overline{\{\pi(f)(y) \mid f \in L^1(K), \|f\|_1 \le 1\}}^{\sigma}$$

و با استفاده از لم ۳ داریم

$$y \in \overline{\{\pi(f)(y) \mid f \in \mathbf{K}^1(K), \|f\|_1 \le 1\}}^{\sigma}.$$

در نتیجه با توجه به (۱.۲.۱ ، ۱.۲.۸ از [۸]) به‌دست می‌آوریم

$$x \in \overline{\{\pi(f)(x_1)\pi(g)(x_2) \mid f, g \in \mathbf{K}^1(K), \|f\|_1, \|g\|_1 \le 1\}}^{\sigma}.$$

اکنون با استفاده از قسمت ابتدای اثبات و ([۹], 3.3(v))، برای هر $f, g \in \mathbf{K}^1(K)$ که $\|f\|_1 \le 1$ و $\|g\|_1 \le 1$، داریم $\mathrm{sp}_\pi\big(\pi(f)(x_1).\pi(g)(x_2)\big) \subseteq E$. در آخر از آن‌جاکه $M(\pi, E)$ $\sigma(M, M_*)$- بسته است، آشکارا $x \in M(\pi, E)$.

نتیجه ۹. فرض کنید (M, K, π) یک W^*- سیستم باشد و K در خاصیت (α) صدق کند، E_1 و E_2 دو زیرمجموعهٔ بسته از $\hat{K}$ باشند و $E = \overline{E_1 * E_2}$. در این صورت برای هر $x_1 \in M(\pi, E_1)$ و $x_2 \in M(\pi, E_2)$ داریم $x_1x_2 \in M(\pi, E)$.

اثبات. بنا بر مفروضات و قضیهٔ ۸،

$$\mathrm{sp}_\pi(x_1x_2) \subseteq \overline{\mathrm{sp}_\pi(x_1) * \mathrm{sp}_\pi(x_2)} \subseteq \overline{E_1 * E_2} = E$$

در این صورت $x_1x_2 \in M(\pi, E)$.

مثال‌ها

در این بخش مثال‌هایی از ابرگروه‌ها را عرضه می‌کنیم که در شرایط قضیه ۸ صدق می‌کنند. در واقع نشان می‌دهیم که خاصیت (α) برای گروه‌های موضعاً فشرده، ابرگروهی دو عضوی و نیز دسته‌ای مهم از ابرگروه‌های شمارا برقرار است.

مثال ۱. فرض کنید G یک گروه آبلی موضعاً فشرده باشد. در این صورت G با پیچش استاندارد روی $M(G)$ و نگاشت وارون به عنوان برگشت یک ابرگروه است. اینک نشان می‌دهیم G در خاصیت (α) صدق می‌کند.

فرض کنید E_1 و E_2 دو زیرمجموعه فشرده از $\hat{G}$ باشند و f عضوی از $L^1(G)$ چنان باشد که بر یک همسایگی از $E = E_1 * E_2$، $\hat{f} \equiv 0$. بنابراین یک همسایگی فشرده مانند V از 1 موجود است که $\hat{f} \equiv 0$ بر $E*V*V$. با استفاده از لم ۲ می‌توان به‌ازای $i=1,2$ عضو f_i از $L^1(G)$ را چنان انتخاب کرد که روی همسایگی از E_i $\hat{f}_i \equiv 1$ و $\text{supp}(\hat{f}_i) \subseteq E_i * V$. فرض کنید $s_1, s_2 \in G$ و $t \in \{s_1\} * \{s_2\} = \{s_1 s_2\}$. در این صورت

$$\kappa(s_1, s_2, t) = \kappa(s_1, s_2, s_1 s_2) = \int_G f(s)\, f_1(s_1 s^{-1})\, f_2(s_1 s_2 s^{-1}) dm(s)$$
$$= (f * (f_1 g))(s_1)$$

که در آن $g(s) = (f_2)_{s_2}(s) := f_2(s s_2)$. اینک s_2 را ثابت فرض می‌کنیم و تبدیل فوریه را برای متغیر s_1 به‌دست می‌آوریم. در این صورت برای هر $\xi \in \hat{G}$ داریم، $(f * (f_1 g))\hat{}(\xi) = \hat{f}(\xi)(f_1 g)\hat{}(\xi)$. از آن‌جاکه به‌ازای $i=1,2$، $\text{supp}(\hat{f}_i) \subseteq E_i * V$، داریم $\hat{f}_i \in C_c(\hat{G}) \subseteq L^2(\hat{G})$. بنابراین برای هر $\xi \in \hat{G}$ داریم

$$(f * (f_1 . g))^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi)(f_1 . g)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi)(\hat{f}_1 * \hat{g})(\xi).$$

از آن‌جاکه $\hat{g}(\xi) = \xi(s_2)\hat{f}_2(\xi)$، $\text{supp}(\hat{f}_1 * \hat{g}) \subseteq \text{supp}(\hat{f}_1) * \text{supp}(\hat{g}) \subseteq E*V*V$ و با توجه به این‌که $\hat{f}$ بر $E*V*V$، برابر با صفر است برای هر $\xi \in \hat{G}$ داریم $(f*(f_1 g))\hat{}(\xi) = 0$. بنابراین برای هر $s_1, s_2 \in G$، s_1 $\kappa(s_1, s_2, s_1 s_2) = (f * (f_1 g))(s_1) = 0$.

مثال ۲. فرض کنید $K = \{e, a\}$ یک مجموعهٔ دوعضوی با توپولوژی گسسته، و β یک عدد حقیقی باشد به‌طوری که $0 < \beta \leq 1$. پیچش وابسته به β بر K را چنین تعریف می‌کنیم

$$\delta_e * \delta_e = \delta_e \;,\; \delta_e * \delta_a = \delta_a \;,\; \delta_a * \delta_e = \delta_a \;,\; \delta_a * \delta_a = \beta\delta_e + (1-\beta)\delta_a$$

در این صورت K یک ابرگروه هرمیتی با همانی e است. توجه کنید که K یک گروه است اگر و تنها اگر $\beta = 1$ و $m = \delta_e + \left(\frac{1}{\beta}\right)\delta_a$ یک اندازه هار بر K است.

$\hat{K} = \{1, \chi\}$ که در آن $\chi(e) = 1$ و $\chi(a) = -\beta$. هم‌چنین $\hat{K}$ یک ابرگروه گسسته و جابه‌جایی است و با K یک‌ریخت است [۷]. حال نشان می‌دهیم K در خاصیت (α) صدق می‌کند.

فرض کنید E_1 و E_2 دو زیرمجموعه از $\hat{K}$ باشند و $E = E_1 * E_2$ و فرض کنید f عضوی از $L^1(K)$ باشد که $\hat{f}$ بر یک همسایگی از E، صفر است.

ابتدا فرض می‌کنیم $E_1 = \{1, \chi\}$ و $E_2 \subseteq \hat{K}$ و یا $E_1 = E_2 = \{\chi\}$. در هر دو حالت داریم $E_1 * E_2 = \{1, \chi\} = \hat{K}$. به‌ازای $i=1,2$ فرض کنید f_i متعلق به $L^1(K)$ چنان باشد که $\hat{f}_i$ بر یک همسایگی

از E_i برابر 1 است. از آن‌جاکه $\hat{f}$ بر $E_1 * E_2 = \hat{K}$ صفر است داریم $f \equiv 0$. در نتیجه برای هر $s_1, s_2 \in K$ و $t \in \operatorname{supp}(\delta_{s_1}, \delta_{s_2})$، $\kappa(s_1, s_2, t) = 0$.

فرض کنید $E_1 = \{1\}$ و $E_2 = \{\chi\}$. در این صورت $E = E_1 * E_2 = \{\chi\}$. قرار دهید $f_1(e) := f_1(a) = \frac{\beta}{1+\beta}$. در این صورت $\operatorname{supp}(\hat{f}_1) = E_1$. همچنین اگر f_2 متعلق به $L^1(K)$ را چنان انتخاب کنیم که $f_2(e) := \frac{1}{1+\beta}$ و $f_2(a) := \frac{-\beta}{\beta+1}$ داریم، $\operatorname{supp}(\hat{f}_2) = E_2$. از آن‌جاکه $\hat{f}(\chi) = \int f \,\overline{\chi}\, dm = f(e) - f(a) = 0$ نتیجه می‌شود $f(e) = f(a)$. فرض کنید $s_1 = s_2 = a$ و $t \in \operatorname{supp}(\delta_a * \delta_a) = \{e, a\}$. برای $t = e$ داریم

$$
\begin{aligned}
\kappa(s_1, s_2, e) &= \kappa(a, a, e) \\
&= \int_K f(s)\, f_1(s_1 * s^-)\, f_2(t * s^-) dm(s) \\
&= \int_K f(s)\, f_1(a * s^-)\, f_2(e * s^-) dm(s) \\
&= f(e) f_1(a) f_2(e) m(e) + f(a) f_1(a * a) f_2(a) m(a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= f(e) f_1(a) f_2(e) m(e) + f(a)[\beta\, f_1(e) + (1-\beta) f_1(a)] f_2(a) m(a) \\
&= f(e) \frac{\beta}{1+\beta} \times \frac{1}{1+\beta} + f(a) \frac{\beta}{1+\beta} \times \frac{-\beta}{1+\beta} \times \frac{1}{\beta} = 0
\end{aligned}
$$

و برای $t = a$ داریم

$$
\begin{aligned}
\kappa(s_1, s_2, t) &= \kappa(a, a, a) \\
&= \int_K f(s)\, f_1(s_1 * s^-)\, f_2(t * s^-) dm(s) \\
&= \int_K f(s)\, f_1(a * s^-)\, f_2(a * s^-) dm(s) \\
&= f(e) f_1(a) f_2(a) m(e) + f(a) f_1(a * a) f_2(a * a) m(a) \\
&= f(e) \frac{\beta}{1+\beta} \times \frac{-\beta}{1+\beta} + f(a) \frac{\beta}{1+\beta} \times \frac{\beta^2}{1+\beta} \times \frac{1}{\beta} = 0.
\end{aligned}
$$

به‌طور مشابه اگر $s_1 = a$ و $s_2 = e$ و $t \in \operatorname{supp}(\delta_{s_1} * \delta_{s_2}) = \{a\}$ و یا $s_1 = s_2 = e$ و $t \in \operatorname{supp}(\delta_{s_1} * \delta_{s_2}) = \{e\}$، داریم $\kappa(s_1, s_2, t) = 0$.

در آخر فرض کنید $E_1 = E_2 = \{1\}$. در این صورت $E = E_1 * E_2 = \{1\}$. از آن‌جاکه $\hat{f}$ روی $E = \{1\}$، صفر است داریم $\hat{f}(1) = \int f(x) dm(x) = f(e) + \frac{1}{\beta} f(a) = 0$ و بنابراین $f(a) = -\beta\, f(e)$. برای $i = 1, 2$ قرار می‌دهیم $f_i(e) = f_i(a) := \frac{\beta}{1+\beta}$. در این صورت $\hat{f}_i(1) = 1$ و $\hat{f}_i(\chi) = 0$ به‌عبارت دیگر *به‌ازای* $i = 1, 2$، $\operatorname{supp}(\hat{f}_i) = E_i$.

فرض کنید $s_1 = s_2 = a$ و $t \in \operatorname{supp}(\delta_a * \delta_a) = \{e, a\}$. برای $t = e$ داریم

$$\begin{aligned}\kappa(s_1,s_2,t)=\kappa(a,a,e)&=\int_K f(s)f_1(s_1*s^-)f_2(t*s^-)dm(s)\\&=\int_K f(s)f_1(a*s^-)f_2(s^-)dm(s)\\&=f(e)f_1(a)f_2(e)m(e)+f(a)f_1(a*a)f_2(a)m(a)\\&=f(e)\frac{\beta}{1+\beta}\times\frac{\beta}{1+\beta}+f(a)\frac{\beta}{1+\beta}\times\frac{\beta}{1+\beta}\times\frac{1}{\beta}=0.\end{aligned}$$

برای $t=a$ داریم

$$\begin{aligned}\kappa(s_1,s_2,t)=\kappa(a,a,a)&=\int_K f(s)f_1(s_1*s^-)f_2(t*s^-)dm(s)\\&=\int_K f(s)f_1(a*s^-)f_2(a*s^-)dm(s)\\&=f(e)f_1(a)f_2(a)m(e)+f(a)f_1(a*a)f_2(a*a)m(a)\\&=f(e)\frac{\beta}{1+\beta}\times\frac{\beta}{1+\beta}+f(a)\frac{\beta}{1+\beta}\times\frac{\beta}{1+\beta}\times\frac{1}{\beta}=0.\end{aligned}$$

به‌راحتی می‌توان دید که برای $s_1=a$ و $s_2=e$ و $t\in\operatorname{supp}(\delta_{s_1}*\delta_{s_2})=\{a\}$ و یا $s_1=s_2=\{e\}$ و $t\in\operatorname{supp}(\delta_{s_1}*\delta_{s_2})=\{e\}$ داریم $\kappa(s_1,s_2,t)=0$.

مثال ۳. فرض کنید $\mathbf{Z}_+^\infty$ فشرده سازی تک نقطه‌ای $\mathbf{Z}_+=\{0,1,2,\ldots\}$ و p یک عدد اول باشد. برای هر $m,n\in\mathbf{Z}_+$، پیچش δ_m و δ_n را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\delta_m*\delta_n:=\begin{cases}\delta_{\min(n,m)} & n\neq m\\ \frac{p-2}{p-1}\delta_n+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{p^{k-n}}\delta_k & n=m\end{cases}$$

هم‌چنین برای هر $m\in\mathbf{Z}_+$ تعریف می‌کنیم:

$$\delta_m*\delta_\infty=\delta_\infty*\delta_m:=\delta_m$$

در این صورت $\mathbf{Z}_+^\infty$ یک ابرگروه هرمیتی با همانی ∞ است. اندازهٔ

$$m(\{k\})=\begin{cases}\left(\frac{1}{p}\right)^k\left(1-\frac{1}{p}\right) & k=0,1,2,\ldots\\ 0 & k=\infty\end{cases}$$

یک اندازهٔ هار بر $\mathbf{Z}_+^\infty$ است. دوگان $\mathbf{Z}_+^\infty$ برابر با مجموعه $\{\chi_n:n=0,1,2,\ldots\}$ است که برای $n=0,1,2,\ldots$ تابع χ_n روی $\mathbf{Z}_n^\infty$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\chi_n(m):=\begin{cases}1 & m\geq n\ \text{ or }\ m=\infty\\ \frac{-1}{p-1} & m=n-1\\ 0 & m\leq n-2\end{cases}$$

مجموعه $\{\chi_n:n=0,1,2,\ldots\}$ کاراکترهای روی $\mathbf{Z}_n^\infty$ هستند و در واقع $\hat{\mathbf{Z}}_+^\infty\cong\mathbf{Z}_+$ که $\hat{\mathbf{Z}}_+^\infty$ دوگان $\mathbf{Z}_+^\infty$ است. پیچش روی $\hat{\mathbf{Z}}_+^\infty$ چنین تعریف می‌شود:

$$\delta_{\chi_n} * \delta_{\chi_m} := \begin{cases} \delta_{\chi_{\max(n,m)}} & n \neq m \\ \frac{1}{p^{n-1}(p-1)}\delta_{\chi_0} + \sum_{k=1}^{n-1} p^{k-n}\delta_{\chi_k} + \frac{p-2}{p-1}\delta_{\chi_n} & n = m \end{cases}$$

و $\mathbf{Z}_+$ با این پیچش یک ابرگروه هرمیتی با همانی $\chi_0 = 1$ است. برای جزئیات بیش‌تر به [۵] مراجعه شود. اینک نشان می‌دهیم $\mathbf{Z}_+^\infty$ در خاصیت (α) صدق می‌کند.

فرض کنید E_1 و E_2 دو زیرمجموعه فشرده از $\hat{\mathbf{Z}}_+^\infty \cong \mathbf{Z}_+$ باشند، $f \in L^1\left(\mathbf{Z}_+^\infty\right)$ و $\hat{f}$ بر یک همسایگی از $E = E_1 * E_2$ برابر با صفر باشد. با استفاده از لم ۲ عناصری در $L^1(K)$ مانند h و g وجود دارند به‌طوری‌که $\hat{g} \equiv 1$ روی E_1 ، و $\mathrm{supp}(\hat{g}) \subseteq E_1$ و همچنین $\hat{h} \equiv 1$ روی E_2 و $\mathrm{supp}(\hat{h}) \subseteq E_2$. فرض کنید $s_1, s_2 \in \mathbf{Z}_+^\infty$ و $t \in \mathrm{supp}(\delta_{s_1} * \delta_{s_2})$. در این صورت

$$\kappa(s_1, s_2, t) = \int_{\mathbf{Z}_+^\infty} f(s)g(s_1 * s^-)h(t * s^-)dm(s) = ((f.g_{s_1}^-) * h)(t).$$

از آن‌جاکه $\mathbf{Z}_+^\infty$ هرمیتی است داریم، $\kappa(s_1, s_2, t) = ((f.g_{s_1}) * h)(t)$. با ثابت در نظر گرفتن s_1 و s_2 از $\mathbf{Z}_+^\infty$ برای هر $\xi \in \hat{\mathbf{Z}}_+^\infty$ داریم، $((f.g_{s_1}) * h)\hat{}(\xi) = (f.g_{s_1})\hat{}(\xi)\hat{h}(\xi)$. از آن‌جاکه $f.g_{s_1} \in L^1(\mathbf{Z}_+^\infty)$ و $\mathrm{supp}(\hat{g}_{s_1}) \subseteq \mathrm{supp}(\hat{g})$ داریم

$$\begin{aligned} \mathrm{supp}(f.g_{s_1})\hat{} &= \mathrm{supp}(\hat{f} * \hat{g}_{s_1}) \\ &\subseteq \mathrm{supp}(\hat{f}) * \mathrm{supp}(\hat{g}_{s_1}) \\ &\subseteq \mathrm{supp}(\hat{f}) * \mathrm{supp}(\hat{g}) \\ &\subseteq (E_1 * E_2)^c * E_1 \end{aligned}$$

در ادامه نشان می‌دهیم $((E_1 * E_2)^c * E_1) \cap E_2 = \varnothing$، در این صورت به‌ازای هر $\xi \in \hat{\mathbf{Z}}_+^\infty$ $((f.g_{s_1}) * h)\hat{}(\xi) = 0$ و در نتیجه به‌ازای هر $\kappa(s_1, s_2, t) = 0$ $s_1, s_2 \in \mathbf{Z}_+^\infty$ t.

از آن‌جاکه E_1 و E_2 دو زیرمجموعهٔ فشرده از فضای گسسته $\hat{\mathbf{Z}}_+^\infty$ هستند می‌توانیم فرض کنیم $E_1 = \{\chi_{t_1}, \chi_{t_2}, \ldots, \chi_{t_n}\}$ و $E_2 = \{\chi_{r_1}, \chi_{r_2}, \ldots, \chi_{r_m}\}$، که در آن به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq m$، $t_i, r_j \in \mathbf{Z}_+$، $t_i < t_{i+1}$ و $r_j < r_{j+1}$.

حالت اول: $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. فرض کنید $t_1 < r_1$. پس به‌ازای هر $1 \leq j \leq m$، $\{\chi_{t_1}\} * \{\chi_{r_j}\} = \{\chi_{r_j}\}$، بنابراین $\{\chi_{t_1}\} * E_2 = E_2$ و $E_2 \subseteq E_1 * E_2$. فرض کنید به‌ازای j ای داشته باشیم:

$$\chi_{r_j} \in E_2 \cap ((E_1 * E_2)^c * E_1)\,،$$

از آن‌جاکه $(E_1 * E_2)^c \cap E_2 = \varnothing$ و نیز $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. با توجه به تعریف پیچش بر $\hat{\mathbf{Z}}_+^\infty$، عضوی از $E_1 \cap (E_1 * E_2)^c$ مانند χ_{t_i} موجود است که $r_j \leq t_i$. در این صورت $\chi_{r_j} \in \{\chi_{t_i}\} * \{\chi_{t_i}\} \subseteq E_1 * (E_1 * E_2)^c$.

$\chi_{t_i} \in (E_1 * E_2)^c$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $1 \le j \le m$ ، $t_i < r_j$، زیرا اگر به‌ازای j ای $r_j < t_i$، آن‌گاه $\chi_{t_i} \in E_1 * E_2$ و در نتیجه $\chi_{t_i} \notin (E_1 * E_2)^c$. بنابراین وجود ندارد عضوی از $E_1 \cap (E_1 * E_2)^c$ مانند χ_{t_i} به‌طوری که $r_j \le t_i$. بنابراین $E_1 \cap (E_1 * (E_1 * E_2)^c) = \varnothing$.

حالت دوم: $E_1 \cap E_2 \ne \varnothing$. فرض کنید $E_1 \cap E_2 = \{\chi_{\alpha_1}, \chi_{\alpha_2}, \ldots, \chi_{\alpha_l}\}$ که $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_l$ و $\alpha_l = r_s = t_k$. بنابراین داریم:

$\{\chi_{r_s}\} * \{\chi_{t_k}\} = \{\chi_0, \ldots, \chi_{t_k}\}$ و $\{\chi_{r_s}\} * E_1 = \{\chi_0, \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{t_k}, \chi_{t_{k+1}}, \ldots, \chi_{t_n}\}$ و

$\{\chi_{t_k}\} * E_2 = \{\chi_0, \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{r_s}, \chi_{r_{s+1}}, \ldots, \chi_{r_m}\}$ بنابراین $E_1 \subseteq E_1 * E_2$ و $E_2 \subseteq E_1 * E_2$.

حال فرض کنید $\chi_{r_j} \in E_2 \cap ((E_1 * E_2)^c * E_1)$. از آن‌جاکه $(E_1 * E_2)^c \cap E_1 = \varnothing$، پس $\chi_n \in (E_1 * E_2)^c * E_1$ اگر و تنها اگر $\chi_n \in E_1$ یا $\chi_n \in (E_1 * E_2)^c$. بنابراین $\chi_{r_j} \in (E_1 * E_2)^c$ یا $\chi_{r_j} \in E_1$. اما $(E_1 * E_2)^c \cap E_2 = \varnothing$ پس $\chi_{r_j} \in E_1$ و $\chi_{r_j} \notin (E_1 \setminus \{\chi_{r_j}\}) * (E_1 * E_2)^c$. از آن‌جا که $\chi_{r_j} \in E_1$ داریم، $\chi_{r_j} \in E_1 \cap E_2 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_l\}$. بنابراین $r_j \le r_s$. اگر $\chi_n \in (E_1 * E_2)^c$ آن‌گاه $n > r_s$. از این رو برای هر $\chi_n \in (E_1 * E_2)^c$، $\chi_{r_j} * \chi_n = \chi_n$. بنابراین $\chi_{r_j} \notin \{\chi_{r_j}\} * (E_1 * E_2)^c$. در نتیجه $\chi_{r_j} \notin (E_1 * E_2)^c * E_1$ و $((E_1 * E_2)^c * E_1) \cap E_2 = \varnothing$.

منابع

1. Bloom W. R., Heyer H., "Harmonic Analysis of Probability Measures on Hypergroups", De Gruter, Berlin (1995).
2. Chilana A. K., Ross K. A., "Spectral synthesis in hypergroups", Pacific Journal of Math., 76 (2) (1978) 313-328.
3. Connes A., "Une classification des facteurs de type(III)", Ann .Sci .Ecole Norm. Sup., 6 (1973) 133-252.
4. Dunkl C. F., "The measure algebra of a locally compact hypergroup", Trans. Amer. Math. Soc., 179 (1973) 331-348.
5. Dunkl C. F., Ramirez D. E., "A family of countably compact P_*-hypergroups", Trans. Amer. Math. Soc., 202 (1975) 339-356.
6. Godement R., "Theoremes tuuberiens et theorie spectral", Ann. sci. Ecole Norm. Sup., 63 (1974) 119-138.

7. Jewett R. I., "Spaces with an abstract convolution of measures", Adv. in Math. 18 (1975) 1-101.
8. Li B. R., "Introduction to Operator Algebras", World scientific, Hong Kong, London, New Jersey, Singapore(1992).
9. Medghalchi A. R., Tabatabaie S. M., "Spectral subspaces on hypergroup algebras", Publ. Math. Debrecen, 74 (2009) 307-320.
10. Ross K. A., "Centers of hypergroups", Trans. Amer. Math. Soc., 243 (1978) 251-269.
11. Spector R., "Apercu de la theorie des hypergroups", In: Analyse Harmonique sur les Groups de Lie, 643–673, Lec. Notes Math. Ser., 497, Springer (1975).
12. Spector R., "Measure invariantes sur les hypergroups", Trans. Amer. Math. Soc., 239 (1978) 147-165.